Math. U. Klügel
90 m. -4
F

<36603586380014

<36603586380014

Bayer. Staatsbibliothek

R

Mathematiſches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweiſen

und literariſchen Nachrichten begleitet

in alphabetiſcher Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

ehemals Profeſſor der Mathematik und Phyſik zu Halle, ꝛc.

fortgeſetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

Profeſſor der Mathematik zu Leipzig.

Erſte Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Vierter Theil

von Q bis S.

Mit ſieben Kupfertafeln.

Leipzig, 1823.

Bey E. B. Schwickert.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Es wird nicht nöthig ſeyn, den Leſern mit Aufzählung der Hinderniſſe, welche das Erſcheinen der mir aufgetragenen Fortſetzung und Beendigung des Klügelſchen mathematiſchen Wörterbuchs ſo lange verzögert haben, beſchwerlich zu fallen. Dem vornehmſten derſelben, Mangel an litterariſchen Hülfsmitteln, iſt ziemlich abgeholfen worden, und es iſt die Ausſicht vorhanden, daß ſolches noch mehr geſchehen wird. Ich werde künftighin nicht bloß von dieſer, ſondern auch von anderen Seiten ungehinderter fortarbeiten können, um den Leſern den fünften und letzten Theil der erſten, die reine Mathematik umfaſſenden, Abtheilung dieſes Werkes ſobald als möglich in die Hände zu bringen, und hoffe ſolches ſchon zu Michaelis nächſten Jahres leiſten zu können.

Die Reichhaltigkeit mancher der noch rückſtändigen, mitunter nicht zu leichten, Artikel machte nämlich eine Trennung und Abſonderung in zwey Theile nothwendig, obgleich das Werk urſprünglich nur auf vier Theile angelegt und berechnet war. Die Leſer ſollen, wie ich hoffe, bey der getroffenen Einrichtung nicht verloren haben, indem auf dieſe Weiſe die Entwickelung und Darſtellung wichtiger Gegenſtände mit der nöthigen Ausführlichkeit und Deutlichkeit geſchehen kann.

Bey dem großen Zuwachſe, den die Mathematik, insbeſondere die Analyſis, vorzüglich im Auslande, faſt täglich erhält, iſt auch ſchon Stoff genug zu Ergänzungen, ſowohl der vorigen Theile, als des gegenwärtigen Theils dieſes Wörterbuchs vorhanden, zu geſchweigen, daß manches ſchon früher vorhandene aus leicht begreiflichen Urſachen überſehen worden iſt. Ich bin, wenn es von mir gewünſcht wird, und Leben und Geſundheit es verſtatten, nicht abgeneigt, in der Folge auch einen Supplementband dieſes Werks, welcher Nachträge und Ergänzungen enthält, zu liefern.

Ich habe nur noch mit wenigen Worten den Antheil anzuzeigen, den ich an der Ausarbeitung des vorliegenden Theils des mathematiſchen Wörterbuchs habe.

Die Artikel: Magiſches Quadrat, und alle des Buchſtabens S., von dem: Stereographiſche Projection an, bis auf die Artikel: Subtraction, Summe und Synthesis, worüber der verewigte Klügel einiges aufgeſetzt hatte, was ich ergänzt habe, rühren ganz von mir her. Die andern Artikel ſind gröſstentheils noch Klügels Arbeit, welche aber einer Reviſion, und mitunter ſehr der Ergänzung bedurften. Die Artikel: Quadratwurzel, Quadratur, Rectification und Sphäroid, haben beträchtliche Zuſätze durch mich erhalten. Der vorletzte unter den genannten Artikeln war ſchon abgedruckt, als ich erſt Kenntniß von der vortrefflichen Methode des Herrn Hofrath Gauß zur Rectification der ganzen Ellipſe ſowohl, als einzelner elliptiſchen Bogen, welche aus deſſen Abhandlung: Determinatio attractionis, etc. §. 16—18. ſich ergiebt, erhielt. Ich würde ſie ſonſt ſtatt der Legendreſchen, weil ſie vorzüglicher iſt, aufge-

nommen haben. Ob der kleine Zuſatz, welchen ich in dem Art. Quadratur, 145, bey der von dieſem großen Geometer angegebenen Methode der mechaniſchen Quadraturen angebracht habe, ſo bedeutend iſt, daß es ſich der Mühe verlohnt, ihn auf die Fälle von mehr als drey Ordinaten auszudehnen, muß ich dem Urtheile der Sachverſtändigen überlaſſen.

Die Weitläufigkeit des Artikels: Summirung der Reihen, wird man nach Durchleſung deſſelben vermuthlich nicht tadeln, zumal, wenn man erwägt, wie wichtig dieſer Gegenſtand iſt, und daß man ſelbſt in dem großen, hierher einſchlagenden Werke von Lacroix nicht alles denſelben betreffende bekannte in einer ſchicklichen Ordnung beyſammen findet.

Hiermit empfehle ich dieſe Arbeit der gütigen und nachſichtsvollen Aufnahme der geneigten Leſer, mich ſelbſt aber der Gewogenheit derſelben.

Geſchrieben an der Leipziger
Jubilate-Meſſe, 1823.

Mathematiſches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literariſchen Nachrichten in alphabetiſcher Ordnung.

Erſte Abtheilung.

Arithmetik, Analyſis und Geometrie, die niedere und die höhere.

Q.

Quadrangulum, Viereckige Figur, ſ. **Viereck.**

Quadrant iſt der vierte Theil des Umfanges eines Kreiſes; auch ein Sector, welcher der vierte Theil der Kreisfläche iſt. Es gehört dazu ein rechter Winkel am Mittelpuncte.

Quadrant heißt auch ein Inſtrument zur Meſſung der Winkel in der Aſtronomie und praktiſchen Geometrie. Es wird auf verſchiedene Arten eingerichtet.

Von der Eintheilung des Quadranten ſ. die Artikel, Grad und Maß, Th. III. S. 601.

Quadrantal-Dreyeck, ſphäriſches, iſt ein ſolches, worin eine der Seiten ein Quadrant iſt.

Quadrat iſt eine ebene geradlinichte Figur mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln. — Wie ein Quadrat über einer gegebenen Linie gezeichnet wird, zeigt Euklides, B. I. S. 46.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches ſo groß iſt als zwey gegebene zuſammengenommen, folgt aus dem pythagoriſchem Lehrſatze.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Unterſchied zweyer gegebenen Quadrate ſey, beſchreibe man über des größern Seite, a, einen Halbkreis, trage in denſelben von dem einen Endpuncte die Seite b des zweyten Quadrats als Chorde, und ziehe dann die Chorde, c, des Complements zum Halbkreiſe, ſo iſt dieſe die Seite des verlangten Quadrats. — Denn die beiden Chorden machen mit einander einen rechten Winkel (Kreis, 20.); daher iſt bb + cc = aa, das iſt cc = aa — bb.

Die Diagonale eines Quadrats iſt mit der Seite der Länge nach incommenſurabel, d. i. verhält ſich zu derſelben nicht, wie eine ganze Zahl zu einer ganzen. — Dieſes beweiſet Euklides, erſt am Ende ſeiner arithmetiſchen Elemente, auf zweyerley Weiſe, durch den Widerſpruch, worauf die Annahme der Rationalität des Verhältniſſes führt.

Allgemein iſt der Satz: das Verhältniß der Katheten eines rechtwinklichten Dreyecks ſey = 1 : p, und p eine ganze Zahl, ſo iſt das Verhältniß der Hypotenuſe zu jeder der Katheten ein irrationales. — Geſetzt, das Verhältniß der kleinern Kathete zu der Hypotenuſe könne je ein rationales, $m : m + n$ ſeyn, ſo iſt $1 : 1 + p^2 = m^2 : (m + n)^2$, daher $1 : p^2 = m^2 : 2mn + n^2$, und $m^2 p^2 = (2m + n) n$. Iſt das Verhältniß, $m : m + n$, in den kleinſten ganzen Zahlen ausgedrückt, ſo haben auch m und n keinen gemeinſchaftlichen Theiler. Nun müßte das Product $(2m + n) n$ durch m theilbar ſeyn, wie es das gleiche $m^2 p^2$ iſt. Da aber der eine Factor n weder durch m ſelbſt, noch durch einen Factor von m theilbar iſt, ſo müßte der andere Factor, $2m + n$, durch m theilbar ſeyn. Die Diviſion giebt den Quotienten, $2 + \frac{n}{m}$, welcher keine ganze Zahl iſt. Das Verhältniß der kleinern Kathete zu der Hypotenuſe iſt alſo ein irrationales, daher iſt auch das Verhältniß der größern Kathete, welche ein Vielfaches der kleinern iſt, zu der Hypotenuſe ein irrationales.

Quadratgrad iſt eine Meß-Einheit, die auf verſchiedene Art beſtimmt werden mag.

Erſtlich für ebene Flächen iſt ſie ein Quadrat, zu deſſen Seite die Länge des Bogens von einem Grade auf dem Umfange eines gegebenen Kreiſes genommen wird, auf ähnliche Art, wie Quadratfuß, Quadratzoll die Quadrate über einem Fuß, einem Zoll, bedeuten. Der Halbmeſſer des Kreiſes ſey $= a$, ſo iſt der halbe Umfang $= \pi a$ (Cyklometrie, Th. I. S. 642.). Alſo iſt $\frac{\pi a}{180} = 1$ Kreis-Grad, und $\frac{\pi^2 a^2}{180 . 180} = 1$ Quadratgrad. Die Kreisfläche, durch den Halbmeſſer a ausgedrückt, iſt $= \pi a a$. Sie hält alſo $10313\frac{1}{4}$ Quadratgrade nächſtens.

Von dieſer Meß-Einheit wird man ſchwerlich Gebrauch zu machen finden, da man nicht leicht geradlinichte Längen durch Kreisbogen meſſen wird. Wenn eine Kreisfläche zur Meß-Einheit dient, ſo könnte der Quadratgrad für den Bruchtheil zur Einheit genommen werden.

Zweytens: Theile einer Kugelfläche laſſen ſich bequem durch ein gleichſeitiges und gleichwinkliges ſphäriſches Viereck angeben, auf ähnliche Art wie ebene Flächen durch das Quadrat einer beſtimmten geraden Linie. Nimmt man zu den Seiten des ſphäriſchen Vierecks einen Bogen von Einem Grad, ſo wird ein ſolches ſchicklicher ein Q u a d r a t g r a d genannt werden, als vorher das ebene Viereck. Die Winkel deſſelben ſind $90^\circ\ 0'\ 15,''17$ nächſtens. (Trigonometrie, ſphäriſche). Es verhält ſich zu der Kugelfläche, wie der Überſchuß ſeiner Winkel über vier Rechte zu acht Rechten, nahe wie 62,84 Sec. zu 720 Grad, das iſt, wie zu 41248.

Drittens: Eigentlicher wird auf der Kugelfläche ein kreisförmiger Raum, deſſen Durchmeſſer dem Bogen nach $= 1$ Grad iſt, ein Q u a d r a t g r a d heißen.

Der Halbmeſſer der Kugel ſey = a, ſo iſt dieſer Flächenraum $= 2\pi$ aa (1 cos 30′) $= 4\pi$ aa (sin 15′)^2, Complanation Th. I. S. 515. Da die ganze Kugelfläche = 4π aa iſt, ſo verhält ſich dieſer Quadratgrad zu der Kugelfläche, wie (sin 15′)^2 : 1, das iſt, wie 1 : 52525.

Der vierſeitige Quadratgrad und der kreisförmige verhalten ſich wie 52525 : 41248, oder wie 4 : 3,141165. Das Verhältniß eines ebenen Quadrats zu dem eingeſchriebenen Kreiſe iſt 4 : π = 4 : 3,141592.

Das ebene Quadrat und das ſphäriſche, deren Seiten die Länge eines Grades von dem Umfange eines gegebenen Kreiſes haben, verhalten ſich wie 5 π : 15,71 nächſtens, d. i. wie 15,70796 : 15,71 oder wie 1 : 1,00013 = 0,99987 : 1.

Der ebene Kreis und der ſphäriſche, deren Durchmeſſer die Länge eines Grades von dem Umfange eines gegebenen Kreiſes haben, verhalten ſich wie $\pi^2 : 720^2$(sin 15′)^2, d. i. wie π^2 : (3,141582 . . .)^2. — Die ſphäriſche Kreisfläche iſt kleiner als die ebene, weil der Umfang kleiner iſt; hingegen iſt das ſphäriſche Quadrat größer als das ebene, weil der Umfang derſelbe iſt wie in dieſem.

Zum Beyſpiele dieſer Art logarithmiſch-trigonometriſcher Rechnungen diene folgendes, wobey der Artikel, Logarithmus, §. 88, nachzuſehen ſeyn mag.

log. sin 15′	=	7,6398160 — 10
2log. sin 15′	=	5,2796320 — 10
Complement	=	4,7203680
Zahl	=	52525,2.

Man ſehe auch Käſtners geometriſche Abhandlungen, zweyte Sammlung, S. 205 — 213 und S. 487 — 493. Das in dieſem Artikel vorgetragene iſt daraus nicht genommen.

Quadratmaßſtab iſt eine eingetheilte gerade Linie, worauf die Theilungszahlen die Verhältniſſe der Quadrate von den zugehörigen Längen angeben. Er wird folgendergeſtalt gezeichnet.

Man ſetzt zwey gerade Linien, AB, AC, (Fig. 1.) rechtwinklicht zuſammen, nimmt auf AB die Länge AD ſo groß als die Einheit für die Längen ſeyn ſoll, wodurch das Quadrat von AD die Einheit für die Flächen wird. Auf AC nehme man A1 = AD, und ziehe D1; dann nehme man A2 = D1 und ziehe D2; darauf nehme man A3 = D2 und ziehe D3. So fahre man fort, ſo weit als der Maßſtab reichen ſoll. Den Grund der Eintheilung giebt der pythagoriſche Lehrſatz.

Der Maßſtab wird zur Vergleichung des Flächen-Inhalts ähnlicher Figuren, beſonders der Kreisflächen, beym Viſiren oder Ausmeſſen der Fäſſer, gebraucht.

Man kann die Längen auch von einem gleichtheiligen Maßſtabe auftragen. Nur muß man die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen, von 2 bis zu der letzten Zahl auf dem Maaßſtabe haben. Es iſt, wenn AD = 1000 genommen wird,

A1 =	1000		A7 =	2646	—
A2 =	1414	+	A8 =	2828	+
A3 =	1732	+	A9 =	3000	.
A4 =	2000		A10 =	3162	+
A5 =	2236	+	A11 =	3317	—
A6 =	2449	+	A12 =	3464	+

In Schulze's Sammlung logarithmiſcher, trigonometriſcher und anderer Tafeln, findet ſich im 2ten Bande auf S. 288 — 295 eine Tafel der Quadrat- und Cubikwurzeln aus den erſten 1000 ganzen Zahlen bis auf die ſiebente Decimalſtelle von Röhl berechnet. Bis zur ſechsten Decimalſtelle giebt eben dieſelben Böbert in ſeinen Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen S. 141 — 150. Auch Vega hat in ſeine logarithmiſchen und trigonometriſchen Tafeln B. II. S. 162 die Quadrat- und Cubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 100 aufgenommen. Hiervon kann die Tafel der Quadratwurzeln zur Anfertigung des Quadratmaßſtabes benutzt werden.

Die Tafel der Cubikwurzeln dient auf gleiche Weiſe zur Verfertigung eines Maßſtabes für ähnliche

Körper. Der Durchmeſſer einer Kugel z. B. ſey in 1000 Theile getheilt, ſo hält der Durchmeſſer einer doppelt ſo großen 1260 —; einer dreymahl ſo großen 1442 +; einer viermal ſo großen 1587 +; . . . der Durchmeſſer einer achtmahl ſo großen 2000 Theile.

Quadratwurzel und Quadratzahl ſind relative Begriffe. Jene iſt einer der beiden gleichen Factoren (rationalen oder irrationalen), worin ſich eine gegebene Zahl auflöſen läßt; eine Quadratzahl iſt eine Zahl, ſo fern ſie als ein Product aus zwey gleichen Factoren, den Wurzeln, gedacht wird. In Beziehung auf dieſe heißt ſie das Quadrat der Wurzelzahl.

1. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, verfährt man umgekehrt, wie bey der Syntheſis oder der Zuſammenſetzung des Quadrats aus den Theilen der Wurzel.

2. Eine Zahl werde erſtlich allgemein aus irgend welchen Theilen zuſammengeſetzt, nämlich

$$N = a + b + c + d + e + f + \ldots,$$

ſo beſteht ihr Quadrat aus den Quadraten jedes Theils und den doppelten Producten jedes der Theile in jeden andern. Denn da das Quadrat ein Product aus zwey gleichen Factoren iſt, ſo wird jeder Theil von N in jeden Theil von N multiplicirt. Sind die zu dem Partialproducte genommenen Factoren dieſelben, ſo iſt ihr Product nur einmahl vorhanden, wie aa, bb, cc, u. ſ. f. Sind die Factoren verſchieden, wie a, b, ſo entſtehen daraus zwey gleiche Producte, ab, ba. Die Form des Quadrats einer mehrtheiligen Zahl N iſt alſo

$$N^2 = \int aa + 2\int ab,$$

wo das vorgeſetzte Zeichen $\int$ die Summe aller ähnlichen Verbindungen bedeutet. S. Polynomiſcher Lehrſatz, §5. Enthält die Zahl N ſubtractive Theile, ſo werden die Producte aus zwey Theilen mit entgegengeſetzten Vorzeichen ſubtractiv. Th. I. S. 375. Th. II. S. 109.

3. Die Theile einer Zahl können zweytens auch

nach den Potenzen einer beliebigen Größe z geordnet werden,

$$N = az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} + dz^{m-3} + ez^{m-4} + \text{etc.}$$

wie es mit unſern Zahlen geſchieht, wenn z = 10 genommen wird. Die Reihe geht da in die Decimalbrüche über, wenn der Exponent von z negativ wird.

Es iſt nun

$$\begin{aligned} N^2 = aaz^{2m} & \\ + 2abz^{2m-1} & \\ + (2ac + bb)\, z^{2m-2} & \\ + (2ad + 2bc)\, z^{2m-3} & \\ + (2ae + 2bd + cc)\, z^{2m-4} & \\ + (2af + 2be + 2cd)\, z^{2m-5} & \\ + \text{etc.} & \end{aligned}$$

4. Exempel. Es ſey N = 478,35, ſo iſt m = 2; a = 4; b = 7 u. ſ. f. und das Quadrat von 478,35 iſt:

16....	
56...	
49..	
752	
64	
286	8...
	9..
4	783.
	25
228775	6755

Der Strich ſcheidet die Einer von den Decimaltheilen.

5. Um aus einer gegebenen Zahl, wie hier, 228775,6755, die Quadratwurzel zu ziehen, nimmt man die Theile nach einander weg, wie ſie hier zuſammengeſetzt ſind. Die Quadrate fangen mit der niedrigſten Ziffer in einer ungeraden Stelle an, von der Stelle der Einer an gerechnet, die doppelten Producte in einer geraden Stelle. Da in jedem Lehrbuche der Arithmetik darüber Unterricht ertheilt wird, ſo iſt es nicht nöthig, dieſen hier zu wiederholen.

6. Um eine irrationale Wurzel auf viele Stellen zu finden, muß man den binomiſchen Lehrſatz anwenden. Die gegebene Zahl N zerlege man in zwey Theile von der Form, $a^2 + b$ oder $a^2 - b$, wo man a ſo nahe an die Wurzel zu nehmen hat, als es vorläufig bequem angeht. Dazu ſind die Tafeln der Quadrate ganzer Zahlen behülflich. Es iſt (Binomiſcher Lehrſatz, 10 u. 13.)

$$(a^2+b)^{\frac{1}{2}} = a\Big[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a^2} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{b^2}{a^4} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{b^3}{a^6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{b^4}{a^8} + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{b^5}{a^{10}} - \frac{1.1..9}{2.4..12}\,\frac{b^6}{a^{12}} + \text{etc.}\Big]$$

Kann man den Bruch $\frac{b}{a^2}$ nicht klein genug machen, ſo ſetze man zu der aufgegebenen Zahl ein ſolches Quadrat als Factor hinzu, wodurch jener Bruch klein genug werde, und dividire hernach die gefundene Wurzel durch die Wurzel aus dem angewandten Multiplicator. Man mag auch b ſubtractiv nehmen, wenn dadurch a der Wurzel näher gebracht wird. Die Glieder der Reihe nach 1 ſind dann alle ſubtractiv.

7. Nach der Formel, daſ. 17. iſt

$$(a^2+b)^{\frac{1}{2}} = a\Big[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{(a^2+b)} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{b^2}{(a^2+b)^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{b^3}{(a^2+b)^3} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{b^4}{(a^2+b)^4} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{b^5}{(a^2+b)^5}\ \text{etc.}\Big]$$

Dieſe Reihe mag vorzüglich brauchbar ſeyn, wenn der Theil b gegen den a^2 ſich nicht klein genug nehmen läßt.

8. Stirling hat in ſeiner Erläuterung von Newtons Methodus differentialis eine, wie es ſcheint, we-

nig beachtetete und daher faſt unbekannte, Form des binomiſchen Lehrſatzes angegeben. Aus dieſer folgt:

$$(a^2 + b)^{\frac{1}{2}} = a \Big[1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4a^2 + 3b}{a^2 + b} \cdot \frac{b}{a^2}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{8a^2 + 5b}{(a^2 + b)^2} \cdot \frac{b^3}{a^4}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{12a^2 + 7b}{(a^2 + b)^3} \cdot \frac{b^5}{a^6}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \ldots 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \ldots 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} \cdot \frac{16a^2 + 9b}{(a^2 + b)^4} \cdot \frac{b^7}{a^8}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \ldots 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \ldots 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20} \cdot \frac{20a^2 + 11b}{(a^2 + b)^5} \cdot \frac{b^9}{a^{10}} - \text{etc.} \Big]$$

welche Reihe unter denſelben Umſtänden eine weit ſchnellere Convergenz gewährt, als jede der beiden vorigen.

9. Exempel. Aus der Zahl 12 die Quadratwurzel zu ziehen. Sie wird zur Berechnung des Umfanges eines Kreiſes aus dem Halbmeſſer gebraucht. Cyklotechnie, Th. I. S. 660. — Man multiplicire ſie durch 4, und ſuche die Wurzel aus 48 = 49 − 1, wo a = 7 b = − 1 iſt. Die Rechnung giebt

√ (49 − 1) = 7 [1 — 0,010204 081632 653 . .
— 0,. . . . 52 061640 983 . .
— 0,. . . . . . 531241 234 . .
— 0,. . . . . 6776 036 . .
— 0,. . . . . 96 801 . .
— 0,. . . . . 1 481 . .
— 0,. . . . . 24 . .
— etc.]

Daraus wird

$\sqrt{48} = 6{,}928\ 203\ 230\ 275\ 516 \ldots$

$\sqrt{12} = 3{,}464\ 101\ 615\ 137\ 758 \ldots$

Die letzte Ziffer iſt fehlerhaft, wegen der abgebrochenen Rechnung. In Sherwin's mathematical tables, wo √ 12 bis zur 72ſten Decimalſtelle angegeben iſt, iſt die 15te Ziffer 4.

10. Mit eben den berechneten Zahlen hat man auch die Quadratwurzel aus 50, da 50 = 49 + 1. Die Glieder der Reihe nach der Einheit ſind wechſelnd additiv und ſubtractiv, wie in der Formel ſelbſt. Es iſt

$\surd$ 50 = 7,071067 811865 484.

11. Nach der zweyten Formel (7.) iſt

$$\surd (49 + 1) = 7\,[1 + 0{,}01 \\ + 0{,}\ldots15 \\ + 0{,}\ldots\ldots25 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots4375 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots7875 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots14437 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots268\ldots \\ + \text{etc.}]$$

Das iſt,

$\surd$ 50 = 7,071067 811865 435 . .

Dieſe zweyte Rechnung müßte noch einen oder zwey Schritte mehr thun, um mit der erſten ganz überein zu ſtimmen. Beide ſind in den letzten Ziffern mangelhaft.

12. Die Formel in (8) giebt

$$\surd (49 - 1) = 7\,[1{,}\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \\ - 0{,}\ 010\ 257\ 227\ 891\ 156 \\ + 0{,}\ \ldots\ \ldots\ 546\ 545\ 547 \\ - 0{,}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ .43\ 608 \\ + 0{,}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ ..4]$$

wodurch

$\surd$ 48 = 6, 928 203 230 275 509

und $\surd$ 12 = 3, 464 101 615 137 754

wird. Man ſieht, daß hier nur durch faſt halb ſo viel Glieder, als in (9) doch eine eben ſo große, oder vielmehr größere, Genauigkeit erhalten iſt, als dort.

13. Die Wurzel aus 2 wird durch die Wurzel aus 50, die aus 3 durch die Wurzel aus 48 gleich gefunden, da 50 = 2 . 25, und 48 = 3 . 16 iſt. Die Wurzel aus 5 zu erhalten, ſuche man die $\surd$ 5 . 16 = $\surd$ 80 = $\surd$ (81 — 1). Ferner iſt $\surd$ 7 . 9 = $\surd$ 63 = $\surd$ (64—1); $\surd$ 11 . 9 = $\surd$ (100 — 1)

$\sqrt{13 \cdot 25} = \sqrt{(324 + 1)}$; $\sqrt{17 \cdot 64} = \sqrt{(1089 - 1)}$; $\sqrt{19 \cdot 196} = \sqrt{(3721 + 3)}$; u. ſ. f.

14. Eine abgekürzte, in allgemeinen Rechnungen brauchbare, Formel iſt

$$\sqrt{(a^2 + b)} = a\left(1 + \frac{2b}{4a^2 + b} + \frac{b^3}{32a^6}\right).$$

Exempel. Es iſt $48 = 49 - 1$, alſo nach dieſer Formel,

$$\sqrt{48} = 7\left(1 - \frac{2}{195} - \frac{1}{3764768}\right).$$

15. Das folgende Täfelchen zeigt die Reſte, welche das Quadrat einer ganzen Zahl bey der Diviſion durch 9 oder durch 11 läßt, zufolge des Reſtes, welchen die Wurzel giebt.

Reſte der Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reſte der Quadrate.	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1
	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Das Verzeichniß iſt behülflich, die in den Tafeln der Quadratzahlen angegebenen zu prüfen. Ein Fehler in einer einzelnen Ziffer wird durch jede der Proben immer entdeckt. S. Rechnungsprobe.

16. Die griechiſchen Mathematiker haben ſich früh mit der Aufgabe beſchäftigt, rechtwinklige Dreyecke anzugeben, deren Seiten ſich wie ganze Zahlen verhalten. Eine Regel, dergleichen zu finden, wird dem Pythagoras, eine andere dem Plato zugeſchrieben. Proklus führt ſie in ſeinem Commentar über das erſte Buch des Euklides, zum 47. S. an. Eine allgemeinere, jene beiden unter ſich enthaltende Regel hat Euklides in dem erſten Lehnſatze zum 30. S. des 10. Buchs ſeiner Elemente gegeben. Diophantus zeigt in ſeinen Arithmeticis, L. II. Qu. 8. und 9. wie eine gegebene Quadratzahl in zwey Quadrate von rationalen, wenn auch gebrochenen, Wurzeln zerlegt wird, zwar nur an einem einzelnen Falle, aber doch auf eine

Art, die ſich dem Verfahren in der neuen Analyſis nähert. Die Frage gehört in die unbeſtimmte Analytik, mag aber auch ganz ſchicklich hier ihre Auflöſung erhalten.

17. Die Aufgabe, analytiſch ausgedrückt, iſt, für die unbeſtimmte Gleichung.

$$xx + yy = zz,$$

die Formen der drey veränderlichen Größen anzugeben, wodurch, für jeden rationalen Werth der einen, die Werthe der beiden andern auch rational werden. Davon iſt die Auflöſung in ganzen Zahlen ein beſonderer Fall.

I. Es ſind, für ein gegebenes z, die Formen der rationalen Werthe von x und y zu finden. — Mit der Gleichung, $xx + yy = zz$, verbinde man eine vom erſten Grade, $mx + y = z$, in welcher der Werth von m kleiner als die Einheit iſt. Dieſe quadrirt iſt $m^2xx + 2mxy + yy = zz$. Aus beiden Gleichungen folgt die neue, $(1 - m^2)x = 2my$. Dieſe und die angenommene Gleichung geben:

$$x = \frac{2m}{1 + m^2} z; \quad y = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} z.$$

Die angenommene Gleichung vom erſten Grade kann auch ſeyn, $mx - y = z$, wo m größer als die Einheit iſt. Derſelbe Gang der Rechnung liefert:

$$x = \frac{2m}{m^2 + 1} z; \quad y = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} z.$$

Dieſe Werthe entſtehen aus jenen, wenn m mit $\frac{1}{m}$ vertauſcht und die gehörige Reduction vorgenommen wird.

Damit für ein ganzes z ganze Werthe von x und y Statt haben: muß entweder z oder 2 z ſelbſt oder aber ein Factor von z oder 2 z die Form $m^2 + 1$ haben, da dann für m der gehörige Werth genommen wird. Z. B. Es ſey $z = 15 = 3 . 5$. hier iſt $5 = 4 + 1$, alſo $m = 2$, und

$$x = \frac{2 \cdot 2}{4 + 1} \cdot 15 = 12; \quad y = \frac{4 - 1}{4 + 1} \cdot 15 = 9.$$

Es ſey $z = 39 = 3 \cdot 13$, und $2z = 3 \cdot 26$, wo 26 die Form $m^2 + 1$ hat. Dieſe giebt $m = 5$.

Dadurch wird erhalten:

$$x = \frac{2 \cdot 5}{25 + 1} \cdot 39 = 15; \quad y = \frac{24}{26} \cdot 39 = 36.$$

II. Für eine gegebene Kathete x werden die Formen der rationalen Werthe der andern Kathete y und der Hypotenuſe z unmittelbar aus den in I. für x und y gefundenen Formen hergeleitet. Es iſt

$$y = \frac{m^2 - 1}{2m} x; \quad z = \frac{m^2 + 1}{2m} x.$$

Für jeden ganzen Werth von x laſſen ſich die Werthe von y u. z immer in ganzen Zahlen angeben. Iſt x ungerade, ſo nehme man $m = x$; iſt x gerade, ſo iſt $m = \frac{1}{2} x$ oder $2m = x$ zu nehmen.

In dem erſten Falle iſt

$$y = \tfrac{1}{2}(xx - 1); \quad z = \tfrac{1}{2}(xx + 1).$$

In dem zweyten iſt

$$y = \tfrac{1}{4}(xx - 4); \quad z = {}^{1}(xx + 4).$$

Zum Exempel

x	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14
y	24,	15,	40,	24,	60,	35,	84,	48
z	25,	17,	41,	26,	61,	37,	85,	50

Die Erfindung der Regel für ein ungerades x wird dem Pythagoras zugeſchrieben; die für ein gerades x dem Plato.

Quadrat, magiſches, iſt ein in gleiche Fächer abgetheiltes Quadrat, worein die Glieder einer beliebigen arithmetiſchen Progreſſion ſo eingetragen ſind, daß ihre Summen, in jedem mit den Seiten parallelen Streifen und längs jeder Diagonale, gleich groß werden.

Zum Beyſpiel

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Die Zahl der Fächer an einer Seite heißt die Seitenzahl oder Wurzel des Quadrats, und man unterſcheidet hiernach magiſche Quadrate gerader und ungerader Seitenzahlen, die man auch wohl kurz gerade und ungerade Quadrate nennt.

1. Die magiſchen Quadrate ſind, außer dem etwa in der Steganographie möglichen Gebrauche, von keinem weitern Nutzen, als es jedes ſinnreiche und ſchwierige Räthſel iſt. Sie dienen zur Uebung des arithmetiſchen Geiſtes, und nur das Vergnügen der Auflöſung kann ſie intereſſant machen, je weniger man bey der erſten Betrachtung gleich einſieht, wie man, auch bey einer mäßigen Menge Zahlen, die verlangte Anordnung werde treffen können. Sie haben vermuthlich ihren Urſprung in Indien; denn La Loubere hat ihre Kenntniß in Oſtindien, beſonders in Surate, ſehr verbreitet gefunden. Von den Indiern mögen ſie zugleich mit den Zahlzeichen zu den Arabern, und von dieſen zu den Griechen und Occidentalen gekommen ſeyn. Ihre Benennung haben ſie ohne Zweifel von dem Gebrauche, den man ehemahls von dieſen künſtlichen Anordnungen einer Zahlenreihe als Talismanen machte. In dieſer Hinſicht waren die erſten ſieben magiſchen Quadrate, zu den Seitenzahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, deren Fächer mit der natürlichen Progreſſion beſetzt ſind, beſonders wichtig. Sie hießen Planetenſiegel, das von 3 insbeſondere Sigillum Saturni, und ſo die übrigen, nach der Folge der Planeten im Ptolemäiſchen Syſtem von oben herunter Sigilla Jovis, Martis, Solis, Veneris, Mercurii, Lunae. Von dieſem Gebrau-

che oder vielmehr Mißbrauche der magiſchen Quadrate handelt Kircher in ſeiner Arithmologia ausführlich. Schon in Indien, dem Lande ihrer Entſtehung, ſcheinen ſie auf ähnliche Weiſe angewandt worden zu ſeyn.

2. Emanuel Moſchopulos, der um 1400 lebte, iſt, ſo viel man weiß, der erſte, welcher über die magiſchen Quadrate geſchrieben hat. Sein Aufſatz darüber iſt im Manuſcripte auf der königlichen Bibliothek in Paris vorhanden. Unter den Abendländern wird Agrippa von Nettesheim († 1535) der erſte ſeyn, der der magiſchen Quadrate erwähnt in ſeinen Büchern de occulta philosophia. Von ihm lernte Bachet de Meziriac ſie kennen, und verſuchte die Regel ihrer Zuſammenſetzung zu entdecken, welches ihm auch bey den ungeraden Quadraten glückte, für welche er eine allgemeine Methode in ſeinen Problemes plaisants, 1613, bekannt machte, aber mit den geraden Quadraten kam er nicht zu Stande. Nach Bachet beſchäftigte ſich Arnaud mit den magiſchen Quadraten, und gab in den zuerſt 1667 zu Paris ohne ſeinen Namen erſchienenen Nouveaux Elemens de Géometrie eine Anweiſung, ſowohl ungerade als gerade magiſche Quadrate nach einer gleichförmigen Methode, nämlich durch Anſetzung von Einfaſſungen (enceintes) an dergleichen Quadrate von 9 und 16 Fächern zu bilden.

Frenicle, der durch ſeine Geſchicklichkeit, mit den verworrenſten Fragen der Arithmetik fertig zu werden, ausgezeichnet iſt, ging viel weiter als Bachet und Arnaud. Er lehrte nicht allein die nach der Methode des erſteren verfertigten magiſchen Quadrate ungerader Seitenzahlen auf mancherley Weiſe verändern, ſondern zeigte auch insbeſondere gegen Arnaud, welcher die Zahl der Veränderungen des magiſchen Quadrats von 4 auf 16 geſetzt hatte, daß ſolches 880 mahl verändert werden könne. Die durch Einfaſſungen gebildeten magiſchen Quadrate wies er auf eine viel allgemeinere Art als Arnaud zu verfertigen und zu verändern an. Und da die nach Arnauds Ver-

fahren conſtruirten magiſchen Quadrate die Eigenſchaft haben, daß man die Einfaſſungen von außen nach innen zu, ohne die magiſche Anordnung zu verletzen, nach und nach wegnehmen kann, ſo ſchränkte Frenicle, dem die Aufgabe unter dieſer Geſtalt noch nicht ſchwer genug war, die weg zu nehmenden Einfaſſungen auf eine oder mehrere beſtimmte ein. Ja er kehrte die Bedingung ſogar um: gewiſſe Einfaſſungen ſollten von dem magiſchen Quadrate unzertrennlich ſeyn, das heißt, das magiſche Quadrat ſollte aufhören, ein ſolches zu ſeyn, wenn jene Einfaſſungen weggenommen würden, es aber bleiben, wenn dies mit andern geſchähe. Seine Abhandlung über die magiſchen Quadrate iſt den Liebhabern dieſer Künſteleyen von de la Hire mitgetheilt worden, und befindet ſich in den Divers ouvrages de Mathematique et de Phyſique par Msrs de l'Ac. Roy. des Sc. Par. 1693, auch im zweyten Bande der ältern Abhandlungen der Pariſer Akademie.

Poignard, Canonicus zu Brüſſel, gab im J. 1703 eine Schrift über die magiſchen Quadrate heraus, die er, der dabey angebrachten neuen Kunſtſtücke wegen, ſublimes nennt. Dadurch ward de la Hire veranlaßt, zwey ausführliche Abhandlungen über dieſen geometriſch-arithmetiſchen Gegenſtand zu verfaſſen, welche in den Schriften der Akademie vom Jahre 1705 befindlich ſind. In dem Jahrgange derſelben von 1710 iſt ein Aufſatz von Sauveur enthalten, welcher die Vereinfachung und Verallgemeinerung der bis dahin bekannten Methoden zur Anfertigung der magiſchen Quadrate und die Vermehrung derſelben mit neuen zum Zweck hat. Der Aufſatz iſt aber ſehr unordentlich abgefaßt, und zum Theil nur Entwurf. Ein neues Verfahren für die Quadrate gerader Seitenzahlen wird in einer Abhandlung von Ons-en-Bray, welche in den Mém. vom J. 1750 ſteht, gelehrt. Die doppelt-geraden Quadrate werden nämlich aus mehreren magiſchen Partialquadraten, deren jedes 16 Fächer hat, zuſammengeſetzt; die einfach geraden aber aus einem Quadrate der vorigen Gattung, woran

an eine Einfaſſung magiſcher Art geſetzt wird. Noch ein Aufſatz über die Conſtruction der magiſchen Quadrate überhaupt von Rallier des Ourmes iſt in den vierten Band der Mém. presentés aufgenommen und mit vieler Klarheit und Präciſion geſchrieben.

Den deutſchen Rechenmeiſtern und Coſſiſten ſind die magiſchen Quadrate nicht unbekannt geblieben. Stifel handelt davon in ſeiner Arithmetica integra Lib. I. cap. 3. jedoch nicht unter der Benennung magiſcher Quadrate. Seine Methode iſt die der Einfaſſungen um ein Mittelquadrat von Einem Fache oder von ſechszehn Fächern. Er hat ſolche alſo früher als Arnaud und Frenicle angewandt; auch iſt ſein Verfahren einfacher und netter. Adam Rieſe lehrt in ſeinem 1550 in 4 gedruckten Rechenbuche S. 103 und folgg. die Verfertigung magiſcher Quadrate ungerader Seitenzahlen nach der erſten Regel von Moſchopulos, und theilt noch die Quadrate zu den Seitenzahlen 4, 6, 8, doch ohne ihre Conſtruction gehörig zu zeigen, mit. Nach Stifels und Rieſens Vorgange, haben die Rechenmeiſter des 17ten Jahrhunderts und der erſten Hälfte des 18ten, in ihren Rechenbüchern der magiſchen Quadrate größtentheils erwähnt, doch ſchränken ſie ſich mehrentheils auf die ungeraden, als welche am leichteſten zu verfertigen ſind, ein. Clausberg giebt zwar in ſeiner demonſtrativen Rechenkunſt §. 1505 die magiſchen Quadrate von 4, 6, 8, 10, aber keine Anleitung zu ihrer Conſtruction, welche nach Stifel, den er nicht nennt, ausgeführt iſt. Eine beſondere Schrift von Cornelius Capito, alle magiſche Quadrattafeln zu verfertigen und viele 100, 1000 ja millionenmahl zu verändern, Glückſtadt, 1767. 8. ſcheint wenig bekannt geworden, und unbenutzt geblieben zu ſeyn. Daher findet man in neueren deutſchen mathematiſchen Schriften wenig Unterricht über dieſen Gegenſtand. Denn was Vieth in dem Leipziger Magazine für reine und angewandte Mathematik Jahrg. 88. S. 228 und folgg. und Lorenz in ſeinem Lehrbegriffe der Syntaktik davon gelehrt haben, iſt unzureichend

und zum Theil mangelhaft. Ich habe deswegen in einer akademiſchen Gelegenheitsſchrift, welche auch in den Buchhandel gekommen iſt, die Conſtruction der magiſchen Quadrate etwas ausführlicher abgehandelt, und beſonders die Zuſammenſetzung derſelben aus Einfaſſungen und die Verfertigung der Quadrate gerader Seitenzahlen einfacher und leichter zu machen geſucht. Auf dieſe Schrift muß ich mich, der Kürze halben, wegen der Beweiſe und der weitern Ausführung beziehen, indem ich hier die Regeln zur Conſtruction magiſcher Quadrate bloß hiſtoriſch und zwar hauptſächlich nur ſolche mittheilen werde, welche zierliche und ſymmetriſche Anordnungen gewähren. Die Vorſchriften ſelbſt werden ſich auf jede beliebige arithmetiſche Progreſſion beziehen, zunächſt aber in den zur Erläuterung beygefügten Exempeln nur auf die natürliche Zahlenreihe angewandt werden.

I. Gewöhnliche magiſche Quadrate.

A. Ungerade.

3. Für die Conſtruction magiſcher Quadrate von ungeraden Seitenzahlen giebt es kein einfacheres Verfahren, als das der Inder zu Surate. Nach demſelben werden die auf einander folgenden Glieder der Progreſſion in die Fächer eingetragen, deren von der linken zur rechten aufwärts gehende Diagonalen eine einzige gerade Linie bilden, indem man beym Eintragen dieſer Richtung der Diagonalen folgt, d. i., von der linken zur rechten aufwärts ſteigt. Iſt man dabey in den erſten oder oberſten Horizontalſtreifen gekommen, ſo geht man mit dem nächſten Gliede der Progreſſion in das unterſte Fach des folgenden Verticalſtreifens über, ſo wie, wenn man in den letzten oder äußerſten Verticalſtreifen zur rechten gekommen iſt, man in das erſte Fach des nächſthöheren Horizontalſtreifens zurückgeht. Kommt man auf ein ſchon beſetztes Fach, welches eintrifft, wenn die Stellenzahl des zuletzt eingetragenen Gliedes der Seitenzahl des Quadrats

gleich, oder ein Vielfaches derſelben iſt, ſo ſetzt man das folgende Glied in das nächſte Fach unter dem zuletzt beſetzten. Das erſte Glied der Progreſſion, mit welchem der Anfang des Eintragens gemacht wird, kommt in das mittelſte Fach des oberſten oder erſten Horizontalſtreifens zu ſtehen.

Das nach dieſer Methode conſtruirte magiſche Quadrat zur Seitenzahl 7 fällt ſo aus

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

4. Moſchopulus lehrt in der oben (2) angeführten Schrift ein doppeltes Verfahren zur Conſtruction eines ungeraden magiſchen Quadrats. Das erſte, dem Verfahren der Inder ähnliche, iſt folgendes. Man trägt die Glieder der Progreſſion nach ihrer Folge in die Fächer ein, deren von der linken zur rechten abwärts gehende Diagonalen eine zuſammenhängende gerade Linie ausmachen, und zwar ſo, daß man beym Eintragen jener Richtung der Diagonalen nachgeht, oder von der linken zur rechten abwärts ſteigt. Von dem unterſten Fache eines Verticalſtreifens geht man in das oberſte des nächſten Streifens, und von dem letzten Fache eines Horizontalſtreifens in das erſte des nächſtfolgenden Streifens über. Verfällt man hierbey auf ein ſchon beſetztes Fach, welches geſchieht, wenn die Zahl der eingetragenen Glieder der Seitenzahl des Quadrats oder einem Vielfachen derſelben gleich iſt, ſo ſetzt man das einzutragende Glied in demſelben Verticalſtreifen zwey Fächer tiefer als das zuletzt eingetragene, und wenn es dadurch außerhalb des

Quadrats zu ſtehen käme, in das höchſte noch unbeſetzte Fach des Streifens. Den Anfang des Eintragens macht man mit dem erſten Gliede der Progreſſion, und ſetzt ſolches in das nächſte Fach unter dem mittelſten des ganzen Quadrats.

Nach Moſchopulos zweyter Methode geht man, wenn ein Fach mit einem Gliede der Progreſſion beſetzt iſt, mit dem nächſten Gliede allemal zwey Fächer tiefer und in den nächſten Verticalſtreifen. Hierbey ſind der erſte Vertical- und Horizontalſtreifen als die nächſten an den letzten und als an ſolche anſchließend zu betrachten. Kommt man hierdurch auf ein ſchon beſetztes Fach, welches auch hier geſchieht, wenn die Anzahl der eingetragenen Glieder ſo groß iſt, als die Seitenzahl des Quadrats oder ein Vielfaches derſelben, ſo ſetzt man das einzutragende Glied in demſelben Verticalſtreifen vier Fächer tiefer, als das zuletzt eingetragene, wobey man dem vorigen zufolge im Zählen der Fächer das erſte Fach des Streifens auf das letzte folgen läßt. Das erſte Glied der Progreſſion, womit das Eintragen anfängt, wird in das mittelſte Fach des erſten oder höchſten Horizontalſtreifens geſetzt.

Hiernach kommen die beiden folgenden Anordnungen des magiſchen Quadrats von 7

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4

In den nach der Methode der Inder und nach der erſten Regel von Moſchopulos conſtruirten magiſchen Quadraten

machen je zwey Glieder in Fächern, welche von dem mittelſten in der geraden Linie durch die Mitte der Fächer gleichweit abſtehen, zuſammengenommen das Doppelte des mittelſten Gliedes aus. Z. E. 48 + 2 = 2 . 25. Die nach der zweyten Regel von Moſchopulos angefertigten Quadrate, deren Seitenzahl eine Primzahl zu 3 iſt, haben die Eigenſchaft, daß auch je zwey einer Diagonale parallel laufende Reihen, deren Gliederanzahl ſo groß iſt, als die Seitenzahl des Quadrats, dieſelbe Summe mit den Horizontal-Vertical- und Diagonalreihen geben. So iſt in der zweyten der beyden vorigen Anordnungen 26 + 11 + 45 + 30 + 15 + 7 + 41 = 175 = 14 + 5 + 45 + 36 + 34 + 25 + 16. Etwas dem ähnliches hat unter derſelben Bedingung in den nach dem Verfahren der Inder conſtruirten Quadraten ſtatt, doch nur bey den Reihen, die der von der linken zur rechten abwärts gehenden Diagonale parallel ſind.

B. Gerade und zwar

a) Geradgerade.

5. Um ein magiſches Quadrat von einer doppelt geraden Seitenzahl, welche = 4m ſeyn mag, zu conſtruiren, formire man zuerſt das natürliche Quadrat, d. i. dasjenige, worein die Glieder der in das magiſche Quadrat zu bringenden Progreſſion nach der Ordnung eingetragen ſind. Man bezeichne ſowohl die horizontalen als verticalen Streifen deſſelben nach der Reihe durch daneben und darüber oder darunter geſetzte Zahlen 1, 2, 3....4m, ſo wird jedes Fach, ſo wie das in ihm befindliche Glied, durch die beiden Zahlen beſtimmt, welche anzeigen, die wie vielten in ihrer Ordnung die Streifen ſind, welchen das Fach gemeinſchaftlich iſt. Man kann dieſe Zahlen neben oder auch über einander ſchreiben, ſo daß die erſte oder untere den horizontalen Streifen, die andere oder obere aber den verticalen Streifen anzeigt. Wir werden dies aber im Folgenden nicht brauchen. Nun ſetze man die Zah-

len von 1 bis 2m in irgend welcher Ordnung man will in einer Columne unter einander, wobey es nicht nöthig iſt, ein anderes Anfangsglied als 1 zu wählen, und neben 1 in einer Zeile noch m der übrigen Glieder, als Anfangsglieder ſo vieler Columnen. Unter jedes Anfangsglied ſchreibe man die übrigen, wie ſie in der erſten Columne auf einander folgen, indem man das erſte Glied als auf das letzte folgend anſieht. Jeder Zahl der einzelnen Columnen füge man noch ihre Ergänzung zu 4m + 1 bey, und laſſe nun die Zahlen der erſten Columne Anzeiger der horizontalen Streifen, die der m übrigen aber Anzeiger der verticalen Streifen seyn, ſo werden durch die Verbindung jedes der beiden horizontalen Anzeiger einer Zeile mit jedem der nebenſtehenden verticalen Anzeiger, 4m Fächer oder Glieder des natürlichen Quadrats, überhaupt aber durch den ganzen Typus 8mm Fächer oder Glieder bezeichnet. Dieſe Glieder ſtreiche man in dem natürlichen Quadrate durch, und trage die übrigen in ein andres Quadrat von ſo viel Fächern, als das natürliche hat, und zwar in die ähnlich liegenden Fächer ein. In die leer gebliebenen Fächer nach der Reihe trage man die durchgeſtrichenen Glieder in umgekehrter Ordnung oder rückwärts geleſen ein, oder, welches daſſelbe iſt, man ſetze ſtatt jedes durchgeſtrichenen Gliedes ſeine Ergänzung zu der Summe der beiden äuſſerſten, d. i. zu 16mm + 1, ſo iſt das magiſche Quadrat fertig.

Das Verfahren zu erläutern dienen die beiden folgenden Schemata, wovon das erſte das natürliche Quadrat zur Seitenzahl 8, das andere das daraus nach der Formel

1, 8	2, 7	3, 6
2, 7	4, 5	1, 8
4, 5	3, 6	2, 7
3, 6	1, 8	4, 5

abgeleitete magiſche Quadrat iſt.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1)	1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	9	10	11	12	13	14	15	16
(3)	17	18	19	20	21	22	23	24
(4)	25	26	27	28	29	30	31	32
(5)	33	34	35	36	37	38	39	40
(6)	41	42	43	44	45	46	47	48
(7)	49	50	51	52	53	54	55	56
(8)	57	58	59	60	61	62	63	64

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

b) Ungeradgrade.

6. Man formire auch hier zuerſt das natürliche Quadrat, und bezeichne die Streifen deſſelben, wie in (5). Auch mache man hier einen Typus von 2 m + 1 Zeilen, wenn 4 m + 2 die Seitenzahl des Quadrats iſt, und von m + 2 Columnen, auf dieſelbe Weiſe, wie dort gezeigt iſt, nur daß man hier den Zahlen ihre Ergänzungen zu 4 m + 3 beyfügt. Die Glieder des natürlichen Quadrats, welche durch die Verbindung der Anzeiger der horizontalen Streifen in der erſten Columne mit den in derſelben Zeile befindlichen Anzeigern der verticalen Streifen in der letzten Columne beſtimmt werden, bezeichne man durch darunter geſetzte Puncte, und eben ſo

bezeichne man die Glieder, welche der Verbindung der horizontalen Anzeiger mit den verticalen der vorletzten Columne entſprechen, durch darüber geſetzte Puncte. Die übrigen durch den Typus beſtimmten Glieder des natürlichen Quadrats durchſtreiche man, ſo wird man in allem 8m + 4 unten punctirte, eben ſo viel oben punctirte und (8m + 4)(m — 1) durchgeſtrichene Glieder haben. Je vier punctirten Gliedern, welche zuſammengehören, $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ d. i., in zwey Streifen befindlich ſind, welche von den einander gegen über liegenden Seiten des Quadrats gleich weit abſtehen, gebe man in den gleichliegenden Fächern des magiſchen Quadrats, wenn ſie oben punctirt ſind, dieſe Stellung $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ a & b \end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix}$; ſind ſie aber unten punctirt, dieſe $\begin{pmatrix} \beta & a \\ b & \alpha \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} b & \alpha \\ a & \beta \end{pmatrix}$. Man kann auch die letzte Stellungsänderung bey den oben punctirten Gliedern, und die erſte bey den unten punctirten anbringen. Mit den übrigen Gliedern, den durchgeſtrichenen und den gar nicht bezeichneten, verfahre man nach der Anweiſung in (5), ſo erhält man ein magiſches Quadrat.

Zur Erläuterung dieſer Vorſchriften folgen hier die magiſchen Quadrate von 6 und von 10. Erſteres iſt nach der Formel

1,6	2,5	3,4
2,5	3,4	1,6
3,4	1,6	2,5

letzteres nach dieſer

1,10	2, 9	4, 7	5, 6
2, 9	3 8	5, 6	1,10
3, 8	4, 7	1,10	2, 9
4, 7	5, 6	2, 9	3, 8
5, 6	1,10	3, 8	4, 7

conſtruirt. Bey den punctirten Gliedern ſind die zu⸗ erſt angegebenen Veränderungen der Stellung gewählt worden.

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

1	99	3	97	96	5	94	8	92	10
90	12	88	14	86	85	17	83	19	11
80	79	23	77	25	26	74	28	22	71
31	69	68	34	66	65	37	33	62	40
60	42	58	57	45	46	44	53	49	51
50	52	43	47	55	56	54	48	59	41
61	32	38	64	36	35	67	63	39	70
21	29	73	27	75	76	24	78	72	30
20	82	18	84	15	16	87	13	8	81
91	9	93	4	6	95	7	98	2	100

Es bedarf übrigens wohl kaum einer Erinnerung, daß man ſtatt des Durchſtreichens und Punctirens jede an⸗ dere Art die durch die Formel angedeuteten Glieder zu be⸗ zeichnen und zu unterſcheiden gebrauchen könne.

7. Die bisher (3 ⸗ 6) vorgetragenen Methoden zur Conſtruction magiſcher Quadrate laſſen eine merk⸗ würdige Erweiterung zu. Darüber ſehe man die oben (2) angeführte Commentatio de quadratis magicis, art. 47.

8. Eine ſinnreiche, einfache, und dabey doch ſehr

allgemeine Methode zur Conſtruction magiſcher Quadrate, welche hier noch eine kurze Erklärung verdient, iſt die von Poignard und de la Hire. Nach dieſer formirt man zuerſt zwey Hülfsquadrate, deren jedes für ſich magiſch, aber leicht conſtruirbar iſt, aus welchen dann das verlangte magiſche Quadrat zuſammengeſetzt wird. Die leichte Anfertigung der Hülfsquadrate hängt davon ab, daß jedes nur ſo viel verſchiedene Glieder enthält, als die Seitenzahl Einheiten hat, und daß dieſe Glieder in den verſchiedenen Streifen wiederhohlt werden. Zu dem einem dieſer Quadrate werden die erſten Glieder der in das magiſche Quadrat einzutragenden Progreſſion in der gehörigen Anzahl genommen, zu dem andern kommen die Vielfachen von dem Producte der Seitenzahl in die Differenz der Progreſſion nach der Reihe, o nicht ausgeſchloſſen. Iſt nun die Seitenzahl ungerade, ſo trägt man die Glieder jedes Hülfsquadrats in die Fächer des erſten oder höchſten Horizontalſtreifens eines jeden in einer beliebigen Folge ein, und füllt die noch leeren Fächer des erſten Verticalſtreifens beider Quadrate nach der Reihe dadurch aus, das man die Glieder des erſten Horizontalſtreifens, von dem erſten anzufangen, nach einer für beide Quadrate verſchiedene Zahl, welche größer als 2, und um eins vermindert eine Primzahl zu der Seitenzahl des Quadrats läßt, abzählt, indem man das erſte Glied als an das letzte anſchließend betrachtet, und jedesmahl das Glied, wobey eine Zählung ſich endigt und eine neue ſich anfängt, in den erſten Verticalſtreifen ſetzt. Neben jedes Glied ſetzt man die übrigen in derſelben Ordnung, wie in dem erſten Horizontalſtreifen, wobey wieder das erſte als auf das letzte folgend angeſehen wird. Sind auf dieſe Weiſe alle Horizontalſtreifen angefüllt, ſo darf man nur ein Quadrat machen, in welchem jedes Glied eines Faches die Summe der Glieder in den gleichliegenden Fächern der beiden Hülfsquadrate iſt, ſo entſteht ein magiſches Quadrat, welches die gegebene Progreſſion in ſeinen Fächern enthält.

Beyſpiel. Für das magiſche Quadrat zur Seitenzahl 5 mit der natürlichen Progreſſion ſind die Glieder des erſten Hülfsquadrats 1, 2, 3, 4, 5; die des andern 0, 5, 10, 15, 20. Setzt man jene in der Folge 5, 1, 2, 3, 4; dieſe ſo: 15, 10, 20, 0, 5 in die erſten Horizontalſtreifen, ſo entſtehen, wenn man jene nach 3, dieſe nach 4 abzählt, die folgenden beiden Hülfsquadrate

5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3
1	2	3	4	5
3	4	5	1	2

15	10	20	0	5
0	5	15	10	20
10	20	0	5	15
5	15	10	20	0
20	0	5	15	10

Aus beiden kommt dieſes magiſche Quadrat von 5:

20	11	22	3	9
2	8	19	15	21
14	25	1	7	18
6	17	13	24	5
23	4	10	16	12

Der Grund, warum die Abzählung nach einer größern Zahl als 2 geſchehen muß, iſt, die Wiederhohlung des in dem letzten Fache des erſten Horizontalſtreifens befindlichen Gliedes in der einen Diagonale zu vermeiden. Darum darf man auch nicht nach der Seitenzahl abzählen, es ſey denn, daß das mittlere Glied in dem erſten oder letzten Fache, ſich befindet, bey welchem die Wiederhohlung allerdings geſtattet iſt, wie dieſe beiden Hülfsquadrate zeigen.

1	5	4	2	3
5	4	2	3	1
4	2	3	1	5
2	3	1	5	4
3	1	5	4	2

10	0	15	20	5
5	10	0	15	20
20	5	20	0	15
15	20	5	10	0
0	15	20	5	10

wo in dem erſten Quadrate die Summe der Diagonale, welche bloß das Glied 3 enthält, auch 15, wie die der übrigen Reihen, iſt. In dem andern giebt die Diagonale mit dem Gliede 10 zur Summe 50, gleich den andern Reihen.

Daß die um 1 verminderte Zahl, nach welcher man abzählt, eine Primzahl zu der Seitenzahl ſey, iſt nöthig, damit nicht in demſelben Verticalſtreifen einerley Glied mehrmahl zu ſtehen komme. Übrigens erhellt die magiſche Beſchaffenheit der Hülfsquadrate aus ihrer Conſtruction ſelbſt, nach welcher alle Reihen dieſelben Glieder enthalten. Dieſe Beſchaffenheit bleibt auch in dem daraus zuſammengeſetzten Quadrate, in welchem, wegen der verſchiedenen Abzählungen in den Hülfsquadraten, kein Glied der Progreſſion wiederhohlt werden kann.

9. Da die von de la Hire vorgeſchriebene Methode zur Conſtruction gerader magiſcher Quadrate kaum andere Anordnungen liefern möchte, als das im Vorhergehenden angegebene und gehörig erweiterte Verfahren, ſo verweiſe ich die Liebhaber derentwegen auf de la Hire's Aufſatz ſelbſt, zumahl da es nach dem bisherigen nicht ſchwer ſeyn dürfte, auch ohne denſelben jene Methode mit Zuziehung der obigen Quadrate von 6, 8 und 10 zu entwickeln.

II. Magiſche Quadrate mit magiſchen Einfaſſungen.

10. So können diejenigen magiſchen Quadrate heißen, von welchen man eine oder mehrere der äußern

Einfaſſungen wegnehmen kann, ohne daß das übrig bleibende Quadrat aufhört magiſch zu ſeyn. Dergleichen iſt das hier beygefügte Quadrat von 7.

4	49	48	47	8	9	10
5	15	37	36	18	19	45
6	16	22	29	24	34	44
43	33	27	25	23	17	7
39	30	26	21	28	20	11
38	31	13	14	32	35	12
40	1	2	3	42	41	46

Nimmt man hier die äußerſte Einfaſſung, welche die Glieder 1, 2, 3 . . . 12, und 38, 39, 40 . . . 49 in ihren Fächern enthält, weg, ſo bleibt ein magiſches Quadrat von 25 Fächern übrig. Wird auch von dieſem die Einfaſſung mit den Gliedern 13, 14 . . . 20 und 30, 31 . . . . . 37 weggenommen, ſo bleibt ein neunfächeriges magiſches Quadrat übrig. Und nimmt man endlich auch von dieſem die Einfaſſung mit den Gliedern 21, 22, 23, 24 und 26, 27, 28, 29 weg, ſo bleibt das einfächerige Quadrat mit dem Gliede 25 übrig, welches die Mitte des ganzen Quadrats bildet, und gleichfalls als ein magiſches anzuſehen iſt.

11. An jeder Einfaſſung kommen vier Streifen, zwey horizontale und zwey verticale, vor, wovon je zwey zuſammenſtoßende ein *Eckfach* gemeinſchaftlich haben. Die zwiſchen den Eckfächern liegenden Fächer können kurz *Zwiſchenfächer* heißen. Iſt die Zahl der Fächer eines Streifens ungerade, ſo giebt es ein mittelſtes Fach. Die Fächer ſelbſt werden in den horizontalen Streifen von der linken zur rechten, in den verticalen von oben nach unten gezählt werden. Jedes Eckfach wird zweymahl gezählt; es kann z. B. das letzte in einem Vertical- und das erſte in einem Horizontalſtreifen ſeyn. Die Einfaſſungen wollen wir, wenn nicht das Gegen-

theil erinnert wird, von außen nach innen zu zählen, ſo daß die äußerſte die erſte und die innerſte die letzte iſt. Dieſes vorausgeſetzt, läßt ſich nun die Conſtruction der hier betrachteten magiſchen Quadrate zeigen.

A. Ungerade.

12. Man unterſcheide kleinere und größere Glieder der in das magiſche Quadrat einzutragenden Progreſſion. Jene ſind kleiner, dieſe größer als das mittlere Glied, oder als die halbe Summe der beiden äußerſten Glieder. Ferner nenne man Ergänzungsglieder diejenigen, welche von den äußerſten gleich weit abſtehen, deren Summe alſo ſo groß als das doppelte mittlere Glied oder als die Summe der beiden äußerſten iſt. Iſt nun die Seitenzahl des Quadrats $= 2n + 1$, ſo iſt die Anzahl der kleinern Glieder $= 2nn + 2n$. Von dieſen kommen die $4n$ erſten auf die erſte Einfaſſung, die $4n - 4$ folgenden auf die zweyte, die $4n - 8$ nächſten auf die dritte u. ſ. w., auf jede folgende Einfaſſung 4 weniger, als auf die nächſtvorhergehende, bis ſie alle unter die n Einfaſſungen vertheilt ſind.

Aus den für jede Einfaſſung beſtimmten, der Ordnung nach auf einander folgenden kleineren Gliedern mache man vier Abtheilungen, jede von gleich vielen derſelben, und trage die Glieder der erſten Abtheilung in die erſten Zwiſchenfächer des unteren Horizontalſtreifens der Einfaſſung bis zum Mittelfache, dieſes mit eingeſchloſſen, ein. Das erſte Glied der zweyten Abtheilung kommt in das obere Eckfach des vorderen Verticalſtreifens (des zur linken) zu ſtehen, die übrigen in die darauf folgenden Zwiſchenfächer bis zum Mittelfache, doch ohne dieſes. Das erſte Glied der dritten Abtheilung ſetze man in das Mittelfach des hintern Verticalſtreifens (desjenigen zur rechten), die übrigen aber in die auf das Mittelfach folgenden Zwiſchenfächer des oberen Horizontalſtreifens. Endlich trage man das erſte Glied der vierten und letzten Abtheilung in das obere Eckfach des hinteren Verticalſtreifens,

die andern aber in die auf das Mittelfach folgenden Zwiſchenfächer deſſelben ein, ſo iſt die Vertheilung der kleineren Glieder geſchehen. Jedem kleineren Gliede ſetze man, welches ohne Rechnung, durch eine aus zwey Reihen beſtehende Liſte der kleineren und größeren Glieder, worin dieſelben gehörig unter einander ſtehen, geſchehen kann, ſein Ergänzungsglied gerade oder ins Kreuz gegenüber, je nachdem das kleinere Glied in einem Zwiſchen- oder Eckfache befindlich iſt, ſo iſt auch die Vertheilung der auf die Einfaſſung kommenden größeren Glieder gemacht. Man kann dieſe aber auch ganz ſo wie die kleineren Glieder, nur in umgekehrter Ordnung, eintragen. Sind auf dieſe Weiſe alle Einfaſſungen beſetzt, ſo trage man noch das mittlere Glied der Progreſſion in das mittelſte Fach des ganzen Quadrats ein, ſo iſt das magiſche Quadrat fertig.

Das obige Quadrat von 7 kann dieſen Vorſchriften zur Erläuterung dienen. Die Liſten der Glieder ſind

für die erſte Einfaſſung

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38

für die zweyte

13	14	15	16	17	18	19	20
37	36	35	34	33	32	31	30

für die dritte und letzte

21	22	23	24
29	28	27	26

Die letzte Einfaſſung enthält außer dem Mittelfache jedes Streifens weiter keine Zwiſchenfächer; in jeder Abtheilung der kleineren Glieder für dieſelbe befindet ſich aber auch nur ein Glied.

Übrigens können die kleineren Glieder, welche in die Zwiſchenfächer eines Streifens zu ſtehen kommen, in dieſelben beliebig, und in welcher Ordnung man will, vertheilt werden, wenn man nur immer das gleich-

liegende Fach des gegenüber liegenden Streifens für das Ergänzungsglied offen läßt.

B. Gerade.

13. Bey dieſen giebt es kein mittelſtes Fach des ganzen Quadrats, aber auch kein mittleres Glied der Progreſſion. Die Stelle des Mittelfachs vertritt ein ſechszehnfächeriges Quadrat. In den Einfaſſungen fallen ebenfalls die Mittelfächer weg, und es giebt bloß Zwiſchenfächer. Der Unterſchied zwiſchen größern und kleinern Gliedern bleibt. Wenn 2 n die Seitenzahl des Quadrats oder der äußerſten Einfaſſung iſt, ſo kommen auf die erſte Einfaſſung die erſten 4 n — 2 kleineren Glieder der Progreſſion, auf die zweyte die folgenden 4n — 6, auf die dritte die nächſten 4 n — 10 u. ſ. w., auf die letzte endlich, welche das ſechszehnfächerige Quadrat zunächſt umgiebt, die 10 letzten kleineren Glieder, außer acht, welche in das innere Quadrat von 16 Fächern vertheilt werden. Die Conſtruction der Einfaſſungen iſt verſchieden, je nachdem die Fächerzahl derſelben durch 4 oder 8 theilbar iſt.

14. Iſt die Fächerzahl der Einfaſſung bloß ein Geviertes, ſo theile man die ganze Reihe der in die Einfaſſung zu bringenden kleineren Glieder in zwey Hälften, und trage die Glieder der erſten Hälfte, mit Ausſchluß der beiden letzten, in die Fächer der beiden Horizontalſtreifen folgendergeſtalt ein. Das erſte Glied ſetze man in das erſte oder vordere Eckfach des oberen Streifens, die beiden folgenden in die beiden erſten Zwiſchenfächer des untern, die beiden nächſten in das dritte und vierte Zwiſchenfach des obern, und ſo fahre man mit dem Eintragen der Glieder fort, indem man ſie immer paarweiſe, und mit den Streifen abwechſelnd, ſo in die auf einander folgenden Fächer derſelben einträgt, daß bloß diejenigen Fächer eines Streifens leer bleiben, denen in dem andern beſetzte Fächer gerade gegenüber liegen. Endlich ſetze man das vorletzte Glied der erſten Hälfte in das erſte Zwi-

Zwiſchenfach des Verticalſtreifens zur rechten, das letzte Glied aber in das letzte Zwiſchenfach des oberen Horizontalſtreifens. Mit den Gliedern der zweyten Hälfte verfahre man ſo. Das erſte ſetze man in das letzte oder hintere Eckfach des oberen, das zweyte in das vorletzte Zwiſchenfach des unteren Horizontalſtreifens, das dritte kommt in das zweyte Zwiſchenfach des Verticalſtreifens zur linken zu ſtehen, die übrigen, bis auf die beiden letzten, werden Paarweiſe, die beiden letzten einzeln, in die unbeſetzten Zwiſchenfächer der beiden Verticalſtreifen, indem man von dem dritten Fache des Verticalſtreifens zur rechten anfängt, auf die eben beſchriebene Art eingetragen.

15. Läßt ſich die Fächerzahl der Einfaſſung durch 8 theilen, ſo theile man wieder die ganze Reihe der kleineren Glieder, welche in dieſelbe kommen ſollen, in ihre beiden Hälften, und trage die Glieder der erſten Hälfte, keins ausgenommen, in die beiden Horizontalſtreifen auf die Art ein, wie die Glieder der erſten Hälfte ohne zwey in die in (14) betrachteten Einfaſſungen eingetragen werden. Die beiden letzten Glieder kommen dabey in die beiden letzten Zwiſchenfächer des untern Horizontalſtreifens zu ſtehen. Die Glieder der zweyten Hälfte werden in die beiden Verticalſtreifen, indem man von oben in dem Verticalſtreifen zur rechten anfängt, eben ſo, wie die Glieder der erſten in die Horizontalſtreifen, eingetragen, nur mit der Ausnahme, daß man die beiden erſten Glieder, welche paarweiſe eingetragen werden, das zweyte und dritte Glied der ganzen Reihe nämlich, ſogleich unter das erſte ſetzt, und das (4p + 4)te und (4p + 5)te Glied, wo p aus der Gliederanzahl der zweyten Hälfte 8p + 3 oder 8p + 7 zu beſtimmen iſt, einzeln, ſonſt aber in der Ordnung mit den übrigen Gliedern einträgt.

16. Sind die kleineren Glieder auf die eine oder andere Art in eine Einfaſſung eingetragen, ſo werden die leer gebliebenen Fächer mit den größeren Glieden eben ſo wie bey den ungeraden Quadraten, nach der Anweiſung in (12) ausgefüllt. Es iſt nun zur Vollendung des

ganzen Quadrats bloß noch die Conſtruction des innern ſechszehnfächerigen Quadrats übrig, welche, da die acht größern Gliedern deſſelben unmittelbar auf die acht kleineren in der Progreſſion folgen, nach (5) ausgeführt wird. Oder man ordne, um die Anfertigung des Typus zu erſparen, wenn a, b, c, d, e, f, g, h die kleineren Glieder in der gehörigen Folge, und A, B, C, D, E, F, G, H ihre Ergänzungsglieder ſind, ſo daß die in das innere Quadrat zu bringende Progreſſion a, b, ... g, h, H, G, ... B, A iſt, dieſe Glieder auf eine dieſer beiden Arten zu einem magiſchen Quadrate

a	B	C	d
E	f	g	H
h	G	F	e
D	c	b	A

a	d	B	C
A	D	b	c
G	F	h	e
g	f	H	E

ſo iſt das aus demſelben und aus den Einfaſſungen zuſammengeſetzte Totalquadrat gleichfalls magiſch.

Hier iſt als Exempel zur Erläuterung das magiſche Quadrat von 8, welches man mit der in (5) gegebenen Anordnung vergleichen kann.

1	63	62	4	5	59	58	8
16	15	49	48	44	19	20	9
55	47	25	28	39	38	18	10
11	22	40	37	26	2	43	54
53	42	34	35	32	29	23	12
13	24	31	30	33	36	41	52
14	45	16	17	21	46	50	51
57	2	3	61	60	[illegible]	7	4

Nimmt man hier die äußere Einfaſſung weg, und vermindert jedes Glied in dem übrigbleibenden Quadrate um 14, ſo hat man ein magiſches Quadrat der Sei-

tenzahl 6. Auf dieſe Weiſe enthalten alſo die Quadrate dieſer Art alle magiſche Quadrate kleinerer Seitenzahlen in ſich.

17. Man kann die Vertheilung der kleineren Glieder in die Einfaſſungen und in das innere Quadrat auch anders machen, und überhaupt noch mancherley Veränderungen bey den aus Einfaſſungen gebildeten Quadraten anbringen. Darüber ſehe man die angeführte Diſſertation.

III. Magiſche Quadrate mit ſymmetriſchen Abtheilungen.

18. Es wird an ein Paar Beyſpielen ſich die Beſchaffenheit und die Conſtruction dieſer Quadrate am beſten zeigen laſſen. Zuerſt ein ungerades, das von der Seitenzahl 9.

Man denke ſich dieſes Quadrat in 9 neunfächerige Quadrate, deren jedes für ſich magiſch iſt, zerlegt, und es ſeyn a, b, c . . . . h, k die mittleren Glieder dieſer Quadrate, welche ſich in den mittelſten Fächern derſelben befinden, in dieſe Ordnung geſtellt

a	b	c
d	e	f
g	h	k

In jedem der Partialquadrate iſt die Reihenſumme 3 mahl ſo groß als das mittlere Glied. Soll alſo das Totalquadrat magiſch ſeyn, ſo muß

$$3a + 3b + 3c = 3a + 3e + 3k$$
$$= 3a + 3d + 3g \text{ u. ſ. w.}$$

oder

$$a + b + c = a + e + k$$
$$= a + d + g \text{ u. ſ. w.}$$

ſeyn, d. i., die mittleren Glieder der Partialquadrate müſſen für ſich ein magiſches Quadrat geben. Man theile nun die ganze Reihe der in das Totalquadrat zu bringenden Glieder 1, 2, 3 . . . . 81 in 9 Progreſſionen ab, welche ſind

1,	2	. . . .	5	. . . .	8,	9
10,	11	. . . .	14	. . . .	17,	18
.	.		.			
.	.		.			
.	.		.			
.	.		.			
.	.		.			
.	.		.			
73	74	. . . .	77	. . . .	80,	81

ſo bilden die mittleren Glieder derſelben 5, 14 . . . . . 77 gleichfalls eine arithmetiſche Progreſſion, ſind alſo der magiſchen Anordnung fähig, und das aus ihnen nach der Methode der Inder formirte magiſche Quadrat iſt

68	5	50
23	41	59
32	77	14

Da jetzt die mittleren Glieder der Partialquadrate beſtimmt ſind, ſo iſt es leicht die Fächer, welche das mittelſte in jedem Quadrate umgeben, mit den zu jedem mittleren Gliede gehörigen übrigen Gliedern der einzelnen Progreſſionen auszufüllen, da denn das nachſtehende Quadrat ſich ergiebt.

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

Es iſt leicht zu ſehen, daß, wenn eins der Partialquadrate conſtruirt iſt, die übrigen bloß durch Vermehrung oder Verminderung ſeiner Glieder formirt werden können.

19. Für die Conſtruction der geraden Quadrate obiger Art iſt noch zu bemerken, daß die in (16) mitgetheilten, aus den Gliedern a, b, c, ... h und A, B, C . . . . H gebildeten Quadrate auch dann noch magiſch ſind, wenn nur a, b, c, d arithmetiſch proportional, und e, f, g, h nach der Ordnung um gleichviel größer oder kleiner, A, B . . . . . H aber beziehungsweiſe die Ergänzungen von a, b . . . . . h zu derſelben Zahl ſind. Die Reihenſumme in dem magiſchen Quadrate iſt alsdann 2 (A + a) = 2 (B + b) u. ſ. w. So geben die Zahlen 1, 2, 3 . . . . 16 in dieſe Ordnung gebracht,

1	9	5	13
3	11	7	15
2	10	6	14
4	12	8	16

wo die angezeigten Bedingungen Statt haben, die magiſchen Anordnungen

1	8	12	13
14	11	7	2
15	10	6	3
4	5	9	16

1	13	8	12
16	14	9	5
10	6	15	3
7	11	2	14

20. Um jetzt das magiſche Quadrat von 8 aus vier Partialquadraten zuſammenzuſetzen, theile man die ganze Reihe der kleineren Glieder von 1 bis 32 in 8 Tetraden, und nehme zu jedem der Partialquadrate zwey derſelben, welche man will. Man füge ihnen noch die größeren Glieder, welche ſie zu 65 ergänzen, bey, ſo wird die Reihenſumme in jedem der Partialquadrate 2 . 65 oder 130, alſo in dem aus demſelben gebildeten Totalquadrate 260 ſeyn, wie erfordert wird.

Sind z. E. die kleineren Glieder für das erſte Quadrat

1, 2, 3, 4
21, 22, 23, 24

für das zweyte

5, 6, 7, 8
29, 30, 31, 32

für das dritte

13, 14, 15, 16
25, 26, 27, 28

für das vierte

9, 10, 11, 12
17, 18, 19, 20

ſo entſteht folgendes Totalquadrat

1	4	63	62	5	8	59	58
64	61	2	3	60	57	6	7
42	43	24	21	34	35	32	29
23	22	41	44	31	30	33	36
13	16	51	50	9	12	55	54
52	49	14	15	56	53	10	11
38	39	28	25	46	47	20	17
27	26	37	40	19	18	45	48

21. Man ſieht aus den bisherigen Beyſpielen, daß ſich nur die Quadrate zuſammengeſetzter Seitenzahlen, die einfach geraden ausgenommen, auf dieſe Weiſe zuſammen ſetzen laſſen. Je mehr Factoren die Seitenzahl hat, deſto mannichfaltiger iſt die Zuſammenſetzung. Das Quadrat von 12 läßt ſich z. B. zuſammenſetzen 1) aus 4 Quadraten von 36 Fächern; 2) aus 9 Quadraten von 16 Fächern mit einerley oder verſchiedenen Reihenſummen; 3) aus 16 Quadraten von 9 Fächern. Nimmt man die Reihenſummen der Partialquadrate alle gleich, wie in dem letzten Exempel, ſo giebt das eine ſehr einfache

und doch großer Abänderungen fähige Conſtruction der doppelt geraden Quadrate. Daß die einfach geraden ſich auf dieſe Weiſe nicht zuſammenſetzen laſſen, erhellt daraus, daß es kein vierfelderiges magiſches Quadrat giebt. Man kann dieſe Quadrate aber immer, wenn ihre Seitenzahl größer iſt als 6, aus einem Quadrate der vorigen Gattung, um welches eine Einfaſſung magiſcher Art geſetzt wird, bilden. Davon ſtehe hier noch ein Exempel an dem magiſchen Quadrate zur Seitenzahl 10.

1	99	98	4	5	95	94	90	9	10
93	19	22	81	80	27	30	73	72	8
12	82	79	20	21	74	71	28	29	89
88	76	77	26	23	68	69	34	31	13
87	25	24	75	78	33	32	67	70	14
15	35	38	65	64	43	46	57	56	86
16	66	63	36	37	58	55	44	45	85
84	60	61	42	39	52	53	50	47	17
18	41	40	59	62	49	48	51	54	83
91	2	3	97	96	6	7	11	92	100

Veränderungen der magiſchen Quadrate.

22. Das magiſche Quadrat zur Seitenzahl 3 läßt nicht mehr als eine Anordnung zu, welches ſo erhellt. Die Reihenſumme dieſes Quadrats iſt 15, und dieſe läßt ſich nur auf achterley Weiſe aus je dreyen der Elemente 1, 2, 3 . . . . . 9, ohne eins zu wiederhohlen, zuſammenſetzen. Es iſt nämlich $15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 2 + 5 + 8 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6$. Unter dieſen acht gleichen Summen ſind nur vier, welche in die Diagonalen und Mittelſtreifen geſetzt werden können, nämlich dieſe $1 + 5 + 9$,

2 + 5 + 8, 3 + 5 + 7, 4 + 5 + 6, denen das Glied 5 gemeinſchaftlich iſt. Da die Diagonalen mit jedem Streifen ein Glied gemeinſchaftlich haben, ſo dienen von jenen vier Summen bloß die beiden 2 + 5 + 8, 4 + 5 + 6, welche mit jeder der vier Summen 1 + 6 + 8, 2 + 4 + 9, 2 + 6 + 7, 3 + 4 + 8 ein Glied gemein haben, in die Diagonalen, folglich bilden die beiden andern 1 + 5 + 9 und 3 + 5 + 7 die Mittelſtreifen. Das Glied 5 kommt alſo in das mittelſte Fach des ganzen Quadrats die Glieder 2, 4, 6 und 8 aber in die Eckfächer zu ſtehen. Durch die Stellung der Glieder in den Eckfächern werden die Glieder in den Zwiſchenfächern beſtimmt, ſo daß 9 zwiſchen 2 und 4, 7 zwiſchen 2 und 6, 3 zwiſchen 4 und 8, und 1 zwiſchen 6 und 8 zu ſtehen kommt. Deswegen bleibt in den horizontalen und verticalen Streifen ſowohl als längs den Diagonalen immer dieſelbe Verbindung von Zahlen, wie auch ihre Stellung ſonſt ſich ändern mag, welches aber für keine weſentliche Veränderung zu rechnen iſt.

23. Mit dem Quadrate von 4 verhält es ſich ſchon anders. Die Reihenſumme in demſelben iſt 34, welche auf 86erley Arten aus je vier von den Elementen 1, 2, 3 . . . . 16 ſich zuſammenſetzen läßt, ſo daß keins derſelben wiederhohlt wird. Das magiſche Quadrat von 4 erfordert nur 10 ſolcher Zuſammenſetzungen, von denen vier unter ſich kein Element, mit jeder der übrigen ſechs aber ein Glied gemeinſchaftlich haben müſſen. Es läßt ſich bey der verhältnißmäßig großen Anzahl möglicher Zuſammenſetzungen gegen diejenige der erforderlichen erwarten, daß der Forderung auf eine vielfache Weiſe Genüge geſchehen kann. Wirklich hat auch Frenicle, wie oben angeführt iſt, 880 verſchiedene Anordnungen des magiſchen Quadrats von 4 geliefert.

24. Bey den Quadraten höherer Seitenzahlen wird die Anzahl der möglichen Veränderungen noch größer. Ein einziges Quadrat von 6, beſtehend aus einem innern ſechszehnfächerigen magiſchen Quadrate und einer

magiſchen Einfaſſung von 20 Fächern, wie dieſes nach (13 und 14) conſtruirte,

1	35	34	30	5	6
33	11	14	25	24	4
8	26	23	12	13	29
28	20	21	18	15	9
10	17	16	19	22	27
31	2	3	7	32	36

verſtattet bey denſelben Eckzahlen 1, 6, 31, 36 und denſelben Gliedern des innern Quadrats 11, 12, 13....26 durch bloße Verſetzung der Glieder in den Zwiſchenfächern der Einfaſſung und Abänderung des inneren Quadrats an 4 055 040 Veränderungen. Denn das eingeſchloſſene Quadrat leitet wenigſtens 880 Veränderungen, und jede Seite deſſelben kann an einen Streifen der Einfaſſung zweymahl gelegt werden, z. E. die Seite 11, 14, 25, 24 an den Streifen 1:6 ſo 24, 25, 14, 11. Dies giebt 2. 4. 880 oder 7040 Arten der Verbindung des innern Quadrats mit derſelben Einfaſſung. Nun ſind in den Zwiſchenfächern der Horizontalſtreifen der Einfaſſung 4 Paar Ergänzungsglieder, welche 1. 2. 3. 4 = 24 mahl verſetzt werden können. Eben ſo oft aber können auch die in den Zwiſchenfächern der Verticalſtreifen befindlichen 4 Paar Ergänzungsglieder verſetzt werden. Dies giebt bey denſelben Eckzahlen 24 . 24 = 576 Veränderungen in der Stellung der Zahlen in den Zwiſchenfächern der Einfaſſung. Daher iſt die Zahl der Veränderungen des ganzen Quadrats = 576 . 7040 = 4 055 040.

Läßt man das Eckglied 1 der Einfaſſung und damit auch des ihm gegenüberliegende, ſo wie die Glieder des innern Quadrats ungeändert, ſo kann man die beiden

andern Eckglieder, und die Glieder in den Zwiſchenfächern der Einfaſſung auf 21erley Weiſe verändern. Folglich iſt die Zahl der Veränderungen, bey demſelben Eckgliede 1 und denſelben Gliedern des innern Quadrats 11, 12 .... 26, = 4 055 040 . 21 = 85 155 840. Ändert man auch das Eckglied 1 und die innern Glieder des Quadrats, ſo wird dieſe Zahl noch bedeutend vermehrt. Und in dieſer großen Menge von Veränderungen ſind noch nicht diejenigen begriffen, welche das gewöhnliche magiſche Quadrat von 6 zuläßt.

25. Von dem magiſchen Quadrate zur Seitenzahl 7 laſſen ſich nach de la Hire's Methode, welche die der Inder und von Moſchopulos unter ſich begreift, 363 916 800 verſchiedene Anordnungen finden. Denn bey einer beſtimmten Folge der Zahlen in den oberſten Horizontalſtreifen der beiden Hülfsquadrate ſind 4 Folgen der Zahlen in den erſten Verticalſtreifen möglich. Jede Anordnung in dem einen Hülfsquadrate läßt ſich mit dreyen des andern zu einem magiſchen Quadrate, worin kein Glied wiederhohlt wird, verbinden. Alſo entſtehen bey derſelben Folge der Zahlen in den erſten Horizontalſtreifen der beiden Hülfsquadrate 4 . 3 Veränderungen. Die Folge der Zahlen in dem erſten Horizontalſtreifen jedes Hülfsquadrats läßt ſich aber 1 . 2. 3. 4. 5. 6. 7. abändern; daher iſt die Zahl der hieraus und aus der verſchiedenen Folge der Zahlen in den erſten Verticalſtreifen, hervorgehenden Veränderungen

$$(1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7)^2 . 1 . 3 = 304819200.$$

Wird das mittlere Glied der Progreſſion in einem der beiden Hülfsquadrate in der einen oder andern Diagonale wiederhohlt, ſo iſt die Zahl der Veränderungen eines ſolchen Quadrats 1. 2. 3. 4. 5. 6. 2. Die Zahl der Veränderungen, welche durch Verbindung eines ſolchen Hülfsquadrats mit einem der vorigen Art entſtehen, iſt alſo

$$(1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 .)^2\ 7 . 4 . 2 . 2 = 58060800.$$

Endlich iſt die Zahl der Veränderungen, welche durch die

Verbindung der Hülfsquadrate von der letzten Art unter ſich hervorgebracht werden,

$$(1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6)^2 . 2 = 1036800.$$

Die Zahl aller Veränderungen überhaupt iſt alſo
$304819200 + 58060800 + 1036800 = 363916800$, wie angegeben iſt. Dieſe Angabe erſtreckt ſich aber noch nicht mit auf die Quadrate mit magiſchen Einfaſſungen. Jeder Entwurf dieſer Art, welcher aus einem innern magiſchen Quadrate von 9 Fächern und zwey Einfaſſungen von 16 und 24 Fächern beſteht, leidet durch Verſetzung der Glieder in den Zwiſchenfächern der Einfaſſungen und durch Drehen und Wenden der Quadrate von 9 und 25 Fächern

$$(1 . 2 . 3)^2 . (1.2.3.4.5)^2 . 8^2 . 8^2 = 33177600$$

Veränderungen. Setzt man aber das Quadrat von 7 aus einem fünf und zwanzig fächerigen magiſchen Quadrate mit einer Einfaſſung gleicher Art von 24 Fächern zuſammen, ſo verſtattet jede ſolche Anordnung, weil das innere Quadrat nach de la Hire's Methode auf 41472 Arten zuſammengeſetzt werden kann,

$$41472 . (1 . 2 . 3 . 4 . 5)^2 . 8 = 4777574400$$

Veränderungen. Bedenkt man die große Menge der Entwürfe beider Arten, ſo erregt die ungeheure Menge von Veränderungen allerdings Erſtaunen. Mit der Zahl der aus den Elementen 1, 2, 3 .... 49 zu formirenden, magiſchen oder nicht magiſchen Quadrate, welche zwiſchen $6082 . 10^{59}$ und $6083 . 10^{59}$ fällt, iſt ſie indeß kaum zu vergleichen.

Noch einige andere Arten magiſcher Quadrate.

26. Anſtatt einer arithmetiſchen Progreſſion kann auch eine geometriſche in die Fächer eines Quadrats ſo eingetragen werden, daß das Product der Zahlen in den Horizontal- Vertical- und Diagonalreihen daſſelbe iſt.

Zum Beyſpiel.

128	1	32
4	16	64
8	256	2

1	8	16384	8792
32768	4096	2	4
512	1024	128	216
64	32	256	2048

Dieſe Quadrate entſtehen, wenn ſtatt der Glieder 1, 2, 3 . . . der natürlichen arithmetiſchen Progreſſion, die zugehörigen Glieder einer geometriſchen Reihe, in den obigen Beyſpielen 1, 2, 4, 8 . . . ., geſetzt werden. Die Gleichheit der Producte beruht auf den Eigenſchaften der Logarithmen.

27. Noch kann man die Glieder einer harmoniſchen Progreſſion in die Fächer eines Quadrats ſo eintragen, daß die Zahlen in horizontaler, verticaler und diagonaler Richtung harmoniſch proportional ſind, d. h. daß für je drey nächſt auf einander folgenden Glieder a, b, c iſt $c = \frac{ab}{2a - b}$. Dergleichen iſt das Quadrat

1260	840	630
504	420	360
315	280	252

Dieſe Quadrate haben gar nichts künſtliches. Denn da die reciproken der Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion eine harmoniſche Progreſſion bilden, ſo darf man nur die Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion, z. Exempel, 2, 3, 4 . . . . . 10, ſo in ein Quadrat eintragen, daß die Zahlen in horizontaler, verticaler und diagonaler Richtung ſtetig arithmetiſch proportionirt ſind, welches leicht iſt. Zum Beyſpiel.

2	3	4
5	6	7
8	9	10

Nun ſuche man zu den Zahlen 2, 3, 4 . . . . . 10 den kleinſten gemeinſchaftlichen Dividuus, welcher iſt 2520. Die Quotienten deſſelben durch die Glieder 2, 3, 4, ... 10 geben die in das Quadrat ſtatt dieſer zu ſetzenden Glieder einer harmoniſchen Progreſſion.

28. Eine eigene Art magiſcher Quadrate, welche durch Subtraction immer einerley Zahl liefern, findet ſich in den Actis Eruditor. 1686. p. 393 von Kochanski beſchrieben. Sauveur (Mém. de l'Acad. des Sc. 1710) hat noch das magiſche Kreuz, das magiſche Gitter, und den magiſchen Würfel hinzugethan. In Fränklins ſämmtlichen Werken 2 B. S. 307 und folgg. der deutſchen Überſetzung kommen ein Paar magiſche Quadrate von beſonderer Einrichtung, auch ein magiſcher Cirkel vor.

29. Euler hat in der Comm. Acad. Petropol. T. XV. eine ſchwere, mit der von den magiſchen Quadraten etwas übereinſtimmende Aufgabe aufgelöſet. Sie heißt: Es ſollen neun in ein Quadrat ſo zu ſtellende Zahlen gefunden werden, daß folgende zwölf Bedingungen erfüllt werden:

A, B, C,
D, E, F,
G, H, I,

$$\begin{array}{rl}
1. & AA + DD + GG = 1. \\
2. & BB + EE + HH = 1. \\
3. & CC + FF + II = 1. \\
4. & AB + DE + GH = 0. \\
5. & AC + DF + GI = 0. \\
6. & BC + EF + HI = 0. \\
7. & AA + BB + CC = 1. \\
8. & DD + EE + FF = 1. \\
9. & GG + HH + II = 1. \\
10. & AD + BE + CF = 0. \\
11. & AG + BH + CI = 0. \\
12. & DG + EH + FI = 0.
\end{array}$$

Die Unterſuchung iſt für die Lehre von den krummen Flächen und Linien von doppelter Krümmung wichtig, wenn man von einem Syſtem rechtwinkliger Coordinaten x, y, z zu einem andern der Coordinaten X, Y, Z übergeht, ohne den Anfangspunct zu verändern. In dieſem Falle werden nämlich die X, Y, Z durch x, y, z ſo ausgedrückt

$$\begin{aligned} X &= Ax + By + Cz \\ Y &= Dx + Ey + Fz \\ Z &= Gx + Hy + Iz \end{aligned}$$

und x, y, z durch X, Y, Z auf dieſe Art

$$\begin{aligned} x &= AX + DY + GZ \\ y &= BX + EY + HZ \\ z &= CX + FY + IZ \end{aligned}$$

und es haben alsdann die angezeigten Relationen nebſt noch andern zwiſchen den neun Größen A, B, C, D, E, F, G, H, I ſtatt. Die Aufgabe, wie ſie vorgetragen iſt, ſcheint mehr als beſtimmt zu ſeyn, iſt aber wirklich eine unbeſtimmte. Die letzten ſechs Gleichungen folgen nämlich aus den erſten ſechs. Übrigens dient die Stellung der neun Größen ins Viereck in der That nur zur Verſinnlichung der Relationen zwiſchen denſelben.

Quadratiſche Gleichung iſt eine Gleichung vom zweyten Grade. ſ. Gleichung.

Quadrato⸗cubiſche Zahl iſt die fünfte Potenz einer Grundzahl, ſo wie dieſe die quadrato⸗cubiſche Wurzel in Abſicht auf die Potenz als Grundzahl iſt. S. Potenz, 5.

Quadrato⸗quadratiſche Gleichung iſt eine Gleichung vom vierten Grade.

Quadrato⸗quadratiſche Zahl iſt die vierte Potenz einer Grundzahl, welche hinwiederum die eben ſo genannte Wurzel aus der Potenz iſt.

Quadratrix iſt eine krumme Linie, die über derſelben Axe mit einer gegebenen krummen Linie beſchrieben iſt, und durch ihre Ordinaten die Flächenräume dieſer angiebt. Ihre Ordinaten nemlich verhalten ſich wie die zu den Abſciſſen gehörigen Flächenräume der gegebenen Linie, oder es ſind auch die Quadrate ihrer Ordinaten, oder die Rechtecke aus der Abſciſſe und Ordinate, den Flächenräumen der vorgegebenen Linie gleich. Da man durch die Integralrechnung den Inhalt der Figuren bequemer und faßlicher angeben kann, als durch die Conſtruction einer zweyten Linie, ſo macht man jetzt kaum Gebrauch von dieſer Art zu quadriren.

1. Die älteſte Quadratrix iſt die des Dinoſtratus, eines Zeitgenoſſen des Plato. Es iſt (Fig. 2.) AB der Quadrant eines Kreiſes, der mit dem Halbmeſſer CA beſchrieben iſt, und M ein Punct deſſelben. Auf AC ſey ein Punct P ſo genommen, daß AB : AM = AC : AP ſey. In dieſem Puncte P werde auf AC die ſenkrechte PN errichtet, welche den Halbmeſſer CM in N ſchneidet, ſo iſt N ein Punct der Quadratrix.

2. Man ziehe NQ ſenkrecht auf den Halbmeſſer CB, ſo folgt aus der angenommenen Proportion, daß AB : BM = AC : NQ iſt. Nun ſetze man AC oder BC = a, CQ = x, NQ = y; der Winkel BCM verhalte ſich zu zwey Rechten, wie $\varphi : \pi$, ſo iſt $y = \frac{2\varphi}{\pi} a$,

die Gleichung für die Quadratrix. Auch iſt $y = x \tan \varphi$; alſo $x = \frac{2\varphi}{\pi \tan \varphi} a$.

Für den Punct D, wo die Quadratrix den Halbmeſſer BC ſchneidet, iſt $\varphi = 0$ und $\tan \varphi = 0$, alſo $x = \frac{0}{0} a$. Entwickelt man $\tan \varphi$ in eine Reihe $\varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 +$ etc. (Cyklometrie, 14.), ſo iſt $x = \frac{2a}{\pi(1 + A\varphi^2 + B\varphi^4 + \text{etc.})}$, welcher Werth für $\varphi = 0$ wird $CD = \frac{2a}{\pi}$. Die Gränze von $\frac{\varphi}{\tan \varphi}$ welche $= 1$ iſt, wird in dieſem Falle für den Quotienten geſetzt.

3. Die Curve iſt nicht auf den Bogen AD eingeſchränkt. Sie erſtreckt ſich auf der andern Seite von AC ins Unendliche fort, indem für $\varphi = \pi$, x unendlich groß, und $y = 2a$ wird. Für negative φ von 0 bis π iſt die Curve unterhalb der Abſciſſenlinie BZ dieſelbe wie oberhalb. Für die Winkel φ von π bis 2π kommt die Curve von dem unendlich weit entfernten Puncte auf der Aſymptote, deren Abſtand von der Abſciſſenlinie $= 2a$ iſt, her zurück, und erſtreckt ſich wieder ins Unendliche auf der Seite CX, wo die Gränze von y iſt 4a. Solcher Hin- und Herzänge giebt es unendlich viele, jeden mit einer Aſymptote der Abſciſſenlinie parallel, in dem Abſtande 2a von einander, ſowohl auf der einen Seite der Abſciſſenlinie als auf der andern, ſo wie eine Spirale, insbeſondere die archimediſche, auch unzählig viele Umgänge macht.

4. Es ſey NT die in N berührende, welche die CB in T ſchneide, ſo iſt $CT = \pi \cdot \frac{CN^2}{2CB}$. — Denn es iſt die Subtangente $QT = -\frac{y dz}{dy}$ (berührende Linie

nie, 12,15) und $CT = \frac{xdy - ydx}{dy}$. Da $\frac{y}{x} = tg\,\varphi$ iſt, ſo iſt $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$ (Differentialformeln, 38.) Daraus iſt

$$CT = \frac{xx}{\cos\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{dy} = CN^2 . \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\pi}{2a} . CN^2 = \frac{CN^2}{CD},$$

alſo die dritte Proportionale zu der Baſis der Quadratrix CD und dem Radius vector CN.

5. In D iſt die Subtangente = CD, alſo die berührende ſenkrecht auf die Axe; in A iſt ſie $= \frac{1}{2}\,\pi a$, dem Quadranten. Für $\varphi = \pi$, wo CN unendlich groß iſt, iſt ſie auch unendlich.

6. Da die Ordinaten NQ ſich wie die zugehörigen Bogen verhalten, und der Quadrant des Kreiſes $= \frac{CB^2}{CD}$ iſt, ſo kann durch dieſe Linie, ſo fern man ſie als gezeichnet annimmt, der Kreis und jeder Sector deſſelben quadrirt werden. Daher hat dieſe Linie bey den Alten ihren Namen, τετραγωνιζουσα, quadratrix, erhalten. Sie dient auch zur Theilung eines Kreisbogens AM oder Winkels ACM in jede Anzahl von Theilen durch die Theilung der zugehörigen Abſciſſe AP. Es läßt ſich dieſes auch durch Theilung der Ordinate NQ bewerkſtelligen.

7. Pappus, der ſich in dem 4ten Buche ſeiner Sammlung, Satz 25 ff. mit dieſer Linie beſchäftigt, erinnert mit Recht, daß das geſuchte dabey als bekannt angenommen wird. Man müſſe ja, um jeden Punct N der krummen Linie zu beſtimmen, ſchon das Verhältniß des Umfanges zum Halbmeſſer wiſſen. Die Linie ſey eine mechaniſche (μηχανικωτερη) und in der Ausübung den Künſtlern (μηχανικοις) zu vielen Aufga-

ben nützlich. Man kann nämlich durch fortgeſetzte Halbirungen des Quadranten AB und des Halbmeſſers AC viele Puncte wie N finden, und durch deren Hülfe die krumme Linie zur Anwendung genau genug zeichnen. Doch auch dieſe Mühe erſparen unſere Winkelinſtrumente. Pappus zeigt noch, wie ſich verſchiedene Aufgaben durch dieſe Linie auflöſen laſſen. — Der griechiſche Text von S. 25 — 29 iſt aus einer Vaticaniſchen Handſchrift abgedruckt in des Josephi Torelli Geometricis, Veronae 1769.

8. Den Satz, daß AB : CB = CB : CD iſt, erweiſet Pappus, nach Art der Alten, dadurch, daß er zeigt, CD könne weder größer noch kleiner ſeyn als die dritte Proportionale zu AB und CB. Nämlich es ſey nicht AB : CB = CB : CD, ſo iſt die dritte Proportionale zu AB und CB entweder größer oder kleiner als CD. Sie ſey zuerſt größer und = CE. Man beſchreibe mit dem Halbmeſſer CE einen Kreisbogen, welcher die Quadratrix irgendwo in N ſchneide, und ziehe NQ ſenkrecht auf CB, ſo iſt AB : CB = BM : QN. Nun ſoll auch ſeyn AB : CB = CB : CE, folglich iſt CB : CE = BM : QN. Wegen der concentriſchen Bogen iſt CB : CE = BM : EN. Folglich wäre der Bogen EN gleich der ſenkrechten NQ, welches unmöglich iſt. Alſo iſt CD nicht kleiner als jene dritte Proportionale. Auf ähnliche Art wird erwieſen, daß CD nicht größer iſt. Folglich iſt CD ihr gleich. — Wie aber dieſer Satz gefunden ſey, ſagt Pappus nicht.

9. Tſchirnhauſen hat die Quadratrix für den Kreis abgeändert. Es bleibt AB : AM = AC : AP, aber er zieht durch M eine parallele mit AC, welche durch ihren Durchſchnitt mit der auf AC in P ſenkrechten einen Punct ſeiner Quadratrix angiebt.

10. Newton nennt Quadratrices überhaupt die Linien, deren Ordinaten NQ (Fig. 2) eine Func-

tion des zugehörigen Kreisbogens ſind. Opuscula T. I. p. 102. In einem Briefe an Oldenburg, ibid. p. 318. giebt er die Abſciſſe CQ durch die Ordinate NQ mittelſt einer Reihe an, deren Grund aus Cyklometrie, 16. ſich gleich ergiebt.

Joh. Bernoulli bemerkt, daß die Cykloide dient, Kreisſegmente leicht in einem gegebenen Verhältniſſe zu theilen. Operum T. I p 199.

Dieſer Geometer giebt noch eine Conſtruction an, eine gerade Linie in einen Kreisbogen zu verwandeln, durch welche zugleich Puncte einer Quadratrix der Alten gefunden werden. Opp. T. I. p. 446. Davon in dem folgenden Artikel, Quadratur.

Wallis wendet auf die Quadratrix der Alten die Lehre von der Zuſammenſetzung zweyer Bewegungen an. Opp. T. II. p. 663. Er irrt ſich aber, daß er die ganze Quadratrix aus vier ſolchen Bogen, wie AD, in den vier Quadranten des Kreiſes zuſammenſetzt.

Montúcla ſchränkt den ganzen Lauf der Quadratrix auf den Raum zwiſchen zwey Aſymptoten ein. Geſch. der Mathematik, II. S. 78. Ausführlich handelt von dieſer Linie, beſonders ihren Aſymptoten, Käſtner in den geom. Samml. II. S. 218 — 241.

Quadratur (Tetragonismus) iſt die Verwandlung einer krummlinichten ebenen Fläche in eine gleich große geradlinichte Figur, insbeſondere in ein gleich großes Quadrat. Bisweilen heißt auch Quadratur die Verwandlung einer geradlinichten Figur in ein Quadrat. — Auch Complanation einer krummen Fläche wird Quadratur genannt.

1. Archimedes war der erſte, welcher krummlinichte Figuren quadrirte. Zu der Quadratur des Kreiſes that er zwar nur den erſten Schritt, allein er quadrirte die Parabel, wie in dem Artikel, Exhauſtions-Methode, Th. II. S. 167. ff. erzählt iſt; er verglich die Fläche einer Ellipſe mit einer Kreisfläche (von Ko-

noiden und Sphäroiden, 5 . 6 . Satz), auch die Flächenräume an ſeiner Spirale für jeden Umlauf des Halbmeſſers mit einer Kreisfläche, (von den Spiralen, 14. ff. S.).

Vor Archimedes hatten zwey griechiſche Geometer, Bryſon und Antipho, die Kreisfläche zu meſſen geſucht, jener auf eine ganz irrige Art, dieſer auf eine beſſere, durch die Berechnung eines kleinen Sectors, den er als geradlinicht anſah.

2. Cavaleri, deſſen Methode des untheilbaren im erſten Theile erklärt iſt, kam damit in dem Werke, worin er ſie aus einander ſetzt, in Beziehung auf Flächenräume nicht weiter als bis zu der Quadratur der Parabel und der Spirale, bey der letztern durch eine Vergleichung mit einem paraboliſchen Raume. Aber in den exercitationibus geometricis, die 1647 herausgekommen ſind, giebt er die Quadratur höherer Parabeln, von der Form $ay^n = b^n x$. Sein Ordensgenoſſe, Stephanus de Angelis, leitete daraus noch manche Sätze die Quadratur dieſer Linien betreffend her, und zeigte auch, wie ihre Cubirung und die Lage des Schwerpunctes gefunden werden. De infinitis parabolis, Venetiis, 1659. — Fermat quadrirte die apolloniſche Parabel auf eine ſinnreiche Art. Er nahm die Abſciſſen in geometriſcher Progreſſion, wodurch die Ordinaten auch in einer ſolchen, etwas verſchiedenen, ſtehen, und die Rechtecke aus den Ordinaten in die zugehörigen Unterſchiede der Abſciſſen, ebenfalls eine geometriſche Progreſſion ausmachen. Werden dieſe Unterſchiede ohne Ende vermindert, ſo iſt eine unendliche geometriſche Reihe zu ſummiren, deren Summe die Fläche der Parabel giebt. Auf ähnliche Art quadrirte er eine Parabel, deren Gleichung iſt $b^3 x^2 = a^2 y^3$. Auch erdachte er eine Spirale, an welcher die Winkel, welche der ſich drehende Radius beſchreibt, ſich wie die Quadrate der Radiorum verhalten, und quadrirte dieſe Spirale. — Roberval, dem Fermat die Aufgabe, dieſe Curve zu quadriren, vorgelegt

hatte, kam damit auch zu Stande. Descartes fand ebenfalls ihre Quadratur. Roberval berechnete die Flächenräume einer Curve, die man Limaçon nannte, ſ. Th. I. S. 543. Er beſtimmte auch den Flächenraum auf einer Cylinderfläche, der durch die Herumführung der Spitze eines Zirkels darauf abgeſchnitten wird, wenn der Zirkel den Durchmeſſer des Cylinders beſpannt. Merkwürdig iſt es, daß er auch die Cykloiden jeder Art quadrirte, nämlich den ganzen zwiſchen der Baſis und dem Scheitel enthaltenen Raum. Sluſe (Slusius) quadrirte die krummen Linien, deren Gleichung iſt $a^m y^n = x^m (a - x)^n$, in dem Anhange zu ſeinem Mesolabum betitelt Miscellanea Cap. II. Auch quadrirt er Spiralen, deren Gleichung auf eine gleiche Art allgemein gemacht wird. Cap. III Torricelli fand für ſich die Fläche der gemeinen Cykloide, Pascal ſogar die Abſchnitte derſelben. — Gregorius von St. Vincent erdachte ſehr viele Arten die Parabel zu quadriren. Niemand unter den ausgezeichneten Geometern hat die Quadratur des Kreiſes eifriger geſucht als dieſer, wiewohl ſie auch ihm mislang. Davon nachher.

3. Huygens fand den Schwerpunct eines hyperboliſchen und elliptiſchen Abſchnitts aus, und war dadurch im Stande, einen ſolchen Abſchnitt mit einem über der Chorde eingeſchriebenen Dreyeck zu vergleichen. Zu gleicher Zeit mit ihm, im Jahre 1651, leitete auch Lalouere die Quadratur des Kreiſes und der Hyperbel aus der Beſtimmung ihres Schwerpunctes her, und ahmte dabey den ſtatiſchen Beweis des Archimedes für die Parabel nach. Allein Huygens griff die Sache gerade zu an, wiewol ſeine Deduction noch zu weitläuftig iſt. Ferner fand er, daß der unendlich lange Flächenraum zwiſchen der Ciſſoide, ihrer Aſymptote und dem Durchmeſſer des erzeugenden Halbkreiſes dreymahl ſo groß iſt als die Fläche dieſes Halbkreiſes, (Opera reliqua, T. I. p. 226.). In einem Anhange zu der Abhandlung über die Urſache der Schwere, 1690,

zeigte er unter andern Sätzen über die Logiſtica auch die Vergleichung ihrer Fläche zwiſchen irgend zwey Ordinaten. Sogar quadrirte Huygens eine Linie vom dritten Grade, die blattähnliche, Folium benannte, von welcher unten (109) gehandelt wird. Er fand die Area der Ovale, ferner die Gleichheit des Flächenraums derſelben, und desjenigen zwiſchen den beiden unendlichen Zweigen der Curve und der Aſymptote, endlich, daß der Inhalt eines Abſchnittes durch ein einziges Glied ausgedruckt werde. Opp. var. p. 514.

4. Jacob Gregory gab 1667 zu Padua eine ſehr nett geſchriebene Abhandlung heraus: Vera circuli et hyperbolae quadratura, worin er zu zeigen ſuchte, daß dieſe durch Annäherung nur immer genauer, aber nicht vollkommen gefunden werden könne. Er findet eine gut convergirende Reihe von ordentlichen Vielecken, die theils um den Kreis, theils in demſelben beſchrieben werden. Durch 13 ſolcher Paare berechnet er den Umfang bis auf die 15te Decimalſtelle nach den Einern. Für die Hyperbel iſt ſeine Methode der für den Kreis ganz gleichförmig. Auch findet er dadurch zuerſt den log. nat. 10, und dann den log. 2 mittelſt des log. $\left(1 + \frac{24}{1000}\right)$ oder log. $\frac{1024}{1000}$, wo $1024 = 2^{10}$ iſt. Nun giebt er für jede Primzahl von 3 bis 97 zwey große Zahlen an, die nur um 1 verſchieden, und Producte von Primzahlen ſind, deren Logarithmen, bis auf eine derſelben ſchon gefunden ſeyn, daher aus dem leicht zu findenden $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ oder $\log \frac{n+1}{n}$, wenn der Logarithmus von $n + 1$ oder von n ſchon bekannt iſt, der Logarithmus der andern Zahl ſogleich ſich ergiebt, dadurch auch der verlangte Logarithmus der noch übrigen Primzahl, wie in dem Artikel, Logarithmus, gezeigt iſt. Allein ſeine Reihe von Polygonen iſt doch müh-

ſam zu berechnen. In den Exercitationibus geometricis, die 1668 zu London herauskamen, hat er eine mit der Reihe, $2\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right)$ für $\log \frac{1+y}{1-y}$ übereinſtimmende angegeben.

5. Die Arithmetica infinitorum von Wallis (vom Jahre 1655) war ein wichtiger Fortſchritt in der höhern Mathematik. Sie iſt eine Summirungsmethode und in ſofern eine Erweiterung der Cavaleriſchen. Wallis gebrauchte die Induction auf eine ſehr geſchickte Art, und wußte das Geſetz der Analogie gut anzuwenden, da er z. B. die Quotienten $\frac{1}{x^m}$ als Multiplicatoren, x^{-m}, behandelte, und auf ſie das anwandte, was er für Potenzen mit poſitiven Exponenten gefunden hatte. Auch auf gebrochne Exponenten dehnte er dieſes aus, und fand überhaupt den Inhalt der Figuren, in welchen die Ordinate ſich wie eine Potenz irgend einer Art von der Abſciſſe verhält. In dem Falle, da der Exponent größer als die Einheit iſt, geräth er auf Flächenräume, die negativ ſind, welche er daher für größer als unendlich erklärt, weil das Verhältniß $n:0$ eine unendlich große Größe in Beziehung auf die mit n correſpondirende Größe andeutet, alſo $n:-m$ eine noch größere (Arith. infin. Prop. 104). Er hat nicht beachtet, daß eine Conſtante zu der negativen Größe kommen muß, und daß man, wenn dieſe unendlich groß iſt, das Complement der Area zu $x-a$ (wo a eine gegebene Abſciſſe iſt) ſtatt der Area zu x ſuchen müſſe. In einem Briefe an Huygens (Opp. T. II, p. 545) zeigt er, wie durch ſeine Methode die von letzterm gefundene Quadratur der Ciſſoide auch beſtimmt wird. Die Cykloide zu quadriren zeichnet er erſtlich innerhalb derſelben und des erzeugenden Kreiſes, in jener Trapezia, in dieſem Dreyecke, von welchem jene mehr

als dreymahl ſo groß ſind als die correſpondirenden Dreyecke. Dann zeichnet er auch Trapezia und Dreyecke die über die Cykloide und den Kreis hinausreichen, und zeigt, daß jedes der Trapezien kleiner iſt als das dreyfache des zugehörigen Dreyecks. Daher iſt die Cykloide dreymahl größer als die Kreisfläche. Die Gränzen der eingezeichneten und umſchriebenen Figuren fallen in den Umfang der Cykloide und des Kreiſes, daher iſt für die Fläche derſelben das Verhältniß weder größer noch kleiner als 3 : 1, d. i., es iſt 3 : 1 ſelbſt.

6. Von Brounckers Reihe für die Hyperbel ſ. den davon handelnden Artikel; von Mercators Quadratur der Hyperbel ſ. Logarithmus 139 — 142.

7 Alle die bis zu Newtons Zeit gebrauchten ſinnreichen, aber auch mühſamen beſondern Methoden, den Flächenraum einer Figur zu finden, wurden unnöthig, als dieser ſcharfſinnige Geometer ſeine Analyſis des Unendlichen erfand, und Leibnitz noch früher als Newton ſeine Differentialrechnung und deren Anwendung auf die Beſtimmung der Flächenräume einer Curve bekannt machte.

8. Es ſey ZCMZ (Fig. 3.) irgend eine Curve, BC, eine gegebene Ordinate derſelben für die Abſciſſe AB und PM irgend eine andere Ordinale zu der Abciſſe AP. Die Coordinaten ſeyen rechtwinklichte. Es ſey $AP = x$; $PM = y$, ſo iſt die Fläche BCMP $= \int ydx$, wo das Integral ſo genommen werden muß, daß es $= 0$ ſey, wenn $x = AB$ und $y = BC$ iſt. Dieſe Bedingung beſtimmt die Conſtante.

Denn man ziehe noch eine Ordinate QN. Dieſe ſey gleich $y + \Delta y$, ſo wie die zugehörige Abſciſſe $AQ = x + \Delta x$. Durch M ziehe man Mn parallel mit AQ bis an NQ, und durch N die Nm parallel mit derſelben bis an MP. Die Area BCMP ſey $= Z$, ſo iſt $\Delta Z > y\Delta x$, und $\Delta Z < (y+\Delta y)\,\Delta x$,

oder $\frac{\Delta Z}{\Delta x} > y$; $\frac{\Delta Z}{\Delta x} < y + \Delta y$. Der Quotient hängt alſo ſowohl von der Größe der Differenz Δy als von der Ordinate y ab. So fern der Quotient von der Größe der Differenz unabhängig ſeyn ſoll, iſt derſelbe = y, das heißt, $\frac{dZ}{dx} = y$, oder $dZ = ydx$, und $Z = \int ydx$. Wenn die Veränderungen von x und Z ungleichnamig ſind, ſo iſt $dZ = - ydx$. Das Integral $\int ydx$, in welchem der Werth von x und der zugehörigen Ordinate y unbeſtimmt gelaſſen wird, heißt die unbeſtimmte Quadratur, im Gegenſatz der beſtimmten, für zwey beſtimmte Werthe von x und y, bey welchen die Area anfängt und ſich endigt, wie die Area BCMP zwiſchen den Ordinaten BC, PM, wenn die Abſciſſen AB, AP beſtimmte Werthe erhalten.

9. In der Differentialformel ydx hat man aus der Gleichung zwiſchen x und y entweder y durch x auszudrucken, oder das Differential durch dy und eine Function von y anzugeben. Alsdann iſt die Aufgabe von der Quadratur blos eine Sache der Integralrechnung.

In den erſtern Zeiten nach der Erfindung der Integralrechnung gebrauchte man die Quadratur der krummen Linien als ein Mittel zur Integration. Man ſuchte die Curve zu conſtruiren, deren Ordinate der Differentialfactor in der Differentialformel ydx iſt. So mochte man für jeden Werth von x die zugehörige Area meſſen, welche das $\int ydx$ angab. Allein dieſe Methode iſt zu mühſam und zu wenig genau, dagegen die Rechnung leichter und zuverläſſig iſt. Sie wird deshalb ſchon lange nicht mehr gebraucht, und die Quadratur einer Curve wird blos ihretwegen ſelbſt durch Integrirung gefunden. Die Integralformeln werden

übrigens dadurch deutlicher, wenn man ſie als Quadraturen einer Curve betrachtet.

10. Sind die Coordinaten nicht ſenkrecht auf einander, ſo hat man die Formel ydx noch mit dem Sinus des Ordinatenwinkels zu multipliciren.

11. Wenn die Ordinaten aus einem Puncte P (Fig. 4.) gezogen werden, ſo ſey die Ordinate durch den Anfangspunct, PA $= a$, eine unbeſtimmte, PM $= u$, APM $= \varphi$, PN $= u + \Delta u$, APN $= \varphi + \Delta\varphi$. Man beſchreibe durch M und N aus P die Kreisbogen Mn, Nm, ſo iſt Mn $= u\Delta\varphi$; Nn $= (u + \Delta u)\Delta\varphi$, und der Sector MPn $= \frac{1}{2} uu\Delta\varphi$, Sector NPm $= \frac{1}{2}(u + \Delta u)^2 \Delta\varphi$. Die Area APM ſey $= Z$, ſo iſt Area MPN $+ \Delta Z$. Nun iſt $\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi} > \frac{1}{2}uu$, und $\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi} < \frac{1}{2}(u + \Delta u)^2$ Der Quotient, ſo fern derſelbe von der Quantität der Differenzen Δu und $\Delta\varphi$ unabhängig ſeyn ſoll, iſt $= \frac{1}{2}uu$, das iſt $\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{1}{2}uu$ und $dZ = \frac{1}{2}uud\varphi$, alſo $Z = \frac{1}{2}\int uud\varphi$. Hier muß ebenfalls entweder u durch eine Function von φ oder $d\varphi$ durch du mit einer Function von u ausgedruckt werden. Beyſpiele ſ. unten, 76 — 79; 86. 105.

12. Ehe wir zu dieſen Differentialformeln Beyſpiele nehmen, wird von der Quadratur des Kreiſes, der berüchtigten Klippe, woran ſo manche Hoffnung etwas großes zu leiſten, geſcheitert iſt, etwas ausführlicher zu reden ſeyn. Montücla hat in einer beſondern Schrift: Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, à Paris 1754, die Verſuche, dieſe Aufgabe aufzulöſen, erzählt. Ich habe dieſes Buch nicht erhalten können.

Quadratur des Kreiſes.

13. Die Quadratur des Kreiſes hängt von der Rectification deſſelben ab. Denn Archimedes hat bewieſen, daß die Kreisfläche gleich iſt einem Dreyeck, deſſen Grundlinie dem Umfange des Kreiſes und die Höhe dem Halbmeſſer gleich iſt.

14. Der Beweis des Archimedes gründet ſich darauf, daß in einem Kreiſe ein gleichſeitiges Vieleck gezeichnet werden kann, deſſen Unterſchied von der Kreisfläche kleiner als eine gegebene Größe iſt, und daß um den Kreis ein gleichſeitiges Vieleck beſchrieben werden kann, welches den Kreis um weniger als eine gegebene Größe übertrifft. Denn es ſey der Kreis = C, das angegebene Dreyeck = D. Iſt dieſes nicht dem Kreiſe gleich, ſo iſt es entweder kleiner oder größer. Iſt es kleiner, ſo ſey der Unterſchied von dem Kreiſe = U, alſo C = D + U. Man beſchreibe nun in dem Kreiſe ein Vieleck, V, deſſen Unterſchied von dem Kreiſe kleiner als U ſey, oder = U — u, ſo iſt C = V + U — u, alſo iſt D + U = V + U — u, oder D = V — u, das iſt, D iſt kleiner als V. Nun iſt V gleich einem Dreyeck, deſſen Grundlinie der Umfang des Vielecks, und die Höhe die ſenkrechte von dem Mittelpuncte auf die Seite des Vielecks iſt. Beides iſt kleiner, als an dem Dreyeck D angenommen iſt. Es iſt alſo V kleiner als D, welches der vorigen Folgerung widerſpricht. Folglich iſt der Kreis nicht größer als das angenommene Dreyeck.

Zweytens ſey, wenn es möglich iſt, der Kreis kleiner als das Dreyeck D, oder C + U = D. Man beſchreibe um den Kreis ein gleichſeitiges Vieleck V, deſſen Unterſchied von dem Kreiſe ſey U — u, ſo iſt C + U — u = V, das iſt D — u = V. Aber V iſt gleich einem Dreyeck, deſſen Grundlinie der Umfang des Vielecks und die Höhe der Halbmeſſer des Kreiſes iſt, alſo größer als das Dreyeck D, welchem die vori-

ge Folgerung widerſpricht. Folglich iſt der Kreis nicht kleiner als das Dreyeck. Da derſelbe nun auch nicht größer iſt, ſo iſt der Kreis ſo groß als das angegebene Dreyeck.

15. Der Beweis des vorher gebrauchten Satzes iſt dieſer. Es ſey AB (Fig. 5.) die Seite eines gleichſeitigen Vielecks in einem Kreiſe um den Mittelpunct C. Man halbire den Bogen AB in D, und ziehe AD, BD, dann durch D eine berührende EF, auch an A und B die berührenden, AH, BH, welche die EF in E, F treffen. Das Dreyeck ADB iſt größer als die Hälfte des Trapezium AEFB, weil es die Hälfte des Rechtecks über AB mit der Höhe DG iſt. Es iſt alſo noch vielmehr größer als die Hälfte des Abſchnittes ADB, welcher kleiner als das Trapezium iſt. Folglich iſt ſeine Ergänzung zum ganzen Abſchnitte ADB, d. i. die beiden gleichen Abſchnitte über AD und DB zuſammen kleiner als die Hälfte des Abſchnittes ADB. Nun iſt AD oder DB die Seite des gleichſeitigen Vielecks im Kreiſe, welches doppelt ſo viel Seiten hat, als das, deſſen Seite AB iſt. Bezeichnet man jenes Vieleck durch P^1, dieſes durch P, den Kreis durch C, ſo iſt, wenn n die Seitenzahl des Vielecks P anzeigt, $C - P = n \times \text{Segm. ADB}$ und $C - P^1 = 2n \times \text{Segm. AeD} = n\,(\text{Segm. AeD} + \text{Segm. DfB})$ folglich $C - P^1 < \frac{1}{2}\,(C - P)$. Alſo wird durch Verdoppelung der Seitenzahl der Unterſchied zwiſchen dem Kreiſe und dem eingeſchriebenen Vieleck um mehr als die Hälfte vermindert. Folglich kommt man durch fortgeſetzte Verdoppelung der Vieleckſeitenzahl nach dem, was Euklides im 10ten B. 1. S. erwieſen hat, einmahl auf ein Vieleck, das von dem Kreiſe um weniger als eine gegebene Größe verſchieden iſt.

Die in A und B berührenden ſchneiden ſich in

H, ſo ſind AH, BH die Hälfte der Seiten eines gleichſeitigen umſchriebenen Vielecks, und das Trilineum zwiſchen AH, BH und dem Kreisbogen ADB iſt der ſovielte Theil des ganzen Unterſchiedes zwiſchen dem Vielecke und der Kreisfläche als die Einheit von der Zahl der Seiten iſt. Zieht man durch D (die Mitte von ADB) die berührende EDF, welche AH und BH in E, F ſchneidet, ſo iſt, wegen der gleichen Dreyecke CAE, CDE, AE = ED, und eben ſo BF = DF, und dieſe Linien ſind die halben Seiten des äußern Vielecks von doppelt ſo viel Seiten als das mit den Seiten 2 AH oder 2 BH. Nun iſt HE größer als ED, das iſt als AE, daher das Dreyeck HDE größer als AED, alſo auch größer als die Hälfte des Dreyecks AHD; mithin das Dreyeck HEF größer als das Dreyeck AHD oder als die Hälfte des Vierecks AHBD, folglich um ſo mehr größer als die Hälfte des Trilineums AHBDA, welches kleiner iſt als das Viereck. Daher iſt die Ergänzung des Dreyecks HEF zu dem ganzen Trilineum AHBDA, d. i., die beiden gleichen Trilinea AEDeA und DFBfD zuſammengenommen kleiner als die Hälfte des Trilineums AHBDA. Hieraus folgt auf ähnliche Art, wie vorhin, daß durch Verdoppelung der Seitenzahl des umſchriebenen Vielecks der Überſchuß des Vielecks über die Kreisfläche um mehr als um die Hälfte vermindert wird. Demnach kann ein umſchriebenes Vieleck ſich dem Kreiſe ſo ſehr nähern, daß der Unterſchied kleiner wird, als irgend eine gegebene Größe.

Wegen des erſten dieſer beiden Sätze beruft Archimedes ſich auf die Elemente, das iſt Euklides XII. 2. Den zweyten Satz hat er in dem erſten Buche über Kugel und Cylinder, Satz 7. bewieſen.

16. Die Fläche eines Kreiſes verhält ſich zu dem Quadrate ſeines Durchmeſſers wie ſein Umfang zum Vierfachen ſeines Durchmeſſers. — Denn es ſey der Durchmeſſer = d, die Peripherie = p, ſo iſt der

Kreis gleich einem Rechteck, deſſen Grundlinie der Umfang und die Höhe der halbe Halbmeſſer oder der vierte Theil des Durchmeſſers iſt, weil das Dreyeck, dem der Kreis gleich iſt, ſo groß iſt. Es verhält ſich alſo der Kreis zu dem Quadrate des Durchmeſſers zuſammengeſetzt wie $p : d$, und $\frac{1}{4} d : d$ (oder $d : 4d$) das iſt wie $p : 4d$.

17. Die Umfänge der Kreiſe verhalten ſich wie ihre Durchmeſſer oder Halbmeſſer; und die Flächen der Kreiſe wie die Quadrate der Durchmeſſer oder der Halbmeſſer. — Denn man beſchreibe durch fortgeſetzte Halbirungen der Bogen gleicher Winkel in beiden Kreiſen zwey gleichſeitige Vielecke von gleichviel Seiten, ſo verhalten ſich die Umfänge dieſer Figuren, da ſie ähnliche ſind, wie die Seiten oder wie die Durchmeſſer, und die Flächenräume derſelben wie die Quadrate der Seiten oder der Durchmeſſer. Dieſe Verhältniſſe bleiben, wie groß auch die Anzahl der Seiten genommen werden mag, und gelten daher auch von den Gränzen der Vielecke, das iſt von den Umfängen und den Flächenräumen der Kreiſe.

Einen Beweis von der Form, wie in (14) giebt Hauber in ſeiner deutſchen Ausgabe von Archimedes Schrift über Kugel und Cylinder in dem Anhange von deſſen Kreismeſſung, S. 102. Man kann auch über das Verfahren Euklids und Archimeds in Betreff der Kreismeſſung zwey akademiſche Schriften von Pfleiderer de Dimensione Circuli vergleichen.

18. Den Satz, daß die Kreisflächen ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer verhalten, hat Euklides ſo erwieſen, daß er zeigt, daß das Verhältniß kein anderes, weder größeres noch kleineres, ſeyn könne, XII. 2. Geht man von dieſem Satze aus, ſo folgt, daß die Kreisumfänge ſich wie die Durchmeſſer verhalten. Denn die zwey Kreisflächen ſeyn C, c; ihre Durch-

meſſer D, d, Umfänge P, p, ſo iſt $C : D^2 = P : 4D$, und $c : d^2 = p : 4d$ (16). Da $C : c = D^2 : d^2$ iſt, ſo iſt $C : D^2 = c : d^2$, alſo $P : 4D = p : 4d$ oder $P : p = D : d$.

19. Ein Kreisausſchnitt (Sector) iſt gleich einem rechtwinkligen Dreyeck, von deſſen Seiten um den rechten Winkel die eine dem Halbmeſſer des Kreiſes, die andere der Länge des Bogens gleich iſt. — Denn der Sector verhält ſich zur Kreisfläche wie der zugehörige Bogen zum Umfange.

20. Die Ringfläche zwiſchen zwey concentriſchen Kreiſen iſt gleich einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen der Summe und dem Unterſchiede der Halbmeſſer der beiden Kreiſe iſt, ſ. Armilla.

Oder: die Durchmeſſer der beiden Kreiſe ſeyn D, d, die Umfänge P, p; der Durchmeſſer des Kreiſes, welcher der Ringfläche gleich iſt, ſey d^1, Umfang p^1. Nun iſt, wenn $P.D$, $p.d$, $p^1 d^1$ die Rechtecke von den bezeichneten Linien bedeuten, $P.D : p.d = D^2 : d^2$, (weil $P : p = D : d$ iſt), alſo $P.D - p.d : P.D = D^2 - d^2 : D^2$. Ferner iſt $P.D : p^1.d^1 = D^2 : d^1.d^1$. Alſo iſt $P.D - p.d : p^1.d^1 = D^2 - d^2 : d^1.d^1$. Sollen die Ringfläche und der Kreis mit dem Durchmeſſer d^1 gleich groß ſeyn, ſo iſt $P.D - p.d = p^1.d^1$, alſo auch $D^2 - d^2 = d^1 d^1$. Nun iſt $D^2 - d^2 = (D + d)(D - d)$ zufolge Eucl. II. 6. alſo $d^1 d^1 = (D + d)(D - d)$. Das Quadrat einer mittleren Proportionale iſt gleich dem Rechteck von den beiden äußern (Eucl. IV. 14.). Folglich iſt der geſuchte Durchmeſſer die mittlere Proportionale zwiſchen $D + d$ und $D - d$.

21. Es ſey π die halbe Peripherie für den Halbmeſſer $= 1$, ſo iſt die Peripherie für den Halbmeſſer $a = 2\pi a$; die Kreisfläche $= \pi aa$. Der Bogen ei-

nes Sectors mit dem Halbmeſſer = 1 ſey = φ, ſo iſt der Bogen für den Halbmeſſer a zu demſelben Winkel = $a\varphi$, und der Sector = $\frac{1}{2}aa\varphi$. Da die Winkel den Bogen, bey demſelben Halbmeſſer, proportional ſind, ſo kann man unter π und φ auch die zugehörigen Winkel, nämlich zwey Rechte und den zu den Bogen gehörigen verſtehen, wenn Verhältniſſe gebraucht werden.

22. Ein anderer Sector mit dem Halbmeſſer b und Winkel ω iſt = $\frac{1}{2}bb\omega$. Iſt dieſer dem Sector $\frac{1}{2}aa\varphi$ gleich, ſo iſt $\varphi : \omega = bb : aa$.

23. Sind die Bogen $a\varphi$, $b\omega$ gleich, ſo iſt $\varphi : \omega = b : a$.

24. Wie der Umfang eines Kreiſes, ſo genau als es verlangt wird, gefunden werden könne, iſt in dem Artikel, Cyklometrie, gewieſen. Da das Geſetz, nach welchem die Glieder der verſchiedenen Reihen, welche man zu dieſem Zwecke anwenden kann, offenbar iſt, ſo kann man mit Recht ſagen, daß die Quadratur des Kreiſes im analytiſchen Sinne gefunden ſey. Eine geometriſche Conſtruction iſt freylich noch nicht entdeckt, und ſcheint ſchwerlich gefunden werden zu können.

25. Die ſucceſſive Verdoppelung der Seitenzahl eines gleichſeitigen innern und äußern Vielecks im Kreiſe führt auf folgende Annäherung zu der Fläche eines Kreiſes.

Es seyn A, B, C, D, etc. die Flächen der eingeſchriebenen Vielecke von n, 2n, 4n, 8n . . . Seiten, und P, Q, R, S, etc. die Flächen der umſchriebenen Vielecke von n, 2n, 4n, 8n . . . . Seiten, für den Halbmeſſer = r. Es iſt

$$A : B = B : P \text{ und } P + B : 2B = B : Q,$$
$$B : C = C : Q \; ; \; Q + C : 2Q = C : R,$$
$$C : D = D : R \; , \; R + D : 2R = D : S.$$
u. ſ. f.

Die innern Vielecke von n und 2n Seiten mit dem äußern von n Seiten ſind in ſtetiger geometriſchen Proportion; die äußern Vielecke von n und 2n Seiten mit dem innern von 2n Seiten ſind in ſtetiger harmoniſchen Proportion.

Denn es ſey der Centriwinkel der Vielecke A und P, nämlich $\frac{2\pi}{n} = \alpha$, ſo iſt

$$A = \frac{1}{2} nr^2 \sin \alpha; \quad B = nr^2 \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

$$P = nr^2 \tan \frac{1}{2} \alpha; \quad Q = 2nr^2 \tan \frac{1}{4} \alpha.$$

Da $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \, . \, \cos \frac{1}{2} \alpha$, ſo iſt $A : B = \cos. \frac{1}{2} \alpha : 1$. Auch iſt $B : P = \cos \frac{1}{2} \alpha : 1$, folglich iſt $A : B = B : P$.

Ferner iſt $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ Goniometrie, 38.) alſo iſt $2A : P = 1 + \cos \alpha : 1$, und daher auch $2B : Q = 1 + \cos \frac{1}{2} \alpha : 1$.

Nun iſt auch $P + B : P = 1 + \cos \frac{1}{2} \alpha : 1$, alſo iſt $P + B : P = 2B : Q$, oder $P + B : 2P = B : Q$. Die folgenden Proportionen ſind dieſelben mit den beiden hier gefundenen, da nur die Anzahl der Seiten ſucceſſiv verdoppelt wird.

E

26. Die geometriſche Betrachtung zeigt dieſe Proportionen noch augenſcheinlicher. Es ſey (F .5.) AB die Seite eines eingeſchriebenen Vielecks von n Seiten, ſo iſt, nach der Conſtruction (15.), wenn noch AE gezogen worden, $\Delta ACG = \frac{1}{2n} A$; $\Delta ACD = \frac{1}{2n} B$; $\Delta ACH = \frac{1}{2n} P$; $2\,\Delta ACE = \frac{1}{2n} Q$. Nun iſt $\Delta ACG : \Delta ACD = CG : CD = CG : CA$. Ferner $\Delta ACD : \Delta ACH = CD : CH = CA : CH$. Wegen des rechten Winkels CAH iſt $CG : CA = CA : CH$ (Dreyeck 11.), alſo ſind die drey Dreyecke in geometriſcher Proportion, daher auch ihre 2n fachen, A, B, P.

Zweytens iſt $\Delta ACD : \Delta ACH = CA : CH = ED : EH = AE : EH$. Ferner iſt auch $\Delta ACE : \Delta ECH = AE : EH$. Daher iſt $\Delta ACD : \Delta ACH = \Delta ACE : \Delta ECH$, das iſt $B : P = \frac{1}{2} Q : P - \frac{1}{2} Q$. Daraus iſt durch Verbindung $P + B : B = P : \frac{1}{2} Q = 2P : Q$, oder $P + B : 2P = B : Q$.

Nach dieſen Proportionen hat Jakob Gregory eine Reihe Vielecke, innere und äußere, vom Viereck an bis zu dem von 16384 Seiten berechnet, in der Schrift de vera circ. et hyp. quadratura. Die Ausziehung der Wurzeln iſt aber ſehr mühſam, ſ. oben 4.

27. Descartes hat eine ſinnreiche Conſtruction angegeben, wodurch zu einem gegebenen Kreisumfange der Halbmeſſer gefunden wird. Euler hat ſie

werthgeſchätzt, ſie zu erläutern und auf Rechnung zu bringen in den Novis Comm. Acad. Petrop. T. VIII. Sie iſt folgende. Das Quadrat ABCD (Fig. 6.) habe denſelben Umfang wie ein Kreis. Man ziehe die Diagonale AD und verlängere ſie unbeſtimmt nach O hin. Zu dieſem Quadrate ſetze man über der verlängerten AB das Rechteck BEFG, welches dem vierten Theile des Quadrats gleich ſey, und deſſen Winkelpunct F in die gerade AO falle. Ferner füge man zu dieſem das Rechteck EHI, welches dem vierten Theile des Rechtecks BF (d. i. dem 16ten Theile des Quadrats AD) gleich ſey, ebenfalls mit dem Winkelpuncte I auf AO. So fahre man fort, und es nähert ſich die Grundlinie des Quadrats und der Rechtecke, wie AH, immer mehr dem Durchmeſſer des Kreiſes, deſſen Umfang dem des Quadrates gleich iſt. Inzwiſchen wäre es mühſam die Längen AE, AH u. ſ. f. zu beſtimmen, wozu eine Conſtruction, wie in dem Artikel, Anwendung der Geometrie, Th. I. S. 133. 2te Aufg. gezeigt iſt, oder die Auflöſung einer quadratiſchen Gleichung, erfordert wird.

Die Carteſiſche, dem Durchmeſſer ſich nähernde, Reihe entſteht, wenn man eine Reihe von äußern regulären Vielecken ſucht, deren Umfänge ſich alle gleich ſind. Es ſey nämlich ABCD ein Quadrat, das um einen Kreis beſchrieben iſt, alſo AB der Durchmeſſer deſſelben, ſo wird AE der Durchmeſſer des Kreiſes in einem Achtecke von gleichem Umfange mit dem Quadrat; AH wird der Durchmeſſer des Kreiſes in dem Sechszehneck von eben dem Umfange, u. ſ. f. Die Gränze der ſo beſtimmten Längen iſt der Durchmeſſer eines Kreiſes von demſelben Umfange wie das Quadrat. Dieſes ſoll nun gezeigt werden.

28. Anſtatt der Durchmeſſer kann man aber bequemer die Halbmeſſer nehmen. Es ſey ABM (Fig. 7.) ein gegebener Kreis um den Mittelpunct C, AD die halbe Seite eines umſchriebenen ordentlichen Vielecks,

Den Halbmeſſer des in das Vieleck von einer doppelt ſo großen Anzahl Seiten zu beſchreibenden Kreiſes bey demſelben Umfange zu finden, halbire man AD in E und ziehe EF ſenkrecht auf AD. Dann halbire man den Winkel ACD durch die gerade CF, welche EF in F treffe. Durch F ziehe man die parallele FH mit AD an die verlängerte CA in H, ſo iſt CH der verlangte Halbmeſſer.

29. Die CF ſchneide AD in G. Es iſt AC : AG = CH : HF. Auch iſt wegen des halbirten Winkels ACD, AC : CD = AG : GD, (Dreyeck 9.) und daraus AG : AC + CD = AG : AD. Folglich aus beiden Proportionen CH : HF = AC + CD : AD. Da HF $= \frac{1}{2}$ AD, ſo iſt CH $= \frac{1}{2}(AC + CD)$, alſo AH $= \frac{1}{2}(CD - AC)$, und

$$CH \cdot AH = \frac{1}{4}(CD^2 - AC^2) = \frac{1}{4} AD^2.$$

30. Dieſes führt unmittelbar auf die Carteſiſche Conſtruction, wodurch man ſich dem verlangten Halbmeſſer des gegebenen Kreisumfanges (in jener dem Durchmeſſer) ſchnell nähert. Die Linie FH tritt an die Stelle von AD, und ſo wird aus jeder halben Vielecksſeite und dem zugehörigen Halbmeſſer ein folgender Halbmeſſer mit der zugehörigen Polygonſeite gefunden.

31. Die Folge der Halbmeſſer, wie CA, CH etc. ſey a, b, c, d, etc. die zugehörigen halben Polygonſeiten ſey p, q, r, s, etc. deren jede halb ſo groß iſt, als die nächſt vorhergehende, ſo iſt

$$b(b - a) = \frac{1}{4}p^2; \quad c(c - b) = \frac{1}{4}q^2;$$

$$d(d-c) = \frac{1}{4} r^2; \quad e(e-d) = \frac{1}{4} s^2; \text{ etc.}$$

oder, wenn AD = CA, d. i. p = a genommen wird,

$$b(b-a) = \frac{1}{4} a^2;$$

$$c(c-b) = \frac{1}{4} b(b-a);$$

$$d(d-c) = \frac{1}{4} c(c-b);$$

$$e(e-d) = \frac{1}{4} d(d-c). \text{ etc.}$$

Daraus iſt

$$b = \frac{a + \sqrt{2aa}}{2}; \quad c = \frac{b + \sqrt{(2bb-ab)}}{2};$$

$$d = \frac{c + \sqrt{(2cc-bc)}}{2}, \text{ etc.}$$

Die Gränze dieſer Größen iſt der Halbmeſſer des Kreiſes, deſſen Umfang = 8a iſt.

32. Man ziehe in dem Rechteck AGFH (Fig. 7.) die Diagonale AF, ſo iſt das Dreyeck AHF ähnlich dem Dreyeck FHC. Denn da CH . AH = $\frac{1}{4}$ AD² = HF² iſt, ſo iſt CH : HF = HF : AH. Daher iſt der Winkel AFH = HCF. Folglich iſt AH = FH . tg $\frac{1}{2}\alpha$, und $b = a + \frac{1}{2} \text{tg.} \frac{1}{2} \alpha$.

Auf gleiche Art iſt $c = b + \frac{1}{4} p \tang \frac{1}{4}\alpha$; d =

$c + \frac{1}{8}$ p tang $\frac{1}{8}\alpha$; e $= d + \frac{1}{16}$ p tg $\frac{1}{16}\alpha$.

Oder:

$a = p \cot \alpha$.

$b = p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \text{tang} \frac{1}{2} \alpha)$.

$c = p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \text{tg} \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \text{tg} \frac{1}{4} \alpha)$.

$d = p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \text{tg} \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \text{tg} \frac{1}{4} \alpha$

$+ \frac{1}{8} \text{tang} \frac{1}{8} \alpha)$. u. ſ. w.

33. Die unendliche Reihe $p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \text{tg} \frac{1}{2} \alpha$ $+ \frac{1}{4} \text{tg} \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{8} \text{tg} \frac{1}{8} \alpha + \frac{1}{16} \text{tg} \frac{1}{16} \alpha$ + etc.) giebt den Halbmeſſer eines Vielecks von unendlich vielen Seiten, das iſt, eines Kreiſes, deſſen Umfang demjenigen des Vielecks mit der Seite 2p gleich, oder = 2np iſt, wenn die Anzahl der Seiten = n oder $\alpha = \frac{\pi}{n}$ iſt.

34. So wie $a = p \cdot \cot \alpha$, und $b = \frac{1}{2} p \cot \frac{1}{2} \alpha$ iſt, ſo iſt $c = \frac{1}{4} p \cot \frac{1}{4} \alpha$, $d = \frac{1}{8} p \cot \frac{1}{8} \alpha$, u. ſ. f. Setzt man für b, c, d, etc. dieſe ihre Werthe, ſo erhalten wir den goniometriſchen Lehrſatz,

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.$$

$$\frac{1}{4}\cot\frac{1}{4}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha.$$

$$\frac{1}{8}\cot\frac{1}{8}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{1}{8}\alpha.$$

und

$$\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{1}{8}\alpha \ldots + \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\alpha.$$

Da $\cot\alpha - \operatorname{tang}\alpha = 2\cot 2\alpha$. (Goniometrie 44.), ſo iſt

$$\operatorname{tang}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha \ldots + \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\alpha$$

$$= \frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}\alpha - 2\cot 2\alpha.$$

35. Für ein unendliches n iſt $\cot\frac{1}{n}\alpha$ oder $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{n}\alpha}$

$= \frac{n}{\alpha}$, und es iſt alſo

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha \cdot + \text{etc.} =$$

$$\frac{1}{\alpha} - 2\cot 2\alpha.$$

36. Für $\alpha = 45^\circ$ iſt $\cot 2\alpha = 0$, und

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{16}\pi + \text{etc.} = \frac{4}{\pi}$$

37. Dieſe Sätze laſſen ſich auch, ohne eine geometriſche Conſtruction zu Hülfe zu nehmen, wie hier gelegentlich geſchehen iſt, aus der Formel, $\operatorname{tang}\alpha = \cot\alpha - 2\cot 2\alpha$, (Goniometrie, 44.), herleiten, wenn darin folgeweiſe für α geſetzt wird $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{8}\alpha$, u. ſ. f.

38. Die Differentiation der Reihe,

$$\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varphi \ldots = \frac{1}{\varphi} - 2\cot 2\varphi$$

giebt (Differentialformel, 38.)

$$\sec\varphi^2 + \frac{1}{4}\sec\frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{4^2}\sec\frac{1}{4}\varphi^2 + \frac{1}{4^3}\sec\frac{1}{8}\varphi^2 \text{ etc.} = \frac{1}{\sin\varphi^2 .\ \cos\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^2}.$$

39. Aus der Formel, $\operatorname{cosec} 2\varphi = \cot\varphi - \cot 2\varphi$ (Goniometrie, 49.), wird auf ähnliche Art hergeleitet,

$$\operatorname{cosec} 2\varphi + \operatorname{cosec} 4\varphi + \operatorname{cosec} 8\varphi + \operatorname{cosec} 16\varphi + \text{etc.} = \cot\varphi - \cot 2^n\varphi.$$

40. Joh. Bernoulli giebt folgende Conſtruction an, einen Kreisbogen zu finden, der einer gegebenen geraden Linie gleich ſey, in einem Aufſatze de motu reptorio et transformatione curvarum, Opp. T. I. p. 446. Commerc. epist. T. II. p. 176. Es ſey AP (Fig. 8) die gegebene gerade, BC eine darauf ſenkrechte. Man ziehe AC willkührlich, und nehme CB = CA; halbire AB in D und ziehe

CD; nehme CE = CD, halbire DE in F, und ziehe CF; nehme CG = CF, halbire FG in H, und ziehe CH. So fahre man fort. Die Gränze der aus C gezogenen Linien ſey CR, ſo iſt der Kreisbogen RS, welcher mit dem Halbmeſſer CR innerhalb des Winkels ACB beſchrieben wird, der gegebenen geraden AP gleich.

Bernoulli führt dieſe Conſtruction nur gelegentlich an. Man ſieht nicht wohl wie ſie mit der Materie, wovon er handelt, zuſammenhängt. Ein directer, goniometriſcher Beweis folgt hier.

41. Es ſey AC = r; der Winkel ACB = φ,

ſo iſt $CD = r \cos \frac{1}{2} \varphi$; $CF = r \cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi$;

$CH = r \cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi . \cos \frac{1}{8} \varphi$. Setzt man dieſe Multiplicationen durch die Coſinus der halbirten Winkel fort, ohne Ende, und bezeichnet CR durch R, ſo iſt

$$R = r \cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi . \cos \frac{1}{8} \varphi . \cos \frac{1}{16} \varphi . \text{ꝛc.}$$

Man entwickele dieſes Product ſucceſſiv, ſo entſteht eine Reihe von Coſinus, deren Winkel eine arithmetiſche Fortſchreitung bilden.

Nämlich I. $\cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi =$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{4} \varphi + \cos \frac{3}{4} \varphi \right).$$

II. $\cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi . \cos \frac{1}{8} \varphi =$

$$\frac{1}{4}\left(\cos\frac{1}{8}\varphi + \cos\frac{3}{8}\varphi + \cos\frac{5}{8}\varphi + \cos\frac{7}{8}\varphi.\right)$$

III. $\cos\frac{1}{2}\varphi \ldots \cos\frac{1}{16}\varphi = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{1}{16}\varphi + \cos\frac{3}{16}\varphi \ldots + \cos\frac{13}{16}\varphi + \cos\frac{15}{16}\varphi\right).$

und allgemein

$$\cos\frac{1}{2}\varphi \ldots \cos\frac{1}{m}\varphi = \frac{2}{m}\left(\cos\frac{1}{m}\varphi + \cos\frac{3}{m}\varphi \ldots + \cos\frac{m-3}{m}\varphi + \cos\frac{m-1}{m}\varphi\right).$$

Die Fortſchreitung erhellt aus der Formel,

$$\cos A . \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B),$$

(Goniometrie, 27.). Was für eine der ſpeciellen Reihen gilt, gilt auch für die nächſt folgende.

Die Summe der letzten Reihe mit dem Factor $\frac{2}{m}$ iſt $= \frac{\sin\varphi}{m \sin\frac{1}{m}\varphi}$, (Goniometrie, 64.), wo $a = \frac{1}{m}\varphi$, $b = \frac{2}{m}\varphi$, $n = \frac{1}{2}m - 1$ iſt.

Iſt m unendlich, ſo wird das Product der Coſinus $= \frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Es iſt alſo $R = \frac{r \sin \varphi}{\varphi}$, oder $R\varphi = r \sin \varphi$. Nun iſt aber $R\varphi$ der Kreisbogen RS (21.) und $r \sin \varphi$ die gerade AP.

Kürzer erhält man den Werth des Products der Coſinus folgendermaßen. Es iſt

$\sin \varphi = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \,.\, \cos \frac{1}{2} \varphi$; ferner $\sin \frac{1}{2} \varphi$ $= 2 \sin \frac{1}{4} \varphi \,.\, \cos \frac{1}{4} \varphi$; wiederum $\sin \frac{1}{4} \varphi$ $= 2 \sin \frac{1}{8} \varphi \,.\, \cos \frac{1}{8} \varphi$, u. ſ. w. Alſo iſt $\sin \varphi$ $= 2^n . \sin \frac{1}{2^n} \varphi \,.\, \cos \frac{1}{2} \varphi \,.\, \cos \frac{1}{4} \varphi \quad \cos \frac{1}{8} \varphi$ $\ldots \cos \frac{1}{2^n} \varphi$. Die Gränze dieſes Products iſt $\sin \varphi$ $= \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi \,.\, \cos \frac{1}{4} \varphi \,.\, \cos \frac{1}{8} \varphi . \cos \frac{1}{16} \varphi$. etc. in infin.

Bernoulli bemerkt noch, daß die Puncte D, F, H. etc. in einer Quadratrix der Alten liegen, welches auch wie Euler angemerkt hat, mit den Puncten D, F, etc. (Fig. 7.) der Fall iſt.

41* Da nach dem vorigen

$$\varphi = \sin \varphi \,.\, \sec \frac{1}{2} \varphi . \sec \frac{1}{4} \varphi . \sec \frac{1}{8} \varphi \ldots\ldots$$

alſo

$$\log \varphi = \log \sin \varphi + \log \sec \frac{1}{2} \varphi + \log \sec \frac{1}{4} \varphi + \ldots$$

ſo kann vermittelſt dieſer Formel der Logarithme eines Bogens aus den ſchon berechneten Logarithmen der Sinus und Secanten gefunden werden. Die Reihe nähert ſich übrigens deſto ſchneller der Gränze ihrer Summe, je kleiner der Bogen φ iſt.

$$\text{Für } \varphi = 1^\circ = \frac{1}{180}\pi \text{ iſt}$$

$$\log \sin \varphi = 8,241\,8553$$

$$\log \sec \frac{1}{2}\varphi = 0,000\,0165$$

$$\log \sec \frac{1}{4}\varphi = 0,000\,0041$$

$$\log \sec \frac{1}{8}\varphi = 0,000\,0010$$

$$\log \sec \frac{1}{16}\varphi = 0,000\,0003$$

$+ 1$ (Wegen der weggelaſſenen Glieder.)

$$\log \varphi = 8,241\,8773$$

Weil $\pi = 180\,\varphi$, alſo $\log \pi = \log 180 + \log \varphi$, ſo wird $\log \pi = 2,2552725 + 8,2418773 = 0,4971498$.

42. Da die Geſchichte der Bemühungen, den Umfang des Kreiſes ſo genau als möglich zu finden, und die Wege dazu abzukürzen, in dem Artikel, Cyklotechnie, erzählt iſt, ſo bleibt hier nur übrig, einiges von den fehlerhaften Angaben des Verhältniſſes des Kreiſes zum Durchmeſſer beyzufügen. Eben ſo wie die Verwandlung der Metalle und das Perpetuum mobile von vielen Leuten eifrig geſucht iſt, welche weder Chemie noch Mechanik verſtanden, ſo iſt auch die Quadratur des Kreiſes meiſtens von Leuten geſucht, die nicht die Elemente der Geometrie gehörig inne hatten.

Einige mögen geglaubt haben, daß auf die Quadratur des Kreiſes, wie auf die Auflöſung der Aufgabe, die Meereslänge zu finden, ein Preis geſetzt wäre, wodurch ſie alſo zugleich Ehre und Gewinnſt zu erlangen ſich einbildeten.

Gelehrte Geſellſchaften haben ſich genöthigt geſehen zu erklären, daß ſie gar keine ſogenannten Erfindungen der Quadratur des Kreiſes annehmen würden, weil ſie mit zu vielen waren beläſtigt worden.

43ª. Der erſte, welcher nach Wiederherſtellung der Wiſſenſchaften die Quadratur des Kreiſes eifrigſt geſucht hat, iſt der Cardinal Nicolaus de Cuſa oder Cuſanus (geſt. 1464). Er hat ſie wiederholentlich vorgenommen. In der Schrift: de mathematicis complementis ſucht er den Halbmeſſer eines Kreiſes von gegebenem Umfange ſo zu beſtimmen. Er ſtellt ſich eine Reihe regulärer Vielecke, die gleichen Umfang haben, vom Dreyecke an, mit den in und um ſie beſchriebenen Kreiſen vor. Den Halbmeſſer des innern Kreiſes nennt er die erſte, des äußern die zweyte Linie. Dieſe Linien, bemerkt er, ſind um ſo mehr von einander unterſchieden, je größer die Seite des Vielecks iſt, differiren alſo am meiſten bey dem Dreyecke, und fallen beym Kreiſe zuſammen. Die erſte Linie iſt beym Dreyecke am kleinſten, und wird für die auf das Dreyeck folgenden Vielecke größer, die zweyte Linie hingegen iſt beym Dreyecke am größten, und wird in den folgenden Vielecken kleiner. Auch verhält ſich der Überſchuß der Fläche eines Vielecks über diejenige des iſoperimetriſchen Dreyecks wie der Unterſchied der erſten Linien in dem Vielecke und Dreyecke. Ferner, je kleiner der Unterſchied der erſten und zweyten Linie in einem Vielecke iſt, deſto mehr übertrifft die erſte Linie des Vielecks die des iſoperimetriſchen Dreyecks, mithin übertrifft, weil im Kreiſe erſte und zweyte Linie gleich ſind, der Halbmeſſer des iſoperimetriſchen Kreiſes die erſte Linie des Dreyecks am meiſten, folglich iſt der

Überſchuß der Fläche des Kreiſes über die des Dreyecks am größten, und nimmt bey den folgenden Vielecken ab. Nun iſt auch der Unterſchied der erſten und zweyten Linie im Dreyecke am größten, und wird bey den folgenden Vielecken kleiner. Nimmt man alſo an, daß der Überſchuß der Fläche des Kreiſes über die eines Vielecks von gleichem Umfange mit dem Kreiſe, ſich wie der Unterſchied der erſten und zweyten Linie des Vielecks verhält, ſo läßt ſich aus der erſten und zweyten Linie irgend zweyer iſoperimetriſcheen Vielecke der Halbmeſſer eines Kreiſes, welcher mit den beiden Vielecken einerley Umfang hat, herleiten.

Ich habe Cuſans Schlüſſe vollſtändig dargeſtellt, weil ſein Verfahren in der That ſinnreich iſt, und auf derſelben Idee beruht, die der Carteſiſchen Conſtruction (27) zum Grunde liegt. Der geſuchte Halbmeſſer wird nun ſo gefunden. Es ſey p der gemeinſchaftliche Umfang der beiden Vielecke und des Kreiſes, a, b erſte und zweyte Linie für das eine, a′, b′ für das andere Vieleck, r der Halbmeſſer des Kreiſes, ſo iſt $\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}ap : \frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}a'p = b - a : b' - a'$, woraus $r = \frac{a'b - ab'}{a' - a + b - b'}$. Cuſan lehrt den Halbmeſſer r durch eine ganz richtige Conſtruction finden, wobey er die erſten und zweyten Linien des Drey- und Vierecks gebraucht. Die Rechnung giebt hiernach das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, wie $1 : 4 + 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{6}$ d. i. $1 : 3{,}154192$, welches alſo ſchon in der zweyten Decimalſtelle unrichtig iſt. Vielecke, deren Seitenzahl größer iſt, welche alſo näher an den Kreis fallen, würden es richtiger geben. Das Fünf- und Sechseck giebt $\pi = 3{,}143534$. Cu-

ſan hält übrigens ſelbſt die dargeſtellte Methode nicht für zuverläſſig, und verweiſt deshalb auf andere ſeiner Erfindungen.

In der Schrift de transmutationibus geometricis giebt Cuſan folgende Conſtruction zur Verwandlung einer gegebenen geraden Linie in die Peripherie eines Kreiſes an. Man beſchreibe ein gleichſeitiges Dreyeck, deſſen Umfang der gegebenen Linie gleich ſey, und ziehe aus dem Mittelpuncte deſſelben an die Grundlinie eine gerade Linie, welcher von dieſer den vierten Theil abſchneidet. Setzt man dieſer Linie den vierten Theil ihrer Länge zu, ſo erhält man den Halbmeſſer eines Kreiſes, deſſen Umfang dem des Dreyecks, alſo der gegebenen geraden Linie gleich iſt. Nach dieſer Conſtruction iſt $\pi = 3,142337$; welches etwas genauer als $\frac{22}{7}$ iſt.

Eine gerade Linie ſo groß als der Umfang eines gegebenen Kreiſes zu finden, lehrt Cuſan in der ſchon angezogenen Schrift de math. complem. Man ſoll in dem Kreiſe zwey auf einander ſenkrechte Durchmeſſer, einen horizontalen und verticalen ziehen, auf den verticalen von dem einen Endpuncte an die Sehne des Bogens von 120° auftragen, und mit derſelben einen Kreis, welchen der gegebene von innen berührt, beſchreiben, ſo ſchneide ſolcher von dem an beiden Seiten verlängerten horizontalen Durchmeſſer ein Stück ab, welches dem halben Umfange des gegebenen Kreiſes gleich ſey. Dieſe Conſtruction ſetzt das Verhältniß des Durchmeſſers zur Peripherie, wie 1 : 3,13949 voraus.

In einem beſondern Aufſatze über die Quadratur des Kreiſes ſetzt Cuſan die Peripherie eines gegebenen Kreiſes gleich dem Umfange eines gleichſeitigen Dreyecks, welches in einem Kreiſe beſchrieben worden, der die Summe der Sehne des Quadranten und des Halbmeſſers in dem gegebenen Kreiſe zum Durchmeſſer hat.

Hiernach iſt $\pi = 3,13615$. Man ſieht, daß Cuſan die Reſultate ſeiner verſchiedenen Quadrirungsmethoden nicht ſcharf zu vergleichen gewußt hat, weil er ſonſt ihre Unrichtigkeit entdeckt haben würde. Dieſe iſt von Regiomontan in einem Anhange zu dem Werke: de triangulis, Norimb. 1533. weitläufig gezeigt worden.

Noch iſt ein von Cuſanus in der Abhandlung de mathematica perfectione aufgeſtellter Satz, wonach die Länge eines Kreisbogens φ durch ſeinen Sinus und Coſinus ſo beſtimmt wird, daß $\varphi = \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}$ iſt, deswegen merkwürdig, weil es der erſte der von Snellius zur leichteren Berechnung des Kreisumfangs gegebenen Sätze iſt. (S. den Art. Cyklotechnie in dem Iſten Th. dieſes Wörterbuchs. S. 651.). Die Art, wie Cuſan zu dieſem Satze gelangt, iſt folgende. Er betrachtet ein rechtwinkliges Dreyeck, deſſen Hypotenuſe a, Perpendicularſeite b, Grundlinie c ſeyn mag. Cuſan nennt dieſe Seiten nach der Ordnung erſte, zweyte, dritte Linie, und ſetzt b nicht größer als c. Mit a ſey aus der Spitze des Winkels B, welchem b entgegenſteht, ein Kreisbogen, der den genannten Winkel mißt, beſchrieben. Die Länge dieſes Bogens iſt $a\varphi$, wenn φ die Länge des ähnlichen Bogens für den Halbmeſſer 1 iſt. Nun ſagt Cuſan: wenn B am kleinſten ſey, d. i. verſchwinde, ſo ſey $a\varphi : b = 1 : 1$; aber in dieſem Falle auch $a = c$, mithin $a : c = 1 : 1$, folglich $a\varphi : b = a : c$. Wenn aber B am größten, nämlich 45°, und $a - c$ ebenfalls am größten, ſo ſey zwar nicht $a\varphi : b = a : c$; aber in dieſem Falle müſſe es eine Linie x geben, welche zu a und c geſetzt das Verhältniß $a + x : c + x$ dem von $a\varphi : b$ gleich mache. Und da, was auch x für eine Größe habe, auch noch in dem Falle des kleinſten B, wo $a = c$, $a\varphi : b = a + x : c + x = a : c$ ſey, ſo gelte der Satz beym

größ-

größten und kleinſten Dreyecke, folglich auch von allen Zwiſchendreyecken. Wenn man alſo x für die beiden Fälle, wo $B = 45°$ und $= 30°$ iſt, beſtimmen könne, ſo habe man es für alle rechtwinklige Dreyecke gefunden. Cuſan ſucht nun auf mehrerley Arten, die freylich nicht recht klar ſind, zu zeigen, daß $x = 2a$ ſeyn müſſe. Sein letzter Beweis iſt von einem gleichſchenkligen rechtwinkligen Dreyecke hergenommen, wo er $a =$ 7 und $b = c = 5$ nächſtens, den Bogen $a\varphi = 5\frac{1}{2}$ nach Archimeds Beſtimmung von $\pi = \frac{22}{7}$, ſetzt. Eine Beſtimmung von x, ohne π zu kennen, läßt ſich ſo erhalten. Da $b = a \sin\varphi$, $c = a\cos\varphi$, ſo iſt $a\varphi : b = \varphi : \sin\varphi$. Man ſetze alſo $\varphi : \sin\varphi = 1 + x : x + \cos\varphi$, ſo hat man für $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ oder $30°$, $\frac{1}{6}\pi : \frac{1}{2} = 1 + x : x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$; für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ oder $45°$, $\frac{1}{4}\pi : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 + x : x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. woraus durch Zuſammenſetzung wird $\frac{1}{6}\sqrt{2} : \frac{1}{4} = x + \frac{1}{2}\sqrt{2} : x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Hieraus findet ſich $x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3\sqrt{2} - 4} = 1{,}913$ alſo ſehr nahe $= 2$; demnach $\varphi : \sin\varphi = 3 : 2 + \cos\varphi$.

Über Cuſanus und ſeine Quadraturen des Kreiſes zu vergl. Käſtners Geſch. der Math., B. I S. 400 — 416 und S. 477 — 481.

43[b]. Orontius Finäus, Profeſſor der Mathematik in Paris (geſt. 1555) wollte das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange auf mehrere neue Arten angeben, unter andern auch durch eine Conſtruction, woben er den Durchmeſſer nach dem äußern und mittlern Verhältniß eintheilte, das kleinere Stück und jedes folgweiſe übrige kleinere, eben ſo. Da er aber hierbey das Verhältniß 1 : $3\frac{1}{78}$ (d. i. 1 : 3, 14 102) gebrauchte, ſo war die Genauigkeit, mit welcher er eine gerade Linie dem Quadranten nahe gebracht zu haben glaubte, nur ſcheinbar. Sein Buch führt den Titel: De rebus mathematicis hactenus desideratis. Paris, 1556. Käſtners Geſch. der Math. 1. Bd. S. 454. ff.

44. Simon a Quercu glaubte durch folgende Conſtruction, die Länge des Quadranten angeben zu können. Im Kreiſe ziehe man einen Durchmeſſer, an deſſen einem Ende eine berührende, von dem andern Ende eine gerade, in einer ſolchen Lage, daß das von ihr innerhalb des Kreiſes befindliche Stück ſo groß ſey als das auf der berührenden abgeſchnittene. Dieſes Stück (oder jenes) ſoll dem Quadranten des Kreiſes gleich ſeyn. Es giebt denſelben = 0,78615 des Durchmeſſers ſtatt 0,78539 . . . Man bemerke inzwiſchen, daß für dieſe Lage der Coſinus des Winkels, welchen die Linie mit dem Durchmeſſer macht, der Tangente deſſelben gleich iſt. Käſtners Geſch. der Math. 1. B. S. 481 und 632. Es iſt auch merkwürdig, daß das Perpendikel von dem geſuchten Puncte des Umfanges den Durchmeſſer nach dem äußern und mittlern Verhältniſſe theilt.

45. Joſeph Scaliger, ein großer Vielwiſſer ſeiner Zeit (geſt. 1609), von dem man ein gelehrtes Werk über die Chronologie hat, wagte ſich auch an die Mathematik, weil er viel Griechiſches und Lateiniſches geleſen hatte. Von ihm ſind Cyclometriae elementa duo. Lugd Batav 1694. fol 122 p. Er fehlt aber ſehr gröblich. Denn er behauptete, daß

der Umfang des in einem Kreiſe eingeſchriebenen ordentlichen Zwölfecks größer ſey, als der Umfang des Kreiſes, und bey Vielecken von mehrern Seiten noch vielmehr. Nun bemerkt er zwar ſelbſt, daß dieſes ein großes Paradoxon in der Geometrie ſey, daß allerdings ein Bogen größer ſey als ſeine Chorde, indeſſen die Rechnung zeige es doch anders. Der gelehrte Mann bedachte nicht, daß die Arithmetik und Geometrie ſich nicht widerſprechen können, und daß ein Rechnungsfehler von ihm müſſe begangen ſeyn, wenn nicht in den Ziffern, doch in der Form der Rechnung. Er berechnet für einen Durchmeſſer = 16 den Sinus verſus des Bogens von 30°, der Sinus = 4 geſetzt. Dabey fehlt er auf zweyerley Art. Um ſeine Figur nicht zu gebrauchen, ſey der Durchmeſſer = d, alſo der Sinus von 30° $= \frac{1}{4}$ d; ferner der Sinus verſus = v, die Seite des Zwölfecks = z, ſo iſt $z^2 = \frac{1}{16} d^2 + v^2$. Nun ſagt Scaliger, das Quadrat von dem Umfange des Zwölfecks ſey größer, als das von $12 \times \frac{1}{4}$ d (oder 3d), um $12v^2$, da er hätte ſetzen ſollen, um $144 v^2$. Dann hätte er freylich nach ſeiner Rechnungsart den Überſchuß des Zwölfecks über den Kreisumfang noch größer gefunden. Allein er nimmt aus einer Größe wie $a^2 + b^2$ die Wurzel gleich a + b an, welches ſehr fehlerhaft iſt, beſonders in dem gegenwärtigen Falle. Er ſetzt $v = 1\frac{1}{13}$, welches zu viel iſt, und addirt die Wurzel aus $12v^2$ zu dem dreyfachen des Durchmeſſers. Da $\sqrt{12 v^2} = 3,73$ iſt, ſo iſt nach dieſer Rechnung der Umfang des Zwölfecks beträchtlich mehr als $\frac{51}{16}$ des Durchmeſſers. Nun nimt

Scaliger, der Archimediſchen Rechnung zufolge, die er ſonſt verwirft, an, daß der Umfang des Kreiſes kleiner ſey, als $\frac{51}{16}$ des Durchmeſſers. So findet er den Satz, über welchen er ſich ſelbſt wundert. Gleich nach dieſem Satze trägt er folgenden nicht weniger unerwarteten vor. Das Quadrat von dem Umfange des Kreiſes iſt das zehnfache des Quadrats von dem Durchmeſſer. Das gäbe das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange, wie 1 : 3,1622776 . . . Scaliger macht in dem geometriſchen Beweiſe folgenden Schluß, $A = B$, und $C = D$, alſo $C = B$. Das Verhältniß $1 : \sqrt{10}$ wird auch, wie Purbach in ſeinem Tractat von den Sinus und Chorden meldet, bey den Indiern angenommen. Auch von den Arabern, wie Krafft, Geom. subl. §. 118. anführt. Charles de Bovelles hat in ſeiner praktiſchen Geom. Paris 1542, es auch gebraucht.

Daß Scaliger mit ſeiner Quadratur ziemlich verlacht worden iſt, und daß ſein kritiſcher Stolz ſich nicht beugen laſſen wollte, iſt leicht zu erachten. Er ſuchte ſich in einem Anhange zu ſeiner Schrift zu vertheidigen, wobey er einige von ihm begangene Fehler zugab. Übrigens blieb er dabey, daß Archimedes gefehlt habe. Von Scaligers Quadratur des Kreiſes ausführlich in Käſtners Geſchichte der Mathematik. Bd. I. S. 487—497, und S. 505—511. Clavius und Vieta haben ſie ſtreng geprüft und widerlegt. Auch Adrian Romanus hat in ſeiner Apologia pro Archimede, die Unrichtigkeit der Quadraturen von Scaliger, Orontius Finäus und Simon a Quercu gezeigt.

46ª. **Porta**, der durch ſeine Experimentaluntersuchungen und durch ſeine Vergleichung des Auges mit der Camera obſcura bekannt iſt, hat 3 Bücher Elementorum curvilineorum. Romae 1610. 4. herausgegeben, in denen die Quadratur des Kreiſes ver-

heißen wird. Der 17te Satz des 3ten Buches iſt: Datum circulum quadrare. Porta beſchreibt in einen Halbkreis, indem er den Halbmeſſer dreymahl als Sehne einträgt, ein Trapez mit zwey parallelen Seiten, deſſen Grundlinie der Durchmeſſer iſt. Über jeder der drey gleichen Seiten dieſes Trapezes, conſtruirt er ein Dreyeck, in welchem die Winkel an der Grundlinie 60° und 45° faſſen, der an Spitze 75° hält. Der Reſt, welcher nach Wegnahme dieſer drey gleichen Dreyecke von dem Trapez übrig bleibt, ſoll dem vierten Theile des Halbkreiſes gleich ſeyn. Das iſt aber weit gefehlt. Denn das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange, welches ſich daraus ergiebt, iſt 1 : 2,78461.

46ᵇ. Philipp Lansberg, der als Aſtronom, aber nicht ſehr vortheilhaft bekannt iſt, (geſt. zu Middelburg 1632) gab heraus: Cyclometriae novae libri duo, Middelburgi 1616, worin er nicht ſowohl die Quadratur des Kreiſes, als vielmehr eine bequeme geometriſche Annäherung zu derſelben lehren wollte. Es ſey AB (Fig. 9.) ein Quadrant; dieſer und der Halbmeſſer CB werden in gleich viele Theile getheilt; ein ſolcher Theil ſey auf jenem AD, auf dieſem CE; man ziehe ED, welche die in A berührende AT in F ſchneide, ſo iſt nach Landsberg AF dem Bogen AD nahe gleich. Dieſe AF wird nun leicht berechnet, wenn der Sinus und Coſinus des Bogens AD bekannt ſind. Denn man ziehe DG ſenkrecht auf CA, und EH derſelben parallel, welche DG in K ſchneide, ſo iſt EK : KD = EH : FH, und AF = FH + HA = FH + CE. Zu dieſem Zweck hat er eine Tafel der Chorden, oder der doppelten Coſinus der Winkel, die durch fortgeſetzte Halbirung des rechten bis zur 46ſten entſtehen, für einen Halbmeſſer, 10^{54}, berechnet, woraus er dann auch für jeden Fall den Sinus eines Bogens finden kann. Nun berechnet Lansberg für einen Halbmeſſer 10^{45}, den Bogen, welcher der 2^{45}ſte Theil des Qua-

dranten iſt, und findet die 29 erſten Decimalſtellen mit den Ludolphſchen Ziffern übereinſtimmend.

47. Man kann dieſe Annäherung leicht prüfen. Es ſey AD der nte Theil des Quadranten, der zugehörige Winkel $= \varphi$, ſo iſt $\varphi = \frac{\pi}{2n}$. Der Halbmeſſer CA ſey $= 1$, ſo iſt

$$\cos\varphi : \sin\varphi - \frac{1}{n} = 1 : HF, \text{ und}$$

$$AF = \frac{1}{n} + tg\,\varphi - \frac{1}{n}\sec\varphi. \text{ Nun iſt}$$

$$tang\,\varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{15}\varphi^5 + \text{etc. und}$$

$$\sec\varphi = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{5}{24}\varphi^4 + \text{etc.}$$ Alſo iſt

$$AF = \varphi - \frac{\varphi^2}{2n} + \frac{1}{3}\varphi^3 - \text{etc. oder}$$

$$AF = \varphi - \frac{\varphi^3}{\pi} + \frac{1}{3}\varphi^3 - \text{etc.}$$

wo das zweyte und dritte Glied ſich faſt aufheben. Die Lansbergiſche Annäherung iſt daher bey kleinen Bogen genau genug. Man ſehe auch Käſtners Geſchichte der Mathematik. Bd. III. S. 59. Bd. IV. S. 415.

48ª. Chr. Severin Longomontanus, Profeſſor der höheren Mathematik zu Kopenhagen, der ein ſehr nützlicher Gehülfe Tycho's geweſen war, (geſt. 1647.), gab mehrere Schriften über ſeine vermeintliche Quadratur des Kreiſes heraus, von welchen Käſtner in der Geſch. der Mathem. Bd. III. S. 57. 58 drey an=

führt. Noch iſt von ihm Inventio quadraturae circuli, Hafniae 1624. 154 p. 4to Ich habe verſucht mir von ſeiner Methode einen Begriff zu machen, konnte aber wegen des verworrenen Vortrags nicht dazu gelangen. Der Verf. behauptet S. 103, daß der Durchmeſſer ſich zum Umfange verhalte, wie

$\sqrt{616\frac{1}{3}}:78$, das iſt, wie er es angiebt 1:3,141859604427,

welches ſchon in der vierten Decimalſtelle irrig iſt. Das umſchriebene Sechseck ſoll ſich zum Kreiſe verhalten, wie 43 : 39. Der Verfaſſer iſt von der Richtigkeit ſeiner Quadratur des Kreiſes ſo ſehr überzeugt, daß er am Ende der Vorrede Gott innigſt dankt, der ihn in ſeinem hohen Alter noch die wichtige Aufgabe aufzulöſen geſtärkt habe.

48^{b}. Der bekannte Philoſoph Hobbes (geſt. 1679) gehört auch mit in die Reihe der unglücklichen Cirkelquadrirer. Bey ſeinen Problematis physicis, worin er die Schwere, die Ebbe und Fluth u. d. g. erklären will, befinden ſich Propositiones XVI de magnitudine Circuli. Darin giebt er Prop. II. eine Conſtruction, nach der die Länge des Quadranten ſo viel als der Halbmeſſer und die Tangente des Bogens von 30° zuſammengenommen beträgt, welches auf das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange, wie 1 : 3,1547 führt. In Prop. XV. lehrt er ein Quadrat in einen Kreis zu verwandeln, und ſetzt den Halbmeſſer des Kreiſes der Linie gleich, welche von der Mitte des Quadrats an die Grundlinie ſo gezogen iſt, daß ſie von dieſer den vierten Theil abſchneidet. Dies giebt das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, wie 5 : 16 oder wie 1 : 3, 2. Daſſelbe Verhältniß wendet Hobbes Prop. XVI. an, wo er einen Kreis in ein Quadrat verwandelt. — Als Wallis und Huygens dieſe Quadratur widerlegten, ſchrieb Hobbes die Schrift de principiis et ratiocinatione geometrarum, contra fastum Professorum geometriae, worin er al-

lerley an den Grundbegriffen der Geometrie auszuſe-
tzen hat, den Arabern, welche das Verhältniß des Durch-
meſſers zum Umfang $= 1 : \sqrt{10}$ ſetzten, beyfällt, und
um ſeinen Satz von der Länge des Quadranten aufrecht
zu erhalten, nicht nur den Pythagoriſchen Lehrſatz in
Zweifel zieht, ſondern auch, gleich Longomontan, die
Richtigkeit der trigonometriſchen Tafeln angreift, wie er
denn die Tangente von $30° = 0{,}5811 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$ ſtatt 0,5773 . . . ſetzt.

49. Gregorius a St. Vincentio (geb. zu Brügge 1584, geſt. zu Gent 1667), einer der ſcharfſinnig-ſten und arbeitſamſten Geometer ſeiner Zeit, iſt unter denjenigen, welche die Quadratur des Kreiſes geſucht haben, der merkwürdigſte. Er hat ungeheure Mühe darauf verwandt. Da es ihm nicht geglückt iſt, ſo mag man ſagen, daß ſie ſchwerlich zu finden ſey. Sein großes geometriſches Werk, das nebſt den Unterſuchungen zur Quadratur des Kreiſes viele geometriſche, auch neue Lehren, beſonders über die Kegelſchnitte enthält, führt den Titel: Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, Antwerpiae 1647. fol. Er hat darin vier Methoden, den Kreis zu quadriren angegeben. Huygens, der nebſt andern eine Widerlegung dieſer neuen Methoden bekannt machte, prüfte blos die erſte, weil die andern auf demſelben Grunde mit jener beruhen, und dieſe noch die deutlichſte iſt. Gregorius hat eigentlich nicht den Kreis quadrirt, wie er dann auch kein beſtimmtes Verhältniß des Umfanges zum Durchmeſſer angiebt, ſondern er hat nur Wege angezeigt, auf welchen man zu der Quadratur möchte gelangen können. Auf dem erſten derſelben ſuchte er, die Aufgabe auf die Cubirung eines Körpers zu bringen. Sein Verfahren läßt ſich durch die neuere Analyſis leicht darſtellen.

50. Man bilde einen Körper über der Hälfte einer Parabel als Grundfläche, deren Gleichung ſey

ax = yy. Durch die Axe derſelben ſetze man dieſelbe halbe Parabel ſenkrecht auf die Ebene jener, in einer ſolchen Lage, daß a (a — x) = zz ſey, wenn z die Ordinate zu der mit jener gemeinſchaftlichen Abſciſſe iſt. Jeder Schnitt des Körpers durch die Ordinaten y und z ſey eiu Rechteck. Ein unbeſtimmtes Segment des Körpers, von dem Anfange der Abſciſſen an genommen, ſey = Z, ſo iſt dZ = yzdx (Cubirung), d. i. dZ = adx $\sqrt{}$ (ax — xx). Dieſe Differentialformel durch a dividirt iſt gerade dieſelbe mit der für ein Segment einer Kreisfläche, von dem einen Endpuncte des Durchmeſſers a an genommen, wie gleich unten gezeigt wird.

Die Conſtruction eines Körpers auf die hier beſchriebene Art nannte Gregorius ductum plani in planum.

51. Huygens ſucht das Verhältniß des Segments dieſes Körpers für $x = \frac{1}{4} a$, zu dem Unterſchiede dieſes Segments von demjenigen für $x = \frac{1}{2} a$, weil aus demſelben nach Gregorius Sätzen die Quadratur des Kreiſes gefunden wird. Jenes Verhältniß iſt nämlich $\frac{1}{24} \pi a^3 - \frac{1}{32} a^3 \sqrt{3} : \frac{1}{48} \pi a^3 + \frac{1}{32} a^3 \sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3} : 2\pi + 3\sqrt{3}$. Setzt man es = 1 : m, ſo wird 1 : π oder das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange = 4m — 2 : 3 (m + 1) $\sqrt{3}$. Nach Gregorius ergiebt ſich nun das Verhältniß 1 : m aus den Verhälniſſen eben ſolcher Segmente, wie die, deren Verhältniß 1 : m iſt, an zwey andern Körpern. Dieſe Verhältniſſe gab

er zwar ſelbſt nicht an, allein Huygens entdeckte ſie, und machte ſie nebſt dem Verfahren, wodurch er ſie gefunden hatte, in ſeiner Widerlegungsſchrift bekannt.

52. Die beiden Körper, die Gregorius zu Hülfe nehmen wollte, ſind durch unſere Analyſis leicht quadrirt, da Huygens es ſchon künſtlich anfangen mußte. Die Grundfläche des einen dieſer Körper iſt ein gleichſchenkliges und rechtwinkliges Dreyeck, in welchem iſt $x = y$. Auf dieſe ſenkrecht, durch die Axe der x, ſey eben das Dreyeck geſtellt, ſo daß $a - x = z$ ſey, wo z die Ordinate zu der Abſciſſe x bedeutet. Der Schnitt durch x und z ſey ein Rechteck. Hier iſt $dZ = yzdx = x(a-x)\,dx$, und $Z = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3$.

53. Die Grundfläche des andern Körpers iſt wieder eine Parabel, die gegen die Axe der x convex iſt, ſo daß $ay = xx$ iſt. Für die durch die Axe der x ſenkrecht auf die Grundfläche geſtellte Linie ſey $az = (a-x)^2$, ſo iſt $dZ = yzdx = \frac{x^2(a-x)^2}{aa}dx$, und $Z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{2a} + \frac{x^5}{5a^2}$.

54^a. Huygens giebt für die Segmente des erſtern dieſer beiden Körper von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}a$, und von $x = \frac{1}{4}a$ bis $x = \frac{1}{2}a$, das Verhältniß $5 : 11$ an; für die Segmente des andern zu denſelben x wie $53 : 203$, welches auch aus unſern Formeln folgt.

54[b]. Vermöge des 40ſten Satzes im 10ten Buche von Gregorius Werke, enthält nun das Verhältniß 53 : 203 das Verhältniß 5 : 11 eben ſo oft, als dies ſelbſt das Verhältniß 1 : m enthält. Huygens iſt zweifelhaft, in welchem Sinne Gregorius den Ausdruck, ein Verhältniß enthalte ein anderes, gebraucht habe; ob in dem, daß dadurch angedeutet werde, das eine Verhältniß ſey ein Vielfaches des andern, oder in einem andern Sinne. Allein der 37ſte, 38ſte, 39ſte Satz des angeführten Buchs, auf welchen der 40ſte beruht, und die von Gregorius ſelbſt gleich im Anfange des 8ten Buches gegebene Erklärung, über die Zuſammenſetzung der Verhältniſſe, laſſen keinen Zweifel über die Bedeutung jenes Ausdrucks im 40ſten Satze übrig. Gregorius verſteht darunter eine Vervielfältigung der Verhältniſſe, ſo daß nach ihm das Verhältniß 53:203 in dem Sinne, in welchem Euklides zweyfaches und dreyfaches Verhältniß ſagt, das eben ſo vielfache des Verhältniſſes 5 : 11 iſt, welches dieſes ſelbſt von dem Verhältniſſe 1 : m iſt. Wofern nun das Verhältniß 53 : 203 das n fache des Verhältniſſes 5 : 11 iſt, ſo hat man hiernach

$\frac{203}{53} = \left(\frac{11}{5}\right)^n$, und $\frac{11}{5} = \left(\frac{m}{1}\right)^n = m^n$. Hieraus folgt $n = \frac{\log 203 - \log 53}{\log 11 - \log 5}$, und $\log m =$

$$\frac{\log 11 - \log 5}{n} = \frac{(\log 11 - \log 5)^2}{\log 203 - \log 5}.$$

Die ausgeführte Rechnung giebt
$\log m = 0{,}2010447$, und $m = 1{,}58871$; woraus denn $\pi = 3{,}08882$, alſo viel zu klein ſich ergiebt, ſo daß demnach Gregorius mit dem Aufwande von ſo viel Zeit und Mühe nicht einmal dahin gelangt iſt, wohin Cuſan mit ſeinen ganz rohen Verſuchen gekommen war.

Aus unſerer Rechnungt folgt n = 1,703217, alſo noch nicht 2. Es ſcheint, als habe Huygens deswegen, weil n keine ganze Zahl iſt, die Vervielfachung der Verhältniſſe nicht zulaſſen wollen. Auch begreift man in der That nicht ſogleich, wie im 40ſten Satze die Vervielfachung nach einer gebrochenen, ſelbſt irrationalen Zahl Statt haben kann, da im 37ſten und 38ſten Satze, auf welche der 39ſte ſich gründet, von dem der 40ſte gewiſſermaßen nur einen Zuſatz ausmacht, bloß zweyfache Verhältniſſe vorkommen. Allein die Sache erklärt ſich dadurch, daß zwar die Prämiſſen des 39ſten Satzes richtig, die Schlußfolge hingegen falſch iſt. Gregorius ſchließt nämlich ſo. Wenn L : M = m (P : Q), [das m fache des Verhältniſſes P : Q] und P : Q = m (R : S); ferner L : T = m (P : V), und P : V = m (R : W); weiter X : M = m (Y : Q), und Y : Q = m (Z : S); endlich X : T = m (Y : V) und Y : V = m (Z : W): ſo iſt auch das Verhältniß L + X : M + T von dem Verhältniſſe P + Y : Q + V ein eben ſo vielfaches als das Verhältniß P + Y : Q + V von dem Verhältniſſe R + Z : S + W iſt. Das iſt aber gar nicht allgemein richtig, wie Descartes auch in einem von Huygens mitgetheilten Briefe an Schooten bemerkt hat. Gregorius hat ſich mit ſeiner Lehre von den Proportionalitäten, worin er die Größen der Verhältniſſe durch ihre Exponenten mißt, ſelbſt verwirrt.

Es würde, wie Huygens gezeigt hat, nichts helfen, wenn man zur Rettung und Vertheidigung des Gregorius die Redensart ein Verhältniß enthalte ein anders eben ſo oft, als ein drittes Verhältniß, ein viertes enthält, von einer Proportion zwiſchen den Exponenten der Verhältniſſe auslegen wollte. In dieſem Falle nämlich iſt

$$\frac{53}{203} : \frac{5}{11} = \frac{5}{11} : \frac{1}{m}, \text{ woraus } m = \frac{6413}{5075},$$

und das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange $1 : \pi = 7751 : 17232 \sqrt{3} = 1 : 3,85069$ hervorgeht. Da π die Fläche des Kreiſes für den Halbmeſſer 1 ausdrückt, das dem Kreiſe bey derſelben Größe des Halbmeſſers umſchriebene reguläre Sechseck aber $2\sqrt{3}$ oder 3,4641 iſt; ſo würde folgen, daß der Kreis größer als dieſes Sechseck ſey, welches eine Abſurdität iſt.

Die hier angezogene ſehr gut abgefaßte Schrift von Huygens, welcher bey ihrer Bekanntmachung noch ſehr jung war, ſteht in der Sammlung ſeiner Werke Vol. II. auch ein Schreiben von ihm an einen Vertheidiger des Gregorius.

In Käſtners Geſchichte der Mathematik, Band III. iſt eine ausführliche Nachricht von dem Werke des Gregorius enthalten, die freylich größtentheils nur ein Inhaltsverzeichniß iſt.

Die Conſtruction, welche daſelbſt nach Gregorius angeführt wird, iſt bey der Prüfung von Huygens dadurch umgangen, daß dieſer ohne Gregors Sätze ein Paar Abſchnitte eines Kreiſes angab, aus deren bekanntem Verhältniſſe ſich das Verhältniß eines gegen die ganze Kreisfläche in gegebenem Verhältniß ſtehenden Ausſchnittes zu einem geradlinigen Dreyecke ergeben würde.

55[a]. Nach dieſem mißrathenen Verſuche iſt es nicht nöthig, ſich bey den nachher gemachten aufzuhalten. Käſtner führt in ſeiner Geometrie aus dem Mercure de France an, daß in Frankreich einer nach 25 jähriger Bemühung herausgebracht habe, der Durchmeſſer könne ſich wohl zum Umfange verhalten wie 23099 : 72576, das wäre wie 1 : 3,1419. Die 25 Jahre ſind verſchwendet. — Im Jahre 1776 kam zu Berlin heraus: Neuerfundene mathematiſche Rechenſchule, in welcher eine wahre Cirkelquadrotur durch arithmetiſche Progreſſionstabellen, und alles beſtimmen-

de unveränderliche mathematiſche Linien und mathematiſche Quadratpuncte gründlich bewieſen wird, von P. Fr. Heſſe. Der Titel zeigt ſchon den Geiſt der Schrift. Das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange ſoll ſeyn 99 : 311, d. i. 1 : 3,14141, welches ſchon in der vierten Decimalſtelle abweicht. Aus dem Buche erfährt man, daß ein Obriſtlieutenant Corſonich in Polen auch eine Quadratur angegeben, und einen Preis von 50 Ducaten demjenigen verſprochen hat, der ihre Unrichtigkeit beweiſen könnte. Nach ihm iſt das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange wie 8 : 25, welches unter allen angeblichen Verhältniſſen eins der fehlerhafteſten iſt. Die beiden Brüche $\frac{25}{8}$ und $\frac{311}{99}$ ſind übrigens in der Reihe der zwiſchen den beiden Brüchen $\frac{3}{1}$ und $\frac{331}{106}$, welche kleiner als $\frac{\text{Peripherie}}{\text{Diameter}}$ ſind, eingeſchalteten Näherungsbrüchen der erſte und vierzehnte. Man ſehe den Artikel: Kettenbruch 12 und 13. — Auf das Verhältniß 1225 : 3844 = $35^2 : 62^2$ für den Durchmeſſer und Umfang ſind mehrere faſt zu gleicher Zeit verfallen, ein Rittmeiſter Leiſtner im Jahre 1737, um dieſelbe Zeit ein Prediger Merkel, der aber ſeine Zahlen erſt 1751 bekannt machte, und ein Schulcollege Böhm im Jahre 1765. In eben dieſem Jahre ließ auch ein Profeſſor Biſchoff zu Stettin die Schrift des Merkel mit ſeinen Anmerkungen wieder auflegen. Darin erklärt er die Merkelſche Quadratur, ohngeachtet ihrer ſchon von Krafft erhaltenen Widerlegung, und trotz der Kenntniß von den beſſern Bemühungen Ludolphs von Cölln und Sherwins, für die wahre und vollkommene. Merkels und Biſchoffs Proben der von ihnen empfohlenen Quadratur ſind ſo beſchaffen, daß

jedes Paar beliebig angenommener Quadratzahlen für den Durchmeſſer und Umfang ihnen Genüge thut, wie in der Pſeudoquadratur des Cirkels von Coriarius, Eutin 1766, gewieſen wird. Das Verhältniß 1225:3844 iſt = 1 : 3,138 . . . , alſo noch nicht einmahl ſo genau als das Archimediſche 7 : 22. Indeß erhält es dadurch einen gewiſſen Werth, daß, weil ſeine Glieder Quadratzahlen ſind, vermittelſt deſſelben das Verhältniß des Durchmeſſers zu der Seite eines dem Kreiſe gleichen Quadrats, welches Verhältniß 2 : $\sqrt{\pi}$ iſt, rational ausgedrückt wird, nähmlich 35 : 31. Durch die Verwandlung von $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ in einen Kettenbruch laſſen ſich mehrere Paare Quadratzahlen finden, die das Verhältniß des Quadrats vom Durchmeſſer zu der Kreisfläche deſto genauer angeben, je größer ſie ſind. Unter dieſer giebt das Verhältniß 1521 : 1936 das Verhältniß des Durchmeſſers zur Peripherie wie 484:1521, welches in ſeinen Gliedern aus kleineren Zahlen beſteht, als das Merkelſche, und doch genauer iſt. Es iſt nämlich = 1 : 3,14256. Ein Franzoſe Comiers hat daſſelbe ſchon 1676 im Journal des Savans bekannt gemacht. M. ſ. auch Lamberts Abhandlung für die Erforſcher der Quadratur des Cirkels in deſſen Beyträgen Th. II. S. 142 u. folgg.

55[b]. Mit den unwiſſenden Cirkelquadrirern ſind nicht in eine Klaſſe zu ſetzen diejenigen, welche Conſtructionen angegeben haben, wodurch eine dem ganzen Umfange des Kreiſes oder auch einem Theil deſſelben, ſehr nahe gleich kommende gerade Linie gefunden wird. Dergleichen Conſtruction zur Verwandelung der Peripherie in eine gerade Linie iſt ſelbſt von Euler vorhanden. M. ſ. Kraffts Instit. geom. subl. §. 135. Eine leicht ausführbare und doch ſehr genaue iſt folgende. Man errichte in den Endpuncten des Durchmeſſers an einerley Seite deſſelben zwey Perpendikel, wovon das eine dreymahl ſo groß als der Halbmeſſer, das andere

aber der Tangente des Bogens von 30° gleich iſt. Die gerade Linie, welche die Endpuncte beider Perpendikel verbindet, iſt ſehr nahe der halben Peripherie gleich. Dieſe Conſtruction hat Kochanski in den Act. Lipsiens. vom Jahre 1685 bekannt gemacht. Sie ſetzt das Verhältniß des Durchmeſſers zur Peripherie wie 1 : 3,141533 voraus, welches erſt in der fünften Stelle von dem wahren abgeht. Olbers hat auch eine ſolche Conſtruction angegeben, welche in Brandes Lehrbuche der Mathem. Th. II. S. 222. mitgetheilt wird, und $\pi = 3{,}14162$ macht.

56. David Gregory hatte in der (4.) angeführten Schrift zu beweiſen geſucht, daß für die Kreisfläche kein analytiſcher vollſtändiger Ausdruck mittelſt des Quadrats des Durchmeſſers gefunden werden könne. Huygens ward dadurch nicht befriedigt, zwiſchen beiden Geometern entſtand daraus ein Schriftwechſel, der in Huygens Werken zu finden iſt.

57. Die Reihen, welche die Kreisbogen durch ihren Sinus oder ihre Tangente ausdrücken, oder auch dieſe durch jene angeben, haben zwar kein letztes Glied, doch könnte darum ein Bogen zugleich mit ſeinem Sinus oder ſeiner Tangente zu dem Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben. Denn wenn ein Bruch $\frac{m}{n}$, deſſen Zähler und Nenner ganze Zahlen ſind, durch die wirkliche Diviſion in Decimaltheilen entwickelt wird, ſo wird der Quotient, außer den Fällen, da n bloß 2 und 5 als Factoren enthält, eine unendliche Reihe von Decimaltheilen. Auf eine ähnliche Art könnte es ſich hier auch verhalten.

58. Die Theorie der Kettenbrüche hilft uns aus der Ungewißheit. Wenn der Quotient zweyer ganzen Zahlen in einen Kettenbruch verwandelt wird, ſo bricht er einmahl ab, weil der immer ſich verkleinernde Reſt von den ſucceſſiven Diviſionen zuletzt Eins wird, wodurch

bey

bey der folgenden Diviſion kein Reſt bleibt. Nun iſt in dem Artikel, Kettenbruch, 48. gefunden, daß

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}}$$

iſt. Dieſer Bruch kann nicht abbrechen. Daher iſt π kein rationaler Bruch.

59. Aus dieſer Theorie läßt ſich auch erweiſen, daß die Tangente eines Kreisbogens nothwendig irrational iſt, wenn der Bogen ein rationales Verhältniß zum Halbmeſſer hat; und daß der Bogen zu einer rationalen Tangente (in Beziehung auf den Halbmeſſer) irrational iſt.

60. Es iſt nämlich, wenn $t = \text{tang}\,\varphi$ iſt,

$$\frac{\varphi}{t} = \cfrac{1}{1+\cfrac{tt}{3+\cfrac{4tt}{5+\cfrac{9tt}{7+\cfrac{16tt}{9+\cfrac{25tt}{11+\text{etc.}}}}}}}$$

welche Reihe nicht abbricht, daher für rationale t der Bogen φ irrational iſt. — Den Bruch findet man nach der Methode, Kettenbruch, 60, aus der Formel,

$$\frac{\varphi}{t} = 1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \text{etc.}$$ (Cyklometrie, 10.), indem hier t^2 iſt, was dort z. Man hat nur noch nöthig, die unreinen Brüche auf reine zu bringen, nach Kettenbruch, 26. Da der Kettenbruch aus einer Reihe, welche nach einem beſtimmten Geſetze fortgeht, auf eine gleichförmige Art gebildet wird, ſo muß für denſelben ein Geſetz vorhanden ſeyn, dasjenige, welches ſich auf eine ganz unzweydeutige Art ergiebt.

Die Rechnung zeigt auch, daß der Reſt von den Diviſionen nicht Null werden kann.

61. Auch iſt, um die Tangente durch den Bogen auszudrücken.

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\varphi} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\varphi^2}{3-\cfrac{\varphi^2}{5-\cfrac{\varphi^2}{7-\cfrac{\varphi^2}{9-\cfrac{\varphi^2}{11-\text{etc.}}}}}}}$$

Die ſehr einfache Form dieſes Bruchs zeigt, daß er ins Unendliche fortgeht.

62. Der Bruch wird aus den Reihen für den Sinus und Coſinus (Cyklometrie, 5, 6.) hergeleitet, da

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\varphi.\cos\varphi}$$ iſt.

Es ſey

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\cos\varphi = 1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - 7C\varphi^6 + 9D\varphi^5 - \text{etc.}$$

Nun verfahre man mit dem Bruche

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi\,.\cos\varphi} = \frac{1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - \text{etc.}}{1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - \text{etc.}}$$

eben ſo wie bey der Verwandlung eines numeriſchen Bruches in einen Kettenbruch, nach dem Artikel, Kettenbruch, 3. Das b daſelbſt iſt hier der Zähler, a der Nenner, und m der Quotient des Nenners durch den Zähler. Weil hier der Zähler größer iſt als der

Nenner, (die Tangente eines Bogens iſt größer als der Bogen), ſo werden die Reſte zum Theil negativ.

63. Die Dividenden ſind nach der Reihe folgende, welche, den erſten ausgenommen, auch Diviſoren, und, außer den beiden erſten, auch Reſte ſind.

I. $1 - 3\,A\varphi^2 + 5\,B\varphi^4 - 7\,C\varphi^6 + 9\,D\varphi^8 - 11\,E\varphi^{10} + \text{etc.}$

II. $1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - E\varphi^{10} + \text{etc.}$

III. $-\frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{1}{5}A\varphi^4 - \frac{1}{7}B\varphi^6 + \frac{1}{9}C\varphi^8 - \frac{1}{11}D\varphi^{10} + \text{etc.}$

IV. $-\frac{1}{3.5}\varphi^2 + \frac{1}{5.7}A\varphi^4 - \frac{1}{7.9}B\varphi^6 + \frac{1}{9.11}C\varphi^8 - \frac{1}{11.13}D\varphi^{10} + \text{etc.}$

V. $+\frac{1}{3.5.7}\varphi^4 - \frac{1}{5.7.9}A\varphi^6 + \frac{1}{7.9.11}B\varphi^8 - \frac{1}{9.11.13}C\varphi^8 + \text{etc.}$

VI. $+\frac{1}{3..9}\varphi^4 - \frac{1}{5..11}A\varphi^5 + \frac{1}{7..13}B\varphi^8 - \frac{1}{9..15}C\varphi^{10} + \text{etc.}$

VII. $-\frac{1}{3..11}\varphi^6 + \frac{1}{5..13}A\varphi^8 - \frac{1}{7..15}B\varphi^{10} + \text{etc.}$

In jedem Reſte ſetzt man für A, B, C, D, etc. ihre Werthe, $\frac{1}{2.3}$; $\frac{A}{4.5}$; $\frac{B}{6.7}$; $\frac{C}{8.9}$, u. ſ. w. Die Quotienten, welche a. a. O. durch m, n, p, q, etc. bezeichnet ſind, ſind hier abwechſelnd poſitiv und negativ, nämlich

$$+1;\ -\frac{3}{\varphi^2};\ +5;\ -\frac{7}{\varphi^2};\ +9;\ -\frac{11}{\varphi^2},$$

u. ſ. w.

64. Es iſt nun, wenn n, q, s, etc. blos die Quantität bezeichnen, und die Negation durch das Vorzeichen bemerkt wird, der Kettenbruch daſelbſt

$$\frac{b}{a}=\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{-n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{-q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{-s+\text{etc.}}}}}}}$$

Die Negation nämlich betrifft jedesmahl blos den Quotienten, dagegen das Vorzeichen — vor einem ergänzenden Bruche den ganzen Bruch mit allen partiellen Brüchen in demſelben angeht (a. a. O. 17.). Will man das Vorzeichen — dem ergänzenden Bruche, das iſt, dem Zähler geben, ſo müſſen beide Theile des Nenners ihr Vorzeichen ändern, und ſo nach wird

$$\frac{b}{a}=\cfrac{1}{m-\cfrac{1}{n-\cfrac{1}{p-\cfrac{1}{q-\cfrac{1}{r-\cfrac{1}{s-\text{etc.}}}}}}}$$

Setzt man nun für m, n, p, q, etc. die gefundenen abſoluten Werthe der Quotienten, ſo hat man noch den Diviſor φ^2 aus den Quotienten wegzuſchaf-

ſen (a. a. O. 26.). So erhält man den angegebenen Kettenbruch für $\frac{\text{tang } \varphi}{\varphi}$.

65. Daß die Form dieſes Bruchs in allen Gliedern dieſelbe bleibe, welches ſich in den erſten berechneten zeigt, erhellt wie in (60.). Einen förmlichen Beweis, daß die Reſte bey den ſucceſſiven Diviſionen das Geſetz durchgehends beobachten, welches in den Reihen III. u. f. offenbar iſt, giebt Lambert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1761. in der Abhandlung: Sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Man ſehe auch in deſſelben Beyträgen zur Mathematik, Th. II. den Aufſatz für die Erforſcher der Quadratur des Circuls.

Auch vergleiche man die Methode von la Grange in der Abhandlung, über den Gebrauch der continuirlichen Brüche, Nouveaux mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1776, p. 253 255. — Legendre leitet in ſeinen Elemens de Géometrie den Kettenbruch für $\frac{\text{tang } \varphi}{\varphi}$ aus einer linearen Differenzengleichung des zweyten Grades ab, und gründet alsdann den Beweis, daß die Tangente zu einem rationalen Bogen irrational iſt, auf den Satz, daß wenn die Glieder eines Kettenbruchs einmahl kleiner als 1 werden und es bleiben, der Werth des Kettenbruchs irrational ſey.

66. Wenn man den Zähler

$$1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 = C\varphi^6 + \text{etc.}$$

zum erſten Dividendus macht, alſo den Nenner zum erſten Diviſor, ſo wird die Form der Dividenden ſehr zuſammengeſetzt, und der Kettenbruch erhält eine Geſtalt, worin das Geſetz der einzelnen Brüche nicht offenbar iſt.

Es iſt ſonach

$$\frac{\tang \varphi}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{3:\varphi^2 - \cfrac{1}{5:6 - \cfrac{1}{36.7:\varphi^2 - \cfrac{1}{1:10 - \text{etc.}}}}}$$

Der erſte hier weggelaſſene Bruch iſt $\frac{1}{15.15.11:\varphi^2}$.

67. Es ſey nun AB (Fig. 10.) der Quadrant eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer AC $=$ a iſt. In demſelben ſeyn zwey rechtwinklichte Coordinaten, AP $=$ x, PM $=$ y. ſo iſt die Gleichung für dieſelben, $2ax - xx = yy$. Die Area APM ſey Z, ſo iſt $\partial Z = y\partial x$ (8), das iſt $\partial Z = \partial x \sqrt{(2ax - xx)}$. Aus Integralformel, 58. iſt

$$Z = \frac{aa}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2ax - xx)}} - \frac{a - x}{2}\sqrt{(2ax - xx)},$$

und eben daher, 55.

$$Z = \frac{aa}{2}\text{ Ang. sin. vers }\frac{x}{a} - \frac{a - x}{2}\sqrt{(2ax - xx)}.$$

Hier iſt Ang. sin. vers $\frac{x}{a}$ der Kreisbogen mit dem Halbmeſſer $= 1$ für den Winkel ACM, da x der lineariſche Sinus verſus für den Halbmeſſer a, und $\frac{x}{a}$ der numeriſche Sinus verſus für den Halbmeſſer $= 1$ iſt. Ferner iſt a. Ang. sin. vers. $\frac{x}{a}$ der Bogen AM, und der erſte Theil von Z der Sector ACM. Der zweyte ſubtractive Theil iſt das Dreyeck PCM, da $\sqrt{(2ax - xx)} = y = $ PM iſt. Es iſt nach der Integration keine Conſtans beygefügt, weil $Z = 0$ iſt, wenn $x = 0$ geſetzt wird.

68. Es iſt zu bemerken, daß zu einer Abſciſſe x unendlich viele Z gehören, nämlich nicht blos der in der Figur erſcheinende Abſchnitt APM, ſondern auch alle Vielfache der ganzen Kreisfläche + APM. Daher giebt es keine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und Z, oder, die unbeſtimmte Quadratur des Kreiſes iſt unmöglich.

69. Gregor von St. Vincent ſchmeichelte ſich, die Quadratur des Kreiſes durch Cubirung eines paraboliſchen Körpers zu finden (49. ff.). Man ſieht nun, daß eines nicht leichter iſt als das andere, eigentlich daſſelbe bis auf einen conſtanten Factor. Er bemerkte zwar richtig, daß es darauf ankäme, den Quadranten AMB (Fig. 10.) ſo einzutheilen, daß AM und MB oder die zugehörigen Sectoren, ein rationales Verhältniß haben, und die Segmente APM, CPMB ebenfalls. Das trifft aber nicht zuſammen. Man nehme an, daß ACM : MCB = m : n, und APM : CPMB = p : q ſeyn, ſo iſt ACM : ACB = m : m + n, und ACB : APM = p + q : p. Folglich iſt ACM : APM = m (p + q) : p (m + n), und ACM : CPM = mp + mq : mq — np. Aber zwiſchen dem Sector ACM und dem Dreyeck CPM findet keine algebraiſche Vergleichung Statt, weil zu demſelben Dreyeck unendlich viele Sectoren gehören.

Quadraturen an den Kegelſchnitten.

70. Es iſt AMN (Fig. 11.) eine Parabel, deren Axe AX iſt. Der Parameter ſey = a, die Coordinaten AP = x, PM = y, ſo iſt ax = yy. (Parabel). Die Differentialgleichung iſt $a\partial x = 2y\partial y$. Daher $y\partial x = \frac{2y^2\,\partial y}{a}$. Es ſey die Fläche APM = Z,

ſo iſt $\partial Z = \frac{2y^2 \partial y}{a}$, und $Z = \frac{2y^3}{3a} = \frac{2}{3} xy$. Das geradlinichte Dreyeck APM iſt $= \frac{1}{2} xy$. Es verhält ſich alſo das paraboliſche Trilineum zu dem Dreyeck wie 4 : 3. Das Rechteck von der Ordinate und der Abſciſſe verhält ſich zu der Area der Parabel wie 3:2. Von dem Verfahren, welches Archimedes zur Quadrirung der Parabel angewandt hat, ſ. den Artikel, Exhauſtion.

71. Wenn AX irgend ein Durchmeſſer, und die Ordinate PM die Hälfte der ganzen Chorde, der Ordinatenwinkel $= \alpha$, ſo iſt die Area der Parabel

$$APM = \frac{2}{3} xy \cdot \sin \alpha,$$

(10.), und das Parallelogramm von der Ordinate und Abſciſſe mit dieſen Winkel verhält ſich zu der Area der Parabel wie 3 . 2.

72. Es ſey F der Brennpunct der Parabel, die Länge oder der Radius FM $= u$, der Winkel AFM $= \varphi$, ſo iſt die Area

$$AFM = \frac{1}{6} u \sin \varphi \, (a - u \cos \varphi).$$

Denn es iſt dieſe Area $= \frac{2}{3} xy - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4} a\right)y$.

Ferner iſt $y = u \sin \varphi$, und, für den Fall der Figur

$$x = \frac{1}{4} a + u \cos MFP = \frac{1}{4} a - u \cos \varphi,$$

wo $\cos \varphi$ negativ iſt. Setzt man dieſe Werthe für x und y, ſo wird der angegebene Werth erhalten.

73. Durch φ allein ausgedrückt iſt die Area

$$AFM = \frac{1}{24} aa. \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \cdot \frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Denn es iſt (Parabel, 6.) $u = \frac{a}{2(1+\cos\varphi)}$.

Setzt man dieſen Werth in den vorhergefundenen Ausdruck für die Area, ſo ergiebt ſich gleich der angegebene Werth derſelben.

74. Da dieſer Ausdruck noch zu ſehr zuſammengeſetzt iſt, ſo muß man ſuchen, ihn abzukürzen. Es iſt

$$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi, \text{ und } \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2\right).$$ (Goniometrie, 38.). Nun iſt

$$\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = 2 - \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$ alſo iſt

$$\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1}{2}\left(3 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi^2\right).$$ Folglich

iſt Area $AFM = \frac{1}{16} aa \left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi^3\right)$.

75. In verſchiedenen Parabeln verhalten ſich, bey gleichen Winkeln des Radius FM mit der Axe die Flächenräume AFM wie die Quadrate der Parameter. Dieſer Satz wird in der Aſtronomie für die paraboliſche Laufbahn eines Kometen benutzt.

76. Zur Übung in der Integralrechnung iſt es dienlich, die Area AFM auch aus der Differentialformel (11.), $\frac{1}{2}$ und φ, herzuleiten. Die Area AFM ſey

$= U$, ſo iſt, wenn für u deſſen Werth geſetzt wird, $\partial U = \frac{aa\partial\varphi}{8(1-\cos\varphi)^2}$. Die Integration einer Formel dieſer Art hat einige Schwierigkeit (Integralformel, 125.). Auch ſieht man aus dem Werthe der Area in (74.), daß es nicht leicht ſeyn möchte, auf dieſelbe unmittelbar durch Integration zu kommen. Allein in dem gegenwärtigen Falle, da hier die a und b a. a. O. jedes $= 1$ ſind, kann man ſich durch eine Subſtitution helfen. Es iſt $1 + \cos\varphi = \frac{2}{1 + \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2}$, (Goniom., 42.), und $\frac{1}{2}\partial\varphi = \frac{\partial\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}{1 + \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2}$, (Differentialformeln, 38.). Man ſetze $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{t}$, ſo iſt $\frac{\partial\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2} = \frac{1}{2}(1 + tt)\,\partial t$, alſo $\partial U = \frac{1}{16}aa(1 + tt)\,\partial t$, und $U = \frac{1}{16}aa \times \left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, wie vorher.

Die Erleichterung, welche die hier gebrauchte Subſtitution verſchafft, beruht darauf, daß der Differentialfactor zu $\partial\,\text{tang}\,\varphi$ eine rationale Function von $\text{tang}\,\varphi$ ſelbſt iſt, dagegen bey $\partial\sin\varphi$ oder $\partial\cos\varphi$ eine irrationale Function von $\sin\varphi$ oder von $\cos\varphi$.

77. Oder man ſetze ſtatt $1 + \cos\varphi$ deſſen Werth, $2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$, ſo iſt $\partial U = \frac{aa}{8}\cdot\frac{\partial\varphi}{4\cos\frac{1}{2}\varphi^4}$. Aus Integralformel, (121.) iſt

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^3} + \frac{2}{3} \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$ Alſo iſt

$$\frac{1}{2} \int \frac{\partial\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Man multiplicire Zähler und Nenner mit $2\cos\frac{1}{2}\varphi$, um φ ſtatt $\frac{1}{2}\varphi$ einzuführen, ſo iſt $\frac{1}{2} \int \frac{\partial\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \cdot \frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$ und

$$U = \frac{aa}{24} \cdot \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \cdot \frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$ wie in (73.).

78. Man kann auch in der Differentialformel, $\partial U = \frac{1}{2} uu\partial\varphi$ das Differential $\partial\varphi$ durch ∂u und eine Function von u ausdrücken. Es iſt $\cos\varphi = \frac{a}{2u} - 1$, alſo $\sin\varphi\partial\varphi = \frac{a\partial u}{2uu}$. Da $\sin\varphi = \frac{a}{2u}\sqrt{\frac{4u-a}{a}}$ iſt, ſo iſt $\partial\varphi = \frac{\partial u}{u}\sqrt{\frac{a}{4u-a}}$ und daher $\partial U = \frac{1}{2} u\partial u \sqrt{\frac{a}{4u-a}}$. Man ſetze

zufolge Integralformel (48.), $4u - a = \frac{zz}{a}$, das iſt,

$4u = \frac{aa + zz}{a}$. Daraus iſt $2\partial u = \frac{z\partial z}{a}$,

und $\frac{1}{2}u\partial u = \frac{(aa + zz)\, z\partial z}{16\, aa}$; alſo iſt

$\partial U = \frac{(aa + zz)\,\partial z}{16\, a}$, folglich $U = \frac{aaz + \frac{1}{3}z^3}{16\, a}$.

Die Conſtante iſt $= 0$, weil $U = 0$ für $u = \frac{1}{4}a$, das iſt für $z = 0$.

Es iſt $z = a \tang \frac{1}{2}\varphi$. Denn es iſt

$zz = 4au - aa = \frac{2\, aa}{1 + \cos\varphi} - aa = aa\, \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$

$= aa \tang \frac{1}{2}\varphi^2$, (Goniometrie, 41.).

79. Für $\varphi = 90^0$ iſt $t = 1$, und die Area der Parabel $= \frac{1}{12}aa$. Man ſetze dieſe Area $= A$, ſo iſt $U = \frac{1}{4}A\,(3t + t^3)$. Dieſes iſt eine bequeme Formel zur Berechnung der Zeiten in einer paraboliſchen Laufbahn.

80. Es ſey AMB (Fig. 12.) eine halbe Ellipſe, deren große Axe $AB = 2a$, die conjugirte $= 2CD = 2b$ iſt. Die Coordinaten ſeyn $AP = x$, $PM = y$, ſo iſt die Gleichung für dieſelbe, $b^2\,(2ax - xx) = a^2y^2$. Alſo iſt $y\partial x =$

$\frac{b\partial x}{a} \surd (2ax - xx)$. Es iſt das Differential für die Kreisfläche, deren Halbmeſſer $= a$ iſt, mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt. Nämlich die Ordinaten an der Ellipſe und an dem Kreiſe mit dem Halbmeſſer a verhalten ſich bey denſelben Abſciſſen wie b : a (Ellipſe, 5.). Die Conſtante iſt hier $= 0$.

Daher iſt die Area APM $= \frac{1}{2} ab \text{ Ang. sin verſ } \frac{x}{a} - \frac{b(a-x)}{2a} \surd (2ax - xx)$. Die Area ACD, nämlich der vierte Theil der Ellipſe, iſt $= \frac{1}{4} ab\pi$, weil Ang. sin verſ $\frac{1}{1} = \frac{1}{2}\pi$ iſt. Die Fläche der ganzen Ellipſe iſt $= ab\pi$. Die Kreisfläche, deren Halbmeſſer $= a$ iſt, iſt $= aa\pi$.

81. Oder: Area APM $= \frac{1}{2} ab \text{ Ang. sin } \frac{y}{b} - \frac{1}{2}(a-x)y$. Es iſt nämlich Ang. sin vers $\frac{x}{a}$ $= \text{Ang. cos } \frac{a-x}{a} = \text{Ang. sin } \frac{\surd (2ax - xx)}{a}$ $= \text{Ang. sin } \frac{y}{b}$.

82. Daher iſt der elliptiſche Sector ACM $= \frac{1}{2} ab \text{ Ang. sin } \frac{y}{b}$.

83. Die beiden Brennpuncte ſeyn F, f, und $\left.\begin{matrix}CF\\Cf\end{matrix}\right\} = c$, ſo iſt die Area AFM $= \frac{1}{2}ab\ \mathrm{Ang.\,sin}\ \frac{y}{b} + \frac{1}{2}cy$.

84. Es ſey der Radius FM $= u$; der Winkel AFM $= \varphi$, ſo iſt die Gleichung für dieſe Größen $bb = (a - c\,.\cos\varphi)\,u$ (Ellipſe, 12.). Da $y = u \sin\varphi$ iſt, ſo iſt die Area AFM $= \frac{1}{2}\ ab\ \mathrm{Ang.\,sin}\ \frac{b \sin\varphi}{a - c\cos\varphi} + \frac{bbc\sin\varphi}{2\,(a - c\cos\varphi)}$.

85. Man ſetze $\mathrm{Ang.\,sin}\ \frac{b\sin\varphi}{a - c\cos\varphi} = \psi$, ſo iſt Area AFM $= \frac{1}{2}\ ab\,\psi + \frac{1}{2}\ bc\sin\psi$.

86. Die Area AFM ſey $= Z$, ſo iſt (nach 11.), $\partial Z = \frac{1}{2}\ uu\partial\varphi$, das iſt $\partial Z = \frac{b^4\,\partial\varphi}{2\,(a - c\cos\varphi)^2}$.

Das Integral dieſer Formel iſt in dem Artikel, Integralformel, 129., durch eine Reihe gefunden, die nach den Coſinus der Vielfachen von φ fortgeht. Die unmittelbare Integration zu dem vollſtändigen Integral iſt ſchwierig, da die Form der beiden Stücke deſſelben ſich nur errathen läßt. Es iſt nützlich, jene Integralformel zu differentiiren, um zu ſehen, wie ſich bey dieſer Operation mehreres gegen einander hebt, und das Differential eine Geſtalt erhält, in welcher die Form des Integrals nicht zu erkennen iſt.

87. Es ſey die Fläche der Ellipſe zu der Area AFM wie 2π (oder vier rechte) zu einem Winkel ω,

ſo iſt ω was in der Aſtronomie die **mittlere** **Anomalie** heißt, da φ die **wahre** bedeutet. Auch ſey $\frac{c}{a} = e$, als die Excentricität in Beziehung auf die halbe große Axe $= 1$. So iſt Area AFM $= \frac{1}{2} ab\omega$, und $\omega = \text{Ang. sin}\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}\right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{e\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}$. Man ſieht, daß aus der wahren Anomalie φ die mittlere ω directe gefunden werden kann, jene aber aus dieſer nur durch Annäherung.

88. Der Winkel ψ heißt die Anomalie des Excentri oder die excentriſche. Bey der Anwendung dieſes Winkels iſt $\omega = \psi + e\sin\psi$. Dieſer Winkel ψ wird aus ω viel leichter gefunden als der Winkel φ. Es muß alsdann aber noch φ aus ψ hergeleitet werden.

89. Da $\sin\psi = \frac{b\sin\varphi}{a-c\cos\varphi}$ iſt, und $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ hieraus nicht gefunden werden können, weil die Wegſchaffung der Irrationalität auf eine quadratiſche Gleichung für $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ führt, ſo ſuche man, ob nicht eine andere Gleichung ſich aus jener herleiten laſſe, in welcher $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$, eins ohne das andere vorkommen. Dieſes wird erhalten, wenn $\cos\psi$ durch eine Function von φ geſucht wird. Es iſt $\sin\psi^2 (a - c\cos\varphi)^2 = b^2 \sin\varphi^2$, und daraus $\cos\psi^2 (a - c\cos\varphi)^2 = a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2\cos\varphi^2 - b^2\sin\varphi^2$, das iſt, weil $a^2 = b^2 + c^2$ iſt, $\cos\psi^2 (a - c\cos\varphi)^2 = a^2\cos\varphi^2 - 2ac\cos\varphi + c^2 . = (a\cos\varphi - c)^2$, oder $\cos\psi\,(a - c\cos\varphi) = a\cos\varphi - c$. Folglich $\cos\varphi = \frac{c + a\cos\psi}{a + c\cos\psi}$.

Hieraus iſt $a - c \cos\varphi = \frac{aa - cc}{a + c \cos\psi} = \frac{bb}{a + c \cos\psi}$, und ferner $\sin\varphi = \frac{b \sin\psi}{a + c \cos\psi}$.

90. Eine noch bequemere Formel, den Winkel φ aus dem ψ herzuleiten, iſt in dem Artikel, la Grange's Lehrſatz, 23., enthalten, wo auch eine Formel für u (dort r) durch ψ ſich findet. Man vergleiche auch den Artikel, Keplers Aufgabe.

91. Es ſey AM (Fig. 13.) ein Zweig einer Hyperbel, deren CX, Scheitel A, halbe Hauptaxe CA $= a$; die halbe conjugirte Axe $= b$, Abſciſſe AP $= x$; Ordinate PM $= y$. Die Gleichung iſt $b^2 (2ax + xx) = a^2 y^2$. Die Area APM ſey $= Z$, ſo iſt $\partial Z = y\partial x = \frac{b}{a} \partial x \sqrt{(2ax + xx.)}$

Die Integration giebt (Integralformel, 58. 56.)

$$Z = \frac{b}{2a} (a + x) \sqrt{(2ax + xx)} - \frac{1}{2} ab \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2ax + xx)}}$$

das iſt $Z = \frac{b}{a} (a + x) \sqrt{(2ax + xx)} - \frac{1}{2} ab \log . \text{nat} \frac{a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}}{a}$.

Die Conſtante a in dem Bruche iſt ſo beſtimmt, daß der Bruch $= 1$ für $x = 0$ wird, daher der Logarithmus des Bruchs $= 0$ wird, ſo wie der erſte Theil von Z, damit die Area bey A anfange.

92. Oder, da $b \sqrt{(2ax + xx)} = ay$ iſt,

$$Z = \frac{1}{2} (a + x) y - \frac{1}{2} ab \log. \frac{b (a + x) + ay}{ab};$$

93. Der hyperboliſche Sector ACM zwiſchen den geraden CA, CM und dem Bogen AM iſt

$$= \frac{1}{2} ab \log. \frac{b(a+x)+ay}{ab} = \frac{1}{2} ab \log. \frac{ab}{b(a+x)-ay}.$$

Denn es iſt der Sector $= \Delta CPM$ — Area APM, und $\Delta CPM = \frac{1}{2}(a+x)y$. Daraus folgt der erſte angegebene Werth des Sectors.

In dieſem multiplicire man Zähler und Nenner des Bruches mit $b(a+x)-ay$, ſo wird der Zähler $= b^2(a+x)^2 - a^2y^2$. Nun iſt $b^2(CP^2 - CA^2) = a^2 . PM^2$ (Hyperbel, 3.) das iſt $b^2(a+x)^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Daraus entſteht der zweyte angegebene Werth. — Für die gleichſeitige Hyperbel, wo $b=a$ iſt, iſt der Sector $ACM = \frac{1}{2} aa \log \frac{a+x+y}{a}$

$$= \frac{1}{2} aa \log \frac{a}{a+x-y},$$ und, wenn

die Abſciſſe vom Mittelpuncte an gerechnet $CP = x^1$ iſt, $= \frac{1}{2} aa \log \frac{x^1+y}{a} = \frac{1}{2} aa \log \frac{a}{x^1-y}$, wo x^1 der hyperboliſche Coſinus, y der hyperboliſche Sinus iſt. Die Vergleichung der circulären und hyperboliſchen Sectoren findet ſich (Goniometrie, 149., und folgg.).

94. Es ſey der Winkel $MCP = \varphi$, und $CM = u$, ſo iſt Sector $ACM = \frac{1}{2} ab \log \frac{a \sin\varphi + b \cos\varphi}{b} . \frac{u}{a}$

oder auch

$$\text{Sec. } ACM = \frac{1}{2} ab \log \frac{b}{a \sin\varphi - b\cos\varphi} . \frac{a}{u}.$$

Denn es iſt $a + x = u \cos\varphi$; $y = u \sin\varphi$.

H

95. An der gleichſeitigen Hyperbel iſt Sector

$$ACM = \frac{1}{2}\, aa \log \left(\cos (45^\circ - \varphi) \cdot \frac{u\sqrt{2}}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\, aa \log \left(\frac{1}{\sin (45^\circ - \varphi)} \cdot \frac{a}{u\sqrt{2}} \right),$$ aus

(Goniometrie 53.). Hieraus wird durch Addition

$$\text{Sector } 2\,ACM = \frac{1}{2}\, aa \log \frac{\cos (45^\circ - \varphi)}{\sin (45^\circ - \varphi)} =$$

$$\frac{1}{2}\, aa \log \cot (45^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}\, aa \log tg \; (45^\circ + \varphi),$$

folglich Sec. ACM auch $= \frac{1}{4}\, aa \log \text{tang}\, (45^\circ + \varphi)$.

96. Es ſey F der dem Scheitel A nächſte Brennpunct, und $CF = c$, ſo iſt die hyperboliſche Area

$$AFM = \frac{1}{2}\, cy - \frac{1}{2}\, ab \log \frac{b\,(a + x) + ay}{ab}.$$

Denn es iſt das Dreyeck $CFM = \frac{1}{2}\, CF \times PM$

$= \frac{1}{2}\, cy$, und $AFM = \Delta CFM - \text{Sect. } ACM$.

Man bemerke, daß $c = \sqrt{(aa + bb)}$ iſt, (Hyperbel, 11. 12.).

97. Es ſeyn CS, Cs, die Aſymptoten der Hyperbel MAm; durch den Scheitel A und einen Punct M der Hyperbel ſeyn mit der Aſymptote Cs die Parallelen AD, ML an die AS gezogen: es iſt der Sector ACM = Quadrilineum ADLM.

Denn es iſt CD : CL = ML : AD (Hyperbel, 8.). Wegen dieſer Proportion und wegen der gleichen Winkel bey D und L iſt das Dreyeck ACM = MCL (Dreyeck, 30.). Von dem Quadrilineum ACML neh-

me man weg das Dreneck MCL, und von eben demſelben das Dreneck ACD, ſo bleibt gleiches zurück, daher Sector ACM = ADLM.

98. Man nehme CL, LM zu Coordinaten der Hyperbel, ſetze CL = t; LM = v, und $\sqrt{(aa + bb)}$ = c; es iſt Area ADLM $= \frac{1}{2}$ ab log $\frac{c}{2v}$, oder

ADLM $= \frac{1}{2}$ ab log $\frac{2t}{c}$.

Durch den Scheitel A ziehe man auf AC die ſenkrechte AB an AS, und verlängere die auf die Axe ſenkrechte Ordinate PM an dieſelbe in Q, ſo iſt CA:AB = CP : PQ. Nun iſt AB = b, (Hyperbel, 6.), alſo iſt PQ $= \frac{b(a+x)}{a}$, und QM $= \frac{b(a+x)}{a} = y$, $= \frac{b(a+x) - ay}{a}$. — In dem Dreyecke ACD iſt der Winkel CAD = ACs = ACD, alſo iſt CD = AD. Verlängert man AB bis an die Aſymptote Cs in b, ſo iſt AB = Ab, und daher BD = CD.

Da CB $= \sqrt{(aa + bb)}$ = c iſt, ſo iſt CD $= \frac{1}{2}$ c, oder AD $= \frac{1}{2}$ c. — In den ähnlichen Dreyecken LMQ, DAB iſt AD : AB = ML : MQ. Daher iſt $\frac{b(a+x) - ay}{a} = \frac{2bv}{c}$, und die Area

ADLM $= \frac{1}{2}$ ab log $\frac{c}{2v}$.

Da CL × ML = CD × AD = CD² $= \frac{1}{4}$ CB²

iſt, ſo iſt $tv = \frac{1}{4} c^2$, und $\frac{c}{2v} = \frac{2t}{c}$, alſo Area

$ADLM = \frac{1}{2} ab \log \frac{2t}{c}$.

99. Die zweyte dieſer Formeln ergiebt ſich unmittelbar aus (93.) folgendergeſtalt. Die gerade PQ ſchneide den andern Zweig der Hyperbel in m, die Aſymptote in q, ſo iſt $Mq = 2PM + MQ = \frac{b(a+x)+ay}{a}$. Da $CL : Mq = QL : QM = BD : BA$ iſt, ſo iſt $\frac{b(a+x)+ay}{a} = \frac{2bt}{c}$, und die Area $ADLM = \frac{1}{2} ab \log \frac{2t}{c}$.

100. Die Gleichung zwiſchen t und v giebt die Area ADLM unmittelbar. Sie iſt $\frac{1}{4} c^2 = tv$. Der Ordinatenwinkel MLS oder ADS ſey $= 2\alpha$; die Area $ADLM = Z$, ſo iſt $\partial Z = v\partial t . \sin 2\alpha$, (10.) oder $\partial Z = \frac{1}{4} c^2 . \sin 2\alpha . \frac{\partial t}{t}$. Es iſt $\int \frac{\partial t}{t} = \log . \text{nat} . \frac{t}{\text{const}}$, (Integralformel, 3.), alſo $Z = \frac{1}{4} c^2 . \sin 2\alpha . \log \frac{t}{\text{const}}$. Das Integral ſoll $= 0$ ſeyn, wenn $t = CD = \frac{1}{2} c$ iſt. Daher iſt $Z = \frac{1}{4} c^2 . \sin 2\alpha . \log \frac{2t}{c}$.

Da $ADL = 2\alpha$ iſt, ſo iſt $ACL = \alpha$, und

$\frac{1}{4}\,c^2.\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\,c^2 \sin\alpha.\cos\alpha$. Nun iſt $a = c.\cos\alpha$; $b = c.\sin\alpha$, folglich iſt Area ADLM $= \frac{1}{2}\,ab\,.\log.\frac{2t}{c}$.

101. Wenn die Abſciſſen CL oder t auf der Aſymptote CS in geometriſcher Fortſchreitung genommen werden, ſo ſind die zugehörigen Flächenräume, wie ADLM in arithmetiſcher Fortſchreitung.

Denn es ſeyn zwey Abſciſſen t und τ, ſo ſind die zugehörigen Flächenräume von der Ordinate AD an $= \frac{1}{2}\,ab\,.\log\frac{2t}{c}$ und $\frac{1}{2}\,ab\,.\log\frac{2\tau}{c}$, deren Unterſchied iſt $= \frac{1}{2}\,ab\left(\log\frac{2\tau}{c} - \log\frac{2t}{c}\right) = \frac{1}{2}\,ab\log\frac{\tau}{t}$. Iſt nun das Verhältniß $t:\tau$ ein gegebenes, ſo iſt $\log\frac{\tau}{t}$ eine gegebene Größe, (Logarithmus, 6.), und die Unterſchiede der Flächenräume ſind gleich groß.

102. Gregorius von St. Vincent hat dieſen Satz ſchon erwieſen, in dem Opere geometrico, de hyperbola, prop. 109., freylich aus ganz andern Gründen. Er zeigt auch, prop. 106, daß zwey hyperboliſche Segmente, die einen gemeinſchaftlichen Endpunct haben, gleich groß ſind, wenn die Chorde, welche die Summe ihrer Bogen beſpannt, die Ordinate zu dem Durchmeſſer iſt, welcher durch den gemeinſchaftlichen Endpunct geht, oder dieſe Ordinate halbirt. Sein Verfahren iſt in der That kunſtreich.

Einige andere Quadraturen.

103. Die Ciſſoide iſt eine krumme Linie des dritten Grades, deren Gleichung iſt $x^3 = (a-x)\,y^2$,

ſ. Ciſſoide. Es iſt alſo $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{x^2}{\sqrt{(ax-xx)}}$ und $y\partial x = \partial Z = \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}}$. Aus Integralformel, 71., iſt $Z = -\frac{1}{2}\sqrt{(ax-xx)} + \frac{3a}{4}\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}}$ ferner $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}} = -\sqrt{(ax-xx)} + \frac{1}{2}a\int\frac{\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}}$, und $\int\frac{\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}} =$ Ang. sin verſ. $\frac{2x}{a}$. Alſo iſt

$$Z = \frac{3}{8}aa \text{ Ang. sin verſ.} \frac{2x}{a} - \frac{1}{4}(3a+2x)\sqrt{(ax-xx)}.$$

Die Conſtante iſt $= 0$. Für $x = \frac{1}{2}a$ iſt $Z = \frac{3}{16}\pi aa - \frac{1}{2}aa$, das iſt 3 Quadranten des erzeugenden Kreiſes, minus dem halben Quadrat des Durchmeſſers. Für $x = a$ iſt die ins Unendliche ausgeſtreckte Area zu dem einem Zweige $= \frac{3}{8}\pi aa =$ dem Dreyfachen des Halbkreiſes, alſo die Area zwiſchen den beiden Zweigen und der Aſymptote dem Dreyfachen der Kreisfläche, ſ. (3.)

104. Die Gleichung für die Conchoide iſt $y^2 = \frac{(b+x)^2(aa-xx)}{xx}$, ſ. Conchoide, wo nur die Bezeichnungen x und y mit einander vertauſcht ſind. In Fig. 14. iſt AY die gegebene gerade, oder die Aſymptote, mit welcher die Ordinaten PM parallel ſind. In B iſt der Scheitel der obern Conchoide, in D der

untern, C iſt der Pol, CRM eine gerade von C nach einem Puncte der Conchoide, auf welcher RM und RN der AB oder AD gleich ſind. Es iſt AB $= a$; CA $= b$; AP $= x$; PM $= y$. Die Area BPM ſey $= Z$. Hier iſt $\partial Z = - y\partial x$, weil die Veränderungen von x und Z ſich entgegengeſetzt ſind. Nun iſt $y\partial x = \frac{(b + x)\sqrt{(aa - xx)}}{x}\partial x$. Man multiplicire Zähler und Nenner mit $\sqrt{(aa-xx)}$, ſo wird

$$\partial Z = \frac{bx\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}} + \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{aab\partial x}{x\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{aa\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Nun iſt aus Integralformel, 61, 54, 49, $Z = \text{Const.} - b\sqrt{(aa - xx)} - \frac{1}{2}x\sqrt{(aa - xx)} - \frac{1}{2}aa\,\text{Ang.}\sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}ab \times \log\frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{a - \sqrt{(aa - xx)}}$. Für $x = a$ iſt $Z = 0$, alſo iſt $\text{Const.} = \frac{1}{2}aa\,\text{Ang}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}aa\pi$, und ſo iſt

$$Z = \frac{1}{4}aa\pi - \frac{1}{2}(2b + x)\sqrt{(aa - xx)} - \frac{1}{2}aa\,\text{Ang.}\sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}ab\log\frac{a + \sqrt{(aa-xx)}}{a - \sqrt{(aa-xx)}},$$

oder

$$Z = \frac{1}{2}aa\,\text{Ang.}\cos\frac{x}{a} - \frac{1}{2}(2b + x)\sqrt{(aa - xx)} + ab\log.\frac{a + \sqrt{(aa-xx)}}{x}.$$

105. Der Sector BCM der Conchoide iſt $= \frac{1}{2}bb\tang\varphi + ab\log.\tang\left(45° + \frac{1}{2}\varphi\right)$

$+\frac{1}{2}aa\varphi$, den Winkel BCM $= \varphi$ geſetzt.

Denn es ſey CM $= u$, ſo iſt $u = \frac{b}{\cos\varphi} + a$, und $uu = \frac{bb}{\cos\varphi^2} + \frac{2ab}{\operatorname{coſ}\varphi} + aa$. Der Sector ſey $= U$, ſo iſt $\partial U = \frac{1}{2}uu\partial\varphi = \frac{bb\partial\varphi}{2\operatorname{coſ}\varphi^2} + \frac{ab\partial\varphi}{\operatorname{coſ}\varphi} + \frac{1}{2}aa\partial\varphi$. Es iſt $\frac{\partial\varphi}{\operatorname{coſ}\varphi^2} = \partial\operatorname{tang}\varphi$; $\frac{\partial\varphi}{\operatorname{coſ}\varphi} = \partial\log\operatorname{nat}.\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, aus Differentialformel, 38, 42. Folglich iſt

$$U = \frac{1}{2}bb\operatorname{tg}\varphi + ab\log.\operatorname{nat}.\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right) + \frac{1}{2}aa\varphi.$$

Die Conſtante iſt $= 0$.

106. Es ſey MQ ſenkrecht auf AY, ſo iſt der Abſchnitt ABMQ $= \frac{1}{4}aa\sin 2\varphi +$

$$ab\log.\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right) + \frac{1}{2}aa\varphi.$$

Es iſt nämlich $\Delta ACR = \frac{1}{2}bb\operatorname{tang}\varphi$, und $\Delta RQM = \frac{1}{2}aa\sin\varphi.\operatorname{coſ}\varphi = \frac{1}{4}aa\sin 2\varphi$.

107. Um dieſes Integral durch x auszudrucken, bemerke man, daß $a\operatorname{coſ}\varphi = x$; $a\sin\varphi = \sqrt{(aa-xx)}$;

und $\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right) = \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} =$

$\frac{x}{a - \sqrt{(aa - xx)}} = \frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x}$, (Gonio- metrie, 39.), iſt. Auch iſt $\varphi = \text{Ang.}\cos\frac{x}{a}$.

Dadurch wird die Area ABMQ =

$$\frac{1}{2}x\sqrt{(aa - xx)} + ab\log\frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x} +$$

$$\frac{1}{2}aa\ \text{Ang.}\cos\frac{x}{a}.$$

Man kann dieſes Integral auch unmittelbar erhalten, wenn man den Werth des Differentials ∂y durch x multiplicirt, und dann das Integral nimmt.

Die Quadratur der Conchoide mit circularer Baſis iſt Th. I. S. 543. gegeben.

108. Die Gleichung für die Lemniſcata iſt $(xx + yy)^2 = aa(xx - yy)$, oder $y^4 + (a^2 + 2x^2)y^2 = a^2x^2 - x^4$, daher $y^2 = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{4}a^2 + 2x^2\right)} - \frac{1}{2}(a^2 + 2x^2)$. Die Größe unter dem Wurzelzeichen rational zu machen, ſehe man $2x^2$ als die Summe eines Quadrats und doppelten Products an, wozu $\frac{1}{4}a^2$ als die Ergänzung zu einem vollſtändigen Quadrate komme, das iſt, es ſey $2x^2 = zz + az$, ſo iſt $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + 2x^2\right)} =$

$z + \frac{1}{2}a$, und $y^2 = a\left(\frac{1}{2}a + z\right) -$

$\frac{1}{2}(a^2 + az + zz) = \frac{1}{2} z (a - z)$, folglich $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} az - \frac{1}{2} zz\right)}$. Auch iſt $4x\partial x = 2z\partial z + a\partial z$, und daraus $\partial x = \frac{(a + 2z)\,\partial z}{4\sqrt{(\frac{1}{2} az + \frac{1}{2} zz)}}$, alſo

$$y\partial x = \frac{1}{4} (a + 2z)\,\partial z \cdot \sqrt{\frac{a - z}{a + z}} =$$

$$\frac{(a + 2z)(a - z)\,\partial z}{4\sqrt{(aa - zz)}} = \frac{(aa + az - 2zz)\,\partial z}{4\sqrt{(aa - zz)}}.$$

Daraus iſt $\int y\partial x = \text{Const} + \frac{1}{4} aa \,\text{Ang.}\sin \frac{z}{a}$

$$- \frac{1}{4} a \sqrt{(aa - zz)} + \frac{1}{4} z \sqrt{(aa - zz)} -$$

$\frac{1}{4} aa \,\text{Ang.}\sin \frac{z}{a}$.

Die Area fange mit $x = 0$, oder mit $z = 0$, an, ſo iſt $\text{Const} = \frac{1}{4} a^2$, und

$\int y\partial x = \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} (a - z) \sqrt{(aa - zz)}$, ein algebraiſches Integral.

Da $zz + az = 2x^2$ iſt, ſo iſt $z = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\left(2x^2 + \frac{1}{4} a^2\right)}$, wo das obere Vorzeichen zu nehmen iſt, damit $z = 0$ ſey, wenn $x = 0$ iſt, wie bey der Beſtimmung der Conſtante angenommen iſt. Das Integral durch x ſelbſt ausgedrückt, wird ſehr zuſammengeſetzt, durch x und y aber noch einfach genug.

Es iſt nämlich $\int y\partial x = \frac{1}{4}aa - \frac{a^2 \cdot xy^3}{(xx + yy)^2}$

109. Eine Curve habe die Gleichung, $x^3 + y^3 = axy$. Sie iſt diejenige, welche von den ältern Analyſten den Namen Folium, foliata curva, erhalten hat, ſ. Folium. In dieſer Gleichung ſind x und y auf einerley Art vorhanden, daher ſie in Abſicht der Axen ihrer Coordinaten denſelben Zug hat, und von einer geraden Linie, welche den Ordinatenwinkel, hier einen rechten, halbirt, in zwey gleiche und ähnliche Theile zerſchnitten wird. Sie iſt in Figur 15. abgebildet. Für x ſind entweder drey mögliche Ordinaten (zwey derſelben an der Ovale) oder nur eine, jenſeits der beiden berührenden Ordinaten an der Ovale vorhanden. Unendlich große Coordinaten erhalten das Verhältniß der Gleichheit, daher die Aſymptote TS die Axen der x und y unter einem halben rechten Winkel ſchneidet. Die gerade BAB, welche den Ordinatenwinkel XAY halbirt, theilt die Curve in zwey gleiche und ähnliche Hälften.

110. In dem Anfangspuncte A ſind beide Coordinaten $= 0$, und ihr Gränzverhältniß iſt theils in der Gleichung, $ax = yy$, theils in der, $ay = xx$, enthalten. Dieſes erhellt ſogleich, wenn man der Gleichung die Form $\frac{x^3}{y^3} + 1 = \frac{ax}{yy}$, oder die $\frac{y^3}{x^3} + 1 = \frac{ay}{xx}$ giebt. Die Gränzgleichung, $ax = yy$, gehört für eine Parabel, deren Axe in die Axe der x fällt, die Gränzgleichung, $ay = xx$, für eine Parabel, deren Axe in die der y fällt. An der Ovale ſind nun zwey Fortſchreitungen der Ordinaten, welche ſich in der berührenden DE begegnen. In dem Berührungspuncte E hat die Gleichung, $y^3 - axy + x^3 = 0$, zwey gleiche Wurzeln y. Vergleicht man ſie mit der cubiſchen Gleichung, die zwey gleiche Wurzeln p, p neben der dritten q hat, dieſer

nämlich, $y^3 - (2p + q)\,y^2 + (pp + 2pq)\,y - ppq = 0$, (Gleichung, 182.), ſo iſt $2p + q = 0$; $pp + 2pq = -ax$; $ppq = -x^3$. Wegen $q = -2p$ iſt $ax = 3pp$, und $x^3 = 2p^3$, woraus $x^2 = \frac{2p}{3}a$ iſt, das iſt, in dem Berührungspuncte iſt $ax = 3yy$, und zugleich $x^3 = 2y^3$, daher auch $x^2 = \frac{2}{3}ay$ iſt. Von $x = 0$ bis zu $x = \frac{3yy}{a}$ giebt es neben den poſitiven Ordinaten noch negative Ordinaten an den Zweig AS; jenſeits der berührenden Ordinate DE nur die an den Zweig AS allein. Zu negativen x hat die Gleichung für y nur eine mögliche Wurzel, (Gleichung, 69.).

111. Die Quadratur dieſer Curve zu finden, ſetze man $ax^2 = u^2y$, ſo iſt, wenn der Werth von y daraus in die Gleichung der Curve geſetzt wird, $x^3 = \frac{(a^2 - u^2)\,u^4}{a^3}$, und $3x^2\partial x = \frac{(4a^2 - 6u^2)\,u^3}{a^3}\partial u$,

$$\text{alſo } y\partial x = \frac{4a^2u - 6u^3}{3a^2}\partial u, \quad \text{und } \int y\partial x =$$

$\frac{4a^2u^2 - 3u^4}{6a^2}$, das iſt $\int y\partial x = \frac{2}{3} \cdot \frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^2}$ + Const. Dieſer Flächenraum iſt entweder der APM, oder der APN, oder der APL, nachdem man zu der Abſciſſe AP eine der drey zugehörigen Ordinaten RM, PN oder PL nimmt. Die Conſtante hängt von dem Verhältniſſe der verſchwindenden x und y in A ab, wo die Area anfangen ſoll. An dem Bogen MAL iſt die Gränzgleichung, $ax = yy$, daher verſchwindet die Area, wenn $x = 0$ iſt. An den Zweige NAT aber iſt die Gränzgleichung, $ay = xx$, und iſt der Werth der

Area in A $= \frac{2}{3}$ aa $- \frac{1}{2}$ aa + Const = o, alſo Const $= - \frac{1}{6}$ aa. Für den Zweig EMAS gehört nun die unbeſtimmte Area, $\frac{2}{3} \cdot \frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^2}$; und für den Zweig EAT die Area, $\frac{2}{3} \cdot - \frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^2} - \frac{1}{6}$ aa.

112. Das Segment über der Chorde AM iſt $= \frac{ax^2}{6y}$, das Segment über der Chorde AN iſt $= \frac{ay^2}{6x}$.

Denn es iſt das Dreyeck AMP $= \frac{1}{2}$ xy. Dieſes von der Area APM weggenommen bleibt übrig das Segment AMA $= \frac{x}{6y^2}(4axy - 3x^3 - 3y^3) = \frac{ax^2}{6y}$. Das Segment über AL iſt auch $\frac{ax^2}{6y}$, wo aber y einen andern Werth hat, als die Ordinaten in M.

Das Segment über AN iſt das Dreyeck APN vermindert um die Area APN. Es iſt alſo $= \frac{1}{6y^2} \times (3xy^3 - 4ax^2y + 3x^4 + a^2y^2) = \frac{a}{6y}(ay - x^2) = \frac{a}{6xy}(axy - x^3) = \frac{ay^2}{6x}$. Hieraus erhellt die

Richtigkeit deſſen, was Huygens von den Segmenten angegeben hat. (3)

113. Die Area der Ovale iſt $= \frac{1}{6}$ aa. Denn in dem äußerſten Puncte E, wo die Ordinate DE eine berührende iſt, iſt $x^2 = \frac{2}{3} ay$, alſo das Segment AME $= \frac{1}{9}$ aa. Es iſt daſelbſt auch $ay = 3yy$, alſo das Segment ANE $= \frac{1}{18}$ aa, halb ſo groß als AME, und beide Segmente zuſammen $= \frac{1}{6}$ aa, wie Huygens gefunden hat. (3)

114. Man verlege die Abſciſſen auf die gerade BB, welche den rechten Winkel XAY halbirt, ſetze AQ $= t$, und die darauf ſenkrechte NQ $= u$. Da BAX $= 45°$, ſo iſt, (Coordinaten) $m = q$, und $p = n = r$, ferner $\frac{n}{m} = \frac{n}{q} = \cos 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{p}{m} = \frac{r}{q} = \sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, alſo $(t+u)\sqrt{\frac{1}{2}} = x$, und $(t-u)\sqrt{\frac{1}{2}} = y$. Daraus folgt $x^3 + y^3 = (t^3 + 3tu^2)\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $axy = \frac{1}{2} a (t^2 - u^2)$. Denmach iſt $(t^3 + 3tu^2)\sqrt{2} = a(t^2 - u^2)$, und $u = \frac{t\sqrt{(a - t\sqrt{2})}}{\sqrt{(a + 3t\sqrt{2})}}$.

Man ſetze $a - t\sqrt{2} = z^2$, ſo iſt $t = \frac{1}{2}(a - z^2)\sqrt{2}$, und $\partial t = - z\partial z\sqrt{2}$, auch $a + 3t\sqrt{2} = 4a - 3z^2$. Dadurch iſt

$$u\partial t = - \frac{z^2 (a - z^2)\, \partial z}{\sqrt{(4a - 3z^2)}}.$$

Es iſt $\int \frac{z^4 \partial z}{\sqrt{(4a - 32^2)}} = - \frac{1}{12} z^3 \sqrt{(4a - 3z^2)} + a \int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(4a - 3z^2)}}$. (Integralformel, 61.).

Daher iſt

$$\int u\partial t = - \frac{1}{12} z^3 \sqrt{(4a - 3z^2)} + \text{Const};$$

$= \text{Const} - \frac{1}{12}(a - t\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(a + 3t\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$. Für $t = 0$ ſey die Area $= 0$, ſo iſt $\text{Const.} = \frac{1}{12} a^2$. Die Länge des Durchmeſſers AC iſt $= a\sqrt{\frac{1}{2}}$, da $u = 0$ iſt, entweder für $t = 0$, oder für $t\sqrt{2} = a$. Alſo iſt die Area ANC oder AMC $= \frac{1}{12}\alpha^2$, und die Fläche der ganzen Ovale $= \frac{1}{6} a^2$.

115. Wenn $t = - \frac{a}{3\sqrt{2}} = AF$ genommen wird, ſo iſt u unendlich groß, alſo geht die Aſymptote durch F. Die ganze, ins Unendliche ausgeſtreckte Area zwiſchen den Zweigen AS und AT und der Aſymptote iſt $= \frac{1}{6} a^2$, ſo groß als die Ovale, wel-

ches merkwürdig genug iſt. Die Curve verdiente wohl eine nähere Betrachtung.

116. Joh. Bernoulli handelt von dieſer Curve in den Lectt. Hospit. IV. Er hat die Conſtanten für die Areas APN, APM nicht beygefügt, verbeſſert aber dieſe Weglaſſung auf andere Art. Seine Rechnung iſt hier theils kürzer und bequemer gefaßt, theils auch erweitert.

117. Die Gleichung für die Logiſtica oder Logarithmiſche Linie iſt $y = e^x a$. In dem Artikel von derſelben iſt die Differentialgleichung für ſie gegeben. Die gegenwärtige endliche Gleichung zeigt an, daß die numeriſchen Werthe der Ordinaten y in geometriſcher Progreſſion fort gehen, wenn die Abſciſſen in arithmetiſcher ſind. Für die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ... etc., von x hat y die Werthe a, ea, e^2a, e^3a, e^4a, etc. Es iſt $y\partial x = ae^x\partial x$, und $e^x\partial x = \frac{\partial y}{a \log e}$ (Differentialgleichung, 52.), alſo die Area eines Abſchnittes der logarithmiſchen Linie, $\int y\partial x = \frac{y}{\log e} +$ Const, wo die natürlichen Logarithmen zu verſtehen ſind, e aber nicht die Baſis derſelben zu ſeyn braucht, ſondern irgend eine Zahl ſeyn mag. Die Conſtante hängt von dem Werthe derjenigen Ordinate ab, bey welcher der Abſchnitt anfängt.

118. Die Flächenräume beziehen ſich hier auf das Quadrat einer Linie, die als Einheit für a, x, y, angenommen wird, indem e eine bloße Zahl iſt und bleibt. Die logarithmiſche Area enthält dieſes Quadrat ſo oft als die Zahlgröße $\frac{y}{\log e} +$ Const. die Einheit enthält. Um dieſe Area durch die zugehörigen

Li=

Linien ſchlechthin auszudrucken, ſetze man zu dem Quadrate der Einheit, welche am einfachſten a ſelbſt iſt, den gefundenen numeriſchen Werth der Area als Factor. Dann bezeichnet ay die Ordinate unmittelbar, und aay das Rechteck von dieſer Ordinate und a, ſo wie Const . aa ein gegebenes Rechteck. Die logarithmiſche Area iſt nun $= \frac{ay}{\log e} + \text{Const.}$ Fängt ſie für $x = o$, oder $y = a$ an, ſo iſt ſie $= \frac{a(y-a)}{\log e}$. Fängt ſie für $y = b$ an, ſo iſt ſie $= \frac{a\,(y-b)}{\log e}$.

119. Da $\frac{y\partial x}{\partial y}$ die Subtangente der Curve iſt, ſo iſt dieſe $= \frac{a}{\log e}$, und die Area iſt gleich dem Rechteck von dem Unterſchiede der Ordinaten und der Subtangente.

120. Die Brennlinie des Kreiſes für parallele Strahlen ſey das letzte Beyſpiel einer Quadratur. Es iſt dazu Fig. 62. Tab. IV. zum erſten Theile nöthig. Die zurückwerfende Linie iſt der Kreisquadrant DMB auf welchen die Strahlen, wie PM, parallel mit AD auffallen; die Brennlinie iſt FSB. Der Mittelpunct des Kreiſes iſt A, der Halbmeſſer $AB = a$; die Coordinaten an den Kreis ſind $AP = x$; $PM = y$; und die Gleichung iſt, $aa = xx + yy$. Die Coordinaten an die Brennlinie ſind $AT = t$, $TS = u$. Es iſt $t = \frac{x^3}{a^2}$; $u = \frac{(3aa - 2yy)\,y}{2aa}$, (Catacauſtica, 10.), oder $u = \frac{aa + 2xx}{2aa} \sqrt{(aa - xx)}$.

Nun iſt $\partial t = \frac{3x^2}{a^2} \partial t$, alſo $u \partial t = \frac{3a^2x^2 + 6x^4}{2a^4} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \partial x$.

Aus Integralformel, 69, 57, 49, iſt

$$\int x^4 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \partial x = - \frac{1}{6} x^3 y^3 +$$

$$\frac{3}{6} a^2 \int x^2 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \partial x \text{ ; } \int x^2 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \partial x =$$

$$- \frac{1}{4} x y^3 + \frac{1}{4} a^2 \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \partial x \text{ ;}$$

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \partial x = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} a^2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$$

$$= \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} a^2 \text{ Ang.sin } \frac{x}{a},$$

wo zur Abkürzung y ſtatt $\sqrt{(aa - xx)}$ geſetzt iſt.

Daher wird

$$\int u \partial t = - \frac{(3aa + 2xx) x y^3}{4a^4} + \frac{3}{8} xy +$$

$\frac{3}{8} aa \text{ Ang.sin} \frac{x}{a} + \text{Const.}$ Wenn die Area für $x = 0$ anfängt, ſo iſt Const. $= 0$. Für $x = a$ iſt $y = 0$, und der Werth des Integrals $= \frac{3}{16} \pi a^2$, d. i. die Area der Brennlinie AFSBA dreymahl ſo groß, als die Fläche des Kreiſes, deſſen Durchmeſſer $\frac{1}{2} a =$ AK iſt, oder drey Quadranten AFK gleich.

Aus dem Vorigen folgt, daß der Raum SBT $=$

$$\frac{(3aa + 2xx) x y^3}{4a^4} - \frac{3}{8} xy + \frac{3}{8} aa \text{ Ang cos } \frac{x}{a}$$

Das Quadrilineum SMBTS iſt $\frac{(3aa + 2xx)xy^3}{4a^4}$ $- \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} aa \text{ Ang. coſ } \frac{x}{a}$. Denn es iſt dem Trapezium TSMP und dem Segmente PMB zuſammengenommen gleich. Jenes iſt $\frac{(ST + MP)}{2} \times TP$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{aay + 2x^2y}{2aa} + y\right)\left(x - \frac{x^3}{a^2}\right)$$

$$= \frac{y\,(3aa + 2xx)\,(a^2x - x^3)}{4a^4} = \frac{(3aa + 2xx)\,xy^3}{4a^4}.$$

Das Segment PMB aber iſt der Sector AMB minus dem Dreyecke AMP $= \frac{1}{2} aa \text{ Ang. coſ } \frac{x}{a}$ $- \frac{1}{2} xy$. Daraus ergiebt ſich das von der Chorde SM und den Bogen des Kreiſes und der Brennlinie, BM, BS, begränzte Trilineum BSM $=$ $\frac{1}{8} aa \text{ Ang. coſ } \frac{x}{a} - \frac{1}{8} xy$ oder dem vierten Theile des Segments PMB gleich.

In Fig. 51. Tab. III. Th. I. iſt AMB der Kreisquadrant, deſſen Halbmeſſer CA oder CB $= a$, FEB die Brennlinie deſſelben. Nimmt man HB $=$ $\frac{1}{2}$ CB, und in dem um HB als Durchmeſſer beſchriebenen Kreiſe die Chorde BK $=$ ME, ſo iſt, weil ME $= \frac{1}{2}$ MP $= \frac{1}{4}$ chord. 2 MP, und

$HB = \frac{1}{4} DB$, das Segment BkK dem der Chorde 2MP zugehörigen kleineren Abſchnitte des Kreiſes DAB ähnlich, folglich das Segment $BkK = \frac{1}{16}$ dieſes Abſchnittes oder $\frac{1}{8}$ des Segments PMB. Daher das Trilineum BEMB = 2 Segm. BkK, und der ganze Raum BFAB = 2 Halbkreiſen BKH = Kreisfläche BKHB, wie in dem Art. Brennlinie, 6, angeführt iſt.

121. Die Quadratur der Cykloide und der Epicykloide, wie auch einiger cykloidiſchen Abſchnitte, iſt ſchon bey der Unterſuchung dieſer Linien mitgenommen. Die Brennlinie des Kreiſes für parallele Strahlen iſt eine Epicykloide, für welche der bewegte Kreis den Halbmeſſer des ruhenden zum Durchmeſſer hat. Hier ſind die Ordinaten parallel. Bey der allgemeinen Betrachtung ſind ſie aus einem Puncte gezogen.

Die Quadratur der Sinuslinie und anderer geometriſch n abbildenden Linien iſt in dem Artikel, Linie, abbildende, gezeigt. — Die Quadratur der Spiralen wird in dem Artikel, Spirale, vorkommen.

Annäherungs-Methoden.

122. Wenn die Ordinate y ſich nicht durch eine Function von x ausdrücken läßt, oder x und ∂x nicht durch y und ∂y; auch wenn $\int y \partial x$ nicht integrabel, und wenn die Curve nur eine empiriſche iſt, an welcher die Ordinaten zu den Abſciſſen durch Beobachtung beſtimmt worden ſind, ſo muß man die Area in Trapezia mit einer krummen Seitenlinie zerlegen, und dieſe Theile mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zu berechnen ſuchen.

123. Es iſt CMNS (Fig. 16.) eine ſolche Curve, ihre Abſciſſenlinie AX, die Anfangsordinate BC, ein paar andere PM, QN. Die Abſciſſenlinie werde in mehrere gleiche (oder auch in ungleiche) Stücke getheilt, dergleichen PQ eines iſt. Durch jeden Theilungspunct ziehe man die (ſenkrechten) Ordinaten, wie BC, PM, QN. Die ſo entſtehenden vierſeitigen Räume, wie PMNQ, ſind nun aus den gegebenen Ordinaten und ihren Abſtänden zu berechnen.

124. Man betrachte jeden Bogen der Curve, wie MN, als zu einer Parabel gehörig, deren Axe in der Abſciſſenlinie der Curve liegt. Durch die beiden Puncte M, N ſind der Parameter derſelben und der Scheitel beſtimmt. Es darf hier aber, wegen der Veränderlichkeit der Parabel, weder ihr Parameter noch eine Abſciſſe in Rechnung kommen, Die Abſciſſe bezieht ſich hier auf einen fixen Punct A, an den Parabeln würde ſie für jeden Punct ſich auf den veränderlichen Scheitelpunct beziehen.

125. Es ſey AMN (Fig. 11.) eine Parabel, auf deren Axe AX zwey Abſciſſen AP, AQ genommen ſind, wozu die Ordinaten PM, QN gehören. Man ſetze AP $=$ x; PQ $= \Delta x$; PM $=$ y; QN $= y + \Delta y$. Es iſt Area APM $= \frac{2}{3} xy$; Area AQN $= \frac{2}{3} (x + \Delta x)(y + \Delta y)$, und das krummlinichte Viereck PMNQ $= \frac{2}{3} (y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \,.\, \Delta y)$. Hier muß x weggeſchafft werden.

126. Es iſt $x : x + \Delta x = y^2 : (y + \Delta y)^2$, und daraus $x : \Delta x = y^2 : (2y + \Delta y)\,\Delta y$, alſo $x\Delta y = \frac{y^2 \Delta x}{2y + \Delta y}$. Dieſer Ausdruck werde in eine

Reihe verwandelt, ſo iſt

$$x\Delta y = \left(\frac{1}{2}\, y - \frac{1}{4}\, \Delta y + \frac{1}{8} \,.\, \frac{\Delta y^2}{y} - \text{etc.}\right) \Delta x.$$

Folglich iſt das krummlinichte Viereck

$$PMNQ = y\Delta x + \frac{1}{2}\, \Delta y \Delta x + \frac{1}{12} \,.\, \frac{\Delta y^2 \,.\, \Delta x}{y} + \text{etc.}$$

Hier iſt das erſte Stück das Rechteck PMRQ, das zweyte das Dreyeck MNR, das dritte mit dem übrigen das Segment MN.

Nach dieſer Formel berechne man jedes der gemiſchtlinichten Trapezien an der vorgegebenen Curve. Es iſt dazu nicht nöthig, eine Gleichung für die derſelben ſich nähernde paraboliſche Linie zu ſuchen.

127. Exempel. Es ſey CMS ein Kreisbogen, in welchem PM der Sinus von 45°, QN der Sinus von 55° für den Sinustotus oder Radius = 1 iſt. Der Kreis wird hier mit einem beträchtlichen Abſtande der Ordinaten genommen, um von der Genauigkeit der Methode ſicherer urtheilen zu können.

PM	=	0,707107	l. Δy	=	9,049392
QN	=	0,819152			9,049392
Δy	=	0,112045	l. y	=	9,849485
$\frac{1}{2}\Delta y$	=	0,056023	l. 12	=	1,079181
Δx	=	0,133530	l. $\Delta y^2 : 12y$	=	7,170118
$\Delta y^2 : 12y$	=	0,001479	l. Factors	=	9,883440
Factor zu Δx	=	0,764609	l. Δx	=	9,125579
					9,009019

Area PMNQ = 0,1021 . .

Das Segment der Kreisfläche zwiſchen den beiden Sinus iſt = sector 10° + $\frac{1}{2}$ sin 45° . coſ 45° —

$\frac{1}{2}$ sin . 55° coſ 55° = sector 10° + $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{4}$ sin 70°.

$$\text{sector } 10° = 0{,}087266$$
$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$
$$-\frac{1}{4}\sin 70° = -0{,}234923$$
$$\text{Segment} = 0{,}102343$$

128. Die Berechnung der Ergänzung $\frac{\Delta y^2.\Delta x}{12y}$ macht etwas Mühe; doch wird ſie oft weggelaſſen werden können, da $\frac{\Delta y^2}{12y}$ meiſtens verhältnißmäßig ſehr klein ſeyn wird. Man kann dieſes immer ſehr leicht beurtheilen. Bey dieſer Rechnung iſt man an keine Verhältniſſe der Abſtände zwiſchen den Ordinaten gebunden.

129. Da man einen nicht großen Bogen einer Curve als eine paraboliſche Linie betrachten kann, von der Form $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, + etc., und dieſe ſich leicht quadriren läßt, ſo führt dieſes auf eine allgemeine Methode der Quadrirung. Giebt man der Gleichung die Form, $y = A + ax + \frac{bx(x-1)}{1.2} + \frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3}$ + etc., ſo ſind a, b, c, etc., die Anfangsglieder der Differenzreihen. ſ. Einſchalten, 6.

130. Newton hat dieſe Methode vorgeſchlagen,

in der Methodo differentiali, Prop. VI. giebt aber nur eine einzelne Formel, ohne die Rechnungsart zu entwickeln. Es ſeyn vier Ordinaten in gleichen Abſtänden gegeben; die Summe der erſten und vierten ſey A; der zweyten und dritten B. der Abſtand der beiden äußern R, ſo iſt die Area zwiſchen den beiden äußern $= \frac{1}{8}(A + 3B), R.$

131. Cotes wurde durch die Zierlichkeit des von Newton aufgeſtellten Reſultats veranlaßt, daſſelbe weiter auszudehnen und Formeln für die Area aus drey, vier, und ſo fort bis eilf von einander gleich weit abſtehenden Ordinaten zu berechnen. Dieſe giebt er am Ende der Abhandlung de methodo differentiali, aber auch ohne das Verfahren anzuzeigen, wodurch er ſie gefunden hat. Er bezeichnet, wie Newton, die Summe der erſten und letzten Ordinate durch A, der zweyten und vorletzten durch B, der dritten von den beiden äußerſten abgezählt durch C, und ſo fort; durch den letzten Buchſtab jeder Formel aber die mittelſte aller Ordinaten, wenn die Anzahl derſelben ungerade iſt, die Summe der beiden mittleren hingegen, wenn die Anzahl gerade iſt. Der Abſtand der beiden äußerſten Ordinaten oder die Baſis des zu quadrirenden Flächenraums nennt er mit Newton R. Für die vorgeſetzte Zahl der Ordinaten iſt nun die Area

3	$\frac{1}{6}(A + 4B) R$
4	$\frac{1}{8}(A + 3B) R$
5	$\frac{1}{90}(7A + 32B + 12C) R$
6	$\frac{1}{288}(19A + 75B + 50C) R$

7	$\frac{1}{840}(41A + 216B + 27C + 272D)R$
8	$\frac{1}{17280}(751A + 3577B + 1323C + 2989D)R$
9	$\frac{1}{28350}(989A + 5888B - 928C + 10496D - 4540E)R$
10	$\frac{1}{89600}(2857A + 15741B + 1080C + 19344D + 5778E)R$
11	$\frac{1}{598752}(16067A + 106300B - 48525C + 272400D - 260550E + 427368F)R$

Wie die Formeln gefunden werden können, iſt in dem Artikel, Integralformel, 151. Th. III. S. 883. gezeigt worden, wo auch die Formeln bis zu dem Falle von ſieben Ordinaten mitgetheilt ſind, nur muß man um die hier gegebenen Formeln zu erhalten, die dortigen Bezeichnungen in die hier angenommenen übertragen. So iſt z. B. in die Formel für die Area aus ſieben Ordinaten ſtat A + G, B + F, C + E, beziehungsweiſe blos A, B, C, und ſtatt des Factors $\frac{6}{840}$, weil der Abſtand der beiden äußerſten Ordinaten dort = 6, hier = R iſt, $\frac{1}{840}$ R zu ſetzen.

132. Stirling hat in ſeiner Schrift Methodus differentialis p. 146. von Coteſens Formeln bloß die, durch welche die Area aus einer ungeraden Anzahl von Ordinaten beſtimmt wird, doch nur bis zu dem Falle von neun Ordinaten, und gleichfalls ohne

Beweis, wiedergegeben. Er ſetzt dazu noch eine Correctionstafel, in welcher P die Summe zweyer Ordinaten iſt, welche in dem gemeinſchaftlichen Abſtande der übrigen Ordinaten, die eine vor der erſten, die andere nach der letzten, jenen beygefügt ſind.

3	$\frac{1}{180}(P - 4A + 6B)R$
5	$\frac{1}{470}(P - 6A + 15B - 20C)R$
7	$\frac{1}{930}(P - 8A + 28B - 56C + 70D)R$
9	$\frac{1}{1600}(P - 10A + 45B - 120C + 210D - 252E)R$

Die Correction der Area findet ſich in dem Falle dreyer Ordinaten ſo. Es iſt bey hinlänglicher Entwickelung für $x = 2$ (Integralformel, 151)

$$\int y \partial y = \frac{1}{3}(6A + 6a + b) - \frac{1}{90}d + \text{etc.}$$

Die aus drey Ordinaten beſtimmte Area $\frac{1}{3}(6A + 6a + b)$ iſt folglich ohngefähr um $\frac{1}{90}d$ zu groß. Setzt man zu den Gliedern A, B, C, noch die beiden 'A, C', jenes vor A, dieſes nach C, in dem Abſtande $= 1$, ſo iſt (Arithm. Reihen höherer Ordn. 2)

$$d = C' - 4C + 6B - 4A + 'A$$

alſo

$$\frac{1}{90}d = \frac{1}{90}('A + C' - 4(A + C) + 6B).$$

Nach Stirlings Bezeichnungsart iſt P ſtatt $'A + C'$ und A ſtatt $A + C$ zu ſetzen. Überdies

iſt der Abſtand der Ordinaten A und C, welcher bey der Formel = 2 iſt, nach Stirling R, alſo $\frac{1}{90}$ = $\frac{1}{180}$ R. Dadurch wird $\frac{1}{90}$ d = $\frac{1}{180}$ (P — 4A + 6B) R. Die übrigen Correctionsformeln werden auf ähnliche Art gefunden. Die Brüche in der Tafel $\frac{1}{470}$, $\frac{1}{930}$ u. ſ. w. ſind nur genäherte. Der Bruch $\frac{1}{470}$ z. E. ſteht ſtatt $\frac{2}{945} = \frac{1}{472\frac{1}{2}}$. Die Correctionen ſelbſt ſind ſubtractiv, alſo additiv, wenn ſie verneint werden. Man berechnet und gebraucht von ihnen nur die höchſte Decimalziffer, und iſt alsdann ſicher, die Area bis zu der Decimalſtelle, auf welche jene Ziffer der Correction trifft, richtig zu erhalten.

Berechnet man noch den Fehler der Formel für die Area aus vier Ordinaten, ſo findet ſich, daß die Formel ohngefähr $\frac{3}{80}$ d zu viel giebt. Die Fehler der Formeln für die Area aus drey und aus vier Ordinaten fallen alſo in dieſelbe Ordnung der Differenzen. Um das Verhältniß der Fehler zu finden, drücke man zuerſt die Area als ein Rechteck, deſſen eine Seite die Baſis des Flächenraumes iſt, aus; ſo iſt bey drey Ordinaten die Area $\left(\frac{A + 4B}{6} - \frac{1}{180} d \ldots\right)$ R bey vier $\left(\frac{A + 3B}{8} - \frac{1}{80} d \ldots\right)$ R. Es iſt aber d das Anfangsglied der vierten Differenz-Reihe, alſo in (Differenzen-Rechn. 48.) $\Delta^4 . fx$, wo fx die Ordinate der

zu quadrirenden Curve iſt. Nun iſt bey drey Ordinaten das dortige $u = \frac{1}{2} R$, bey vier Ordinaten $u = \frac{1}{3} R$, daher in jenem Falle das erſte Glied von $\Delta^4.fx$ oder $d = 24\delta \left(\frac{1}{2} R\right)^4$, in dieſem $24\delta \left(\frac{1}{3} R\right)^4$. Folglich verhält ſich der Fehler der Area über derſelben Baſis bey drey Ordinaten zu dem bey vier Ordinaten wie $\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4 : \frac{1}{80}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 9 : 4$, alſo der Fehler bey vier Ordinaten etwa halb ſo groß als der bey drey Ordinaten. Eben ſo findet ſich, daß der Fehler bey ſechs Ordinaten von derſelben Ordnung der Differenzen und kaum halb ſo groß iſt, als der Fehler bey fünf Ordinaten. Der Grad von Genauigkeit, den man bey Anwendung einer geraden Zahl von Ordinaten erlangt, iſt alſo nur unbedeutend oder faſt gar nicht größer, als der, den man erhält, wenn man die nächſt niedrige ungerade Anzahl von Ordinaten gebraucht. Das iſt der Grund, warum Stirling nur die Formeln für eine ungerade Anzahl Ordinaten angeführt hat, ob er gleich ſolches ſelbſt nicht ſagt.

133. Stirling giebt noch eine Tafel für die Flächenräume durch die Differenzen gleichweit von einander abſtehender Ordinaten bey einer ungeraden Anzahl derſelben. Es ſey A die mittelſte Ordinate, B der zweyte Unterſchied der drey mittleren, C der vierte Unterſchied der fünf mittleren u. ſ. f.; ſo ſind die Flächenräume nahe gleich dem Rechtecke aus der Grundlinie oder dem, zwiſchen den äußerſten Ordinaten enthaltenen Theile der Abſciſſenlinie in die folgenden Größen.

3	$A + \frac{1}{6} B$
5	$A + \frac{2}{3} B + \frac{7}{90} C$
7	$A + \frac{3}{2} B + \frac{11}{20} C + \frac{41}{840} D$
9	$A + \frac{8}{3} B + \frac{86}{45} C + \frac{92}{189} D + \frac{3}{86} E$
11	$A + \frac{25}{6} B + \frac{175}{36} C + \frac{3445}{1512} D + \frac{4045}{9072} E + \frac{94}{3503} F.$

Die Formeln ſind im Grunde einerley mit den vorigen, und werden leicht aus denſelben abgeleitet. Ihr Vorzug vor dieſen beſteht darin, daß in ihnen die numeriſchen Coefficienten kleiner ſind, als in jenen. Aus der Convergenz der Reihe A, B, C, D, . . . beurtheilt man übrigens den Grad der Genauigkeit, welcher durch die angewandte Formel erreicht wird.

134. Maclaurin giebt in dem Treatise of Fluxions art. 830. und 832 zwey Ausdrücke für die Area $\int y\partial x = A$ einer Curve durch die Summe gleichweit von einander abſtehender Ordinaten. Es ſey ω der gemeinſchaftliche Abſtand der Ordinaten, Σ die Summe aller Ordinaten außer der letzten, α der Überſchuß der letzten Ordinate über die erſte, β, δ, ζ, ϑ . . . die Unterſchiede der Werthe, welche $\frac{\partial y}{dx}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, $\frac{d^7 y}{dx^7}$ . . . beziehungsweiſe für die letzte und erſte Ordinate haben, ſo iſt nach der erſten Formel

$$A = \left(\Sigma + \frac{1}{2}\alpha\right)\omega - \frac{1}{12}\beta\omega^2 + \frac{1}{720}\delta\omega^4 - \frac{1}{30240}\zeta\omega^6 + \frac{1}{1209600}\vartheta\omega^8 - \text{etc.}$$

Das Geſetz, welches die Coefficienten befolgen, giebt Maclaurin Art. 828 an. Die Formel folgt leicht aus dieſer oder iſt vielmehr keine andere als dieſe

$$\Sigma y = \frac{1}{\omega}\int y\partial x - \frac{1}{2}y + \frac{\mathfrak{A}\omega}{1.2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\mathfrak{B}\omega^3}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\mathfrak{C}\omega^5}{1.2\ldots6}\cdot\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

welche in dem Artikel, Summirung der Reihen, erwieſen werden wird, und worin Σ das Summationszeichen für endliche Differenzen $\Delta x = \omega$ iſt, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, . . . aber die Bernoulliſchen Zahlen ſind.

Es ſey nun die Baſis des zu quadrirenden Flächenraums in n gleiche Theile, deren jeder $= \omega$, getheilt, und $n\omega = R$. Die Ordinaten, welche in den Endpuncten und den Theilungspuncten der Baſis errichtet ſind, ſeyn $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots . y^{(n)}$. Heißt nun der von der Baſis R, den Ordinaten $y^{(0)}$ und $y^{(n)}$, und dem Bogen der Curve begränzte Flächenraum Q, ſo iſt

$$Q = \left(\frac{y^{(0)} + y^{(1)} + \ldots . y^{(n)}}{n}\right)R - \left(\frac{y^{(0)} + y^{(n)}}{2n}\right)R - \frac{\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{R^2}{n^2}\left(\frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right) + \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\,\frac{R^4}{n^4}\left(\frac{\partial^3 y^{(n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right) - \frac{\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\,\frac{R^6}{n^6}\left(\frac{\partial^5 y^{(n)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

Setzt man $n = 1$, und ſubſtituirt für $y^{(1)}$ wieder $y^{(n)}$, ſo wird die Area bloß aus den beiden äußerſten Ordinaten beſtimmt, und

$$Q = \left(\frac{y^{(0)} + y^{(n)}}{2}\right)R^2 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2}R^2\left(\frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}R^4\left(\frac{\partial^3 y^{(n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial y^3}\right) - \text{etc.}$$

Schafft man aus dieſen beiden Formeln

$\mathfrak{A}R^2\left(\frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$ weg, ſo wird $Q =$

$$\frac{(n-1)(y^{(0)}+y^{(n)})+2n(y^{(1)}+y^{(2)}+\ldots\ldots+y^{(n-1)})}{2(nn-1)}R$$
$$-\frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}.\frac{R^4}{n^2}\left(\frac{\partial^3 y^{(n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$
$$+\frac{\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}.\frac{(n^2+1)R^6}{n^4}.\left(\frac{\partial^5 y^{(n)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$
$$-\frac{\mathfrak{D}}{1.2\ldots\ldots8}.\frac{(n^4+n^2+1)R^8}{n^6}\left(\frac{\partial^7 y^{(n)}}{\partial x^7} - \frac{\partial^7 y^{(0)}}{\partial x^7}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieſe Formel giebt Maclaurin Art. 848.

135. Setzt man in der letzten Formel $n = 2$, ſo daß die Area aus drey Ordinaten beſtimmt wird, ſo iſt.

$$Q = \frac{y^{(0)} + y^{(2)} + 4y^{(1)}}{6}R$$
$$-\frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}.\frac{R^4}{4}\left(\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$
$$+\frac{\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}.\frac{5R^6}{16}.\left(\frac{\partial^5 y^{(2)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

wo der erſte Theil $\frac{y^{(0)} + y^{(2)} + 4y^{(1)}}{6} R$ Coteſens Formel iſt.

Für $n = 3$ oder bey vier Ordinaten wird

$$Q = \frac{y^{(0)} + y^{(3)} + 3\,(y^{(1)} + y^{(2)})}{8} R$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \frac{R^4}{9} \left(\frac{\partial^3 y^{(3)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Hier iſt der erſte Theil $\frac{y^{(0)} + y^{(3)} + 3(y^{(1)} + y^{(2)})}{8} R$ Newtons Formel.

Berechnet man denſelben Flächenraum aus drey und aus vier Ordinaten, ſo ſind die äußerſten Ordinaten dieſelben, folglich $\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3}$ bey drey Ordinaten $= \frac{\partial^3 y^{(3)}}{\partial x^3}$ bey vier; und es verhalten ſich die Fehler, um welche die Area zu groß gefunden wird, nahe wie 9 : 4, welches ſchon oben bemerkt iſt.

136. Für $n = 4$ oder bey fünf Ordinaten wird aus (134)

$$Q = \frac{3\,(y^{(0)} + y^{(4)}) + 8\,(y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)})}{30} R$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1..4} \cdot \frac{R^4}{16} \left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}}{1....6} \cdot \frac{17R^6}{256} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$

$$- \text{etc.}$$

Berechnet man dieſelbe Area aus den Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(2)}$, $y^{(4)}$, ſo iſt nach (135)

$$Q = \frac{y^{(0)} + y^{(4)} + 4y^{(2)}}{6} R$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1 \ldots 4} \cdot \frac{R^4}{4} \left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \cdot \frac{5R^6}{16} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right) - \text{etc.}$$

und wenn man $\mathfrak{B}R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$ eliminirt

$$Q = \frac{7(y^{(0)} + y^{(4)}) + 32(y^{(1)} + y^{(3)}) + 12y^{(2)}}{90} R$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \cdot \frac{R^6}{64} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Das erſte in R hier multiplicirte Glied iſt die Formel von Cotes. Man kann auf dieſe Art weiter gehen, und noch mehrere der Coteſiſchen Formeln ableiten, und zugleich beſtimmen, um wie viel jede ohngefähr fehlt.

137. Die zweyte der von Maclaurin gegebenen Formeln findet ſich ſo. Es ſeyn zuerſt bloß drey Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$; ſo iſt nach der erſten Formel in (134) die Area

$$Q = \frac{1}{2} y^{(1)} R + \frac{1}{4} (y^{(0)} + y^{(2)}) R$$

$$- \frac{\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \frac{R^2}{2^2} \left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \right)$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \frac{R^4}{2^4} \left(\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \cdot \frac{R^6}{2^6} \left(\frac{\partial^5 y^{(2)}}{\partial x^5} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x^5} \right) + \text{etc.}$$

Aus den beiden äußerſten Ordinaten aber iſt

$$Q = \frac{1}{2}(y^{(0)} + y^{(2)}) R$$

$$- \frac{\mathfrak{A}}{1.2} . R^2 \left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4} . R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} R^6 \left(\frac{\partial^5 y^{(2)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

folglich durch Elimination von $y^{(0)} + y^{(2)}$

$$Q = y^{(1)} R + \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2.2} R^2 \left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$$

$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.2^3} R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$+ \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1 \ldots 6.2^5} R^6 \left(\frac{\partial^5 y^{(2)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) - \text{etc.}$$

Es ſey jetzt die Baſis R des zu quadrirenden Flächenraums in eine gerade Anzahl $= 2n$ gleicher Theile, deren jeder $= \omega$, getheilt, ſo daß $R = 2n\omega$. Die Ordinaten, welche dem Anfangspuncte, den Theilungspuncten und dem Endpuncte der Baſis entſprechen, ſeyn nach der Reihe $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)} \ldots . y^{(2n)}$. Man berechne nun die Flächenräume, welche über jedem nten Theile der Baſis $= 2\omega$ ſtehen, aus den mittlern Ordinaten $y^{(1)}, y^{(3)}, y^{(5)} \ldots y^{(2n-1)}$ einzeln, ſo giebt ihre Summe den ganzen über der Baſis R ſtehenden Flächenraum. Nennt man ihn, wie vorher, Q, ſo wird nach Subſtitution von $\frac{R}{2n}$ ſtatt ω

$$Q = \frac{y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + \ldots + y^{(2n-1)}}{n} R$$

$$+ \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2.2.} \cdot \frac{R^2}{n^2} \left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \right)$$
$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B})}{1.2.3.4.2^3} \cdot \frac{R^4}{n^4} \left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$
$$+ \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.2\ldots6.2^5} \cdot \frac{R^6}{n^6} \left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right) - \text{etc.}$$

Dieſes iſt Maclaurins zweyter Ausdruck.

Berechnet man die Area allein aus der mittelſten Ordinate $y^{(n)}$, ſo wird

$$Q = y^{(n)} R + \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2.2} \cdot R^2 \left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \right)$$
$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.2^3} \cdot R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$
$$+ \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1\ldots6.2^5} \cdot R^6 \left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right) - \text{etc.}$$

und durch Elimination von $\mathfrak{A} R^2 \left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \right)$

$$Q = \frac{n(y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + \ldots + y^{(2n-1)}) - y^{(n)}}{nn-1} R$$
$$+ \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.2^3} \cdot \frac{R^4}{n^2} \left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$
$$- \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1\ldots6.2^5} \cdot \frac{(n^2+1) R^6}{n^4} \left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right)$$
$$+ \text{etc.}$$

138. Es ſey $n = 2$, alſo fünf Ordinaten, ſo giebt die zweyte Formel

$$Q = \frac{(y^{(1)} + y^{(3)}) - y^{(2)}}{3} R$$

$$+\frac{7\mathfrak{B}}{1.2.3.4.32}R^4\left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)-\text{etc.}$$

Wenn n = 3, oder die Zahl der Ordinaten ſieben iſt, ſo wird

$$Q=\frac{3(y^{(1)}+y^{(3)}+y^{(5)})-y^{(3)}}{8}R$$

$$+\frac{7\mathfrak{B}}{1.2.3.4.72}R^4\left(\frac{\partial^3 y^{(6)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)-\text{etc.}$$

Für n = 4 oder bey neun Ordinaten wird

$$Q=\frac{4(y^{(1)}+y^{(3)}+y^{(5)}+y^{(7)})-y^{(4)}}{15}R$$

$$+\frac{\mathfrak{B}}{1\ldots4}\cdot\frac{7R^4}{128}\left(\frac{\partial^3 y^{(8)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$-\frac{\mathfrak{C}}{1\ldots6}\cdot\frac{17.31R^6}{8192}\left(\frac{\partial^5 y^{(8)}}{\partial x^5}-\frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$

$$+\text{etc.}$$

Dieſelbe Area aus den Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(2)}$, $y^{(4)}$, $y^{(6)}$, $y^{(8)}$ berechnet iſt

$$Q=\frac{2(y^{(2)}+y^{(6)})-y^{(4)}}{3}R$$

$$+\frac{\mathfrak{B}}{1\ldots4}\cdot\frac{7R^4}{32}\left(\frac{\partial^3 y^{(8)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$-\frac{\mathfrak{C}}{1\ldots6}\cdot\frac{5.17R^6}{512}\left(\frac{\partial^5 y^{(8)}}{\partial x^5}-\frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)+\text{etc.}$$

Hieraus wird, durch Elimination von

$$\mathfrak{B}R^4\left(\frac{\partial^3 y^{(8)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right),\ Q=$$

$$\frac{16(y^{(1)}+y^{(3)}+y^{(5)}+y^{(7)})-10(y^{(2)}+y^{(6)})+y^{(4)}}{45}R$$

$$+\frac{\mathfrak{C}}{1\ldots6}\cdot\frac{31R^6}{2048}\cdot\left(\frac{\partial^5 y^{(8)}}{\partial x^5}-\frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)+\text{etc.}$$

Auf dieſe Art kann man weiter gehen, und bey einer größern Anzahl Ordinaten immer mehrere von den Größen

$$\mathfrak{A}R^2 \left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(o)}}{\partial x}\right), \quad \mathfrak{B}R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(o)}}{\partial x^3}\right)$$

u. ſ. w. ausſtoßen.

139. Iſt die zu quadrirende Curve durchaus gegen die Abſciſſenlinie hohl, ſo iſt der in R multiplicirte Theil der erſten Formel in (134), nämlich

$$\left(\frac{1}{2}(y^{(o)} + y^{(n)}) + y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots + y^{(n-1)}\right)\frac{R}{n}.$$

die Summe der eingeſchriebenen Trapezien, deren jedes zwey nächſte Ordinaten zur Grundlinie, und den zwiſchen ihnen enthaltenen Theil der Abſciſſenlinie zur Höhe hat. Der erſte Theil der erſten Formel in (137) aber, oder $(y^{(1)} + y^{(3)} + \ldots + y^{(2n-1)}) \frac{R}{n}$, wo die $y^{(1)}, y^{(3)}, \ldots$ nicht mit den vorigen einerley ſind, druckt unter eben dieſer Vorausſetzung die Summe der umſchriebenen Trapezien aus, deren jedes eine der Ordinaten $y^{(1)}, y^{(3)}, y^{(5)} \ldots y^{(2n-1)}$ zur mittleren Grundlinie und den Theil der Grundlinie, welcher zwiſchen der nächſt vorhergehenden und nachfolgenden Ordinate enthalten iſt, zur Höhe hat. Wenn die Curve gegen die Abſciſſenlinie durchweg erhaben iſt, ſo verhält ſich die Sache umgekehrt. Jene Ausdrücke geben alſo in dieſen beiden Fällen ein Paar Gränzen, zwiſchen denen die wahre Area liegt. Aber auch in den andern Fällen, wo die obige Vorausſetzung nicht ſtatt hat, ſondern die Curve zum Theil hohl, zum Theil erhaben gegen die Abſciſſenlinie iſt, wird man durch jene Ausdrücke ein Paar Gränzen für die Area erhalten, wofern nur der Zug der Curve ſonſt nicht unterbrochen und $\frac{R}{n}$ klein genug genommen wird, daß jedes nach-

folgende Glied der Reihe

$$\frac{\mathfrak{A}R^2}{1.2n^2}\left(\frac{\partial y^{(n)}}{\partial x}-\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right),\ \frac{\mathfrak{B}R^4}{1.2.3.4\,n^4}\left(\frac{\partial^3 y^{(n)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

u. ſ. w. in Beziehung auf das nächſt vorhergehende vernachläſſigt werden kann.

140. Berechnet man unter der Vorausſetzung von (137), daß die Baſis R in 2n gleiche Theile getheilt ſey, die einzelnen Flächenräume, welche über jedem nten Theile der Baſis ſtehen, aus den beiden den Endpuncten, und der Mitte deſſelben entſprechenden Ordinaten, und nimmt ſolche zuſammen, ſo wird, wenn man die Summe der äußerſten Ordinaten oder $y^{(0)} + y^{(2n)} = A$, die Summe aller den ungeraden Theilungspuncten der Baſis zugehörigen Ordinaten oder $y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + \ldots + y^{(n-1)} = B$, und die Summe aller den geraden Theilungspuncten entſprechenden oder $y^{(2)} + y^{(4)} + y^{(6)} + \ldots + y^{(2n-2)} = C$ ſetzt,

$$Q = \frac{A + 4B + 2C}{6} \cdot \frac{R}{n}$$
$$- \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \frac{R^4}{4n^4}\left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$
$$+ \frac{\mathfrak{C}}{1\ldots 6} \cdot \frac{5R^6}{16n^4}\left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

Die Formel $Q = \frac{A + 4B + 2C}{6} \cdot \frac{R}{n} = \frac{A + 4B + 2C}{3} \cdot \frac{R}{2n}$, wo $\frac{R}{2n}$ einer der gleichen Theile der Baſis oder der Abſtand je zweyer nächſten Ordinaten iſt, iſt von Thom. Simpſon in ſeinen Mathematical Dissertations angegeben und empfohlen worden. Lalande hat ſich ihrer zur Beſtimmung

der beiden erſten Coefficienten in der Entwickelung von $(h-\cos t)^m$ für gewiſſe Fälle bedient. Man ſehe deſſen Aſtronomie, Th. III. Nr. 3660 ff.

141. Die Formel für die Area aus drey Ordinaten, worauf die eben angeführte

$$Q = \frac{A + 4B + 2C}{6} \cdot \frac{R}{n}$$

beruht, läßt ſich auch bequem durch die Geometrie finden. Es ſeyn PL, QM, RN (Fig. 17) drey gleichweit von einander abſtehende Ordinaten einer Curve. VU. Betrachtet man den Bogen LMN als zu einer Apolloniſchen Parabel gehörig, ſo muß, weil dieſe durch drey Puncte nicht beſtimmt wird, noch eine Bedingung hinzukommen. Man füge alſo noch hinzu, daß M der Scheitelpunct eines Durchmeſſers MQ durch M ſey. Da nun MQ die Chorde LN in q halbirt, ſo halbirt ſie auch jede andere der LN parallele Chorde (Parabel, 12) und die durch M der LN parallele berührt die Parabel daſelbſt, indem hier die beiden Durchſchnittspuncte der Chorde mit der Curve in einen Punct fallen. (a. a. O. 13). Die verlängerten PLRN ſchneiden die berührende in p, r, ſo iſt der paraboliſche Abſchnitt LMNL $= \frac{2}{3}$ LprN, oder doppelt ſo groß als die Fläche pLMNrp (71.). Wir haben nun drey Flächenräume, das Trapezium PLNR (= 𝔄) die paraboliſche Area PLMNR (= 𝔅) und das Trapezium PprR (= ℭ), unter welchen der Unterſchied 𝔅 — 𝔄 = 2(ℭ — 𝔅) iſt, daher 3𝔅 = 2ℭ + 𝔄. Es iſt 𝔄 = (PL + RN) PQ, ſ. Trapezium, ℭ = (Pp + Rr) PQ = 2QM . PQ, weil QM das arithmetiſche Mittel zwiſchen Pp und Rr iſt. Daher iſt die paraboliſche Area

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{3} (PL + 4QM + RN)\, PQ$$

wie oben gefunden worden.

Montucla führt (T. III. p. 201) die geometriſche Herleitung aus Simpſons vorhin genannter Schrift an, entwickelt aber nicht genugſam den Grund, worauf ſie beruht. Er ſagt nur, die durch M mit LN parallele ſey eine berührende, und daher LMNL $= \frac{2}{3}$ LprN.

142. Auch Newtons Formel für die Area aus vier Ordinaten gilt eigentlich von dem Flächenraume einer apolloniſchen Parabel. Es ſeyn PL, QM, NR, SO (Fig. 18.) vier von einander gleichweit abſtehende Ordinaten zu vier Puncten L, M, N, O einer ſolchen. Damit durch die vier Puncte L, M, N, O nur eine Parabel gehe, müſſen die Linien MN und LO parallel ſeyn. Es ſey dies der Fall, ſo iſt die Linie VT, welche durch die Mitten p, q von MN und LO gezogen iſt, den Ordinaten PL, QM, RN, SO parallel und ein Durchmeſſer der Parabel, deſſen Scheitel V iſt. Man ſetze $PL = y'$, $QM = y''$, $RN = y''$, $SO = y'''$, und VT, welche PS, in T halbirt, $= Y$; ferner $PQ = QR = RS = \omega$; ſo iſt

$$Vp = VT - pT = Y - \frac{y' + y''}{2},$$

$$\text{weil } pT = \frac{QM + RN}{2},$$

und eben ſo

$$Vq = Y - \frac{y + y'''}{2}. \text{ Nun iſt}$$

$$Vp : Vq = Mp^2 : Lq^2 = mq^2 : Lq^2 = QT^2 : PT^2 = 1 : 9$$

d. i.

$$Y - \frac{y' + y''}{2} : Y - \frac{y + y'''}{2} = 1 : 9$$

Hieraus wird $Y = \frac{9(y' + y'') - (y + y''')}{16}$

Demnach die Area PLVOS

$$= \left(\frac{PL + OS + 4VT}{3}\right) PT$$

$$= \frac{y + y''' + 4Y}{3} \cdot \frac{3}{2}\,\omega = \frac{y + y''' + 4Y}{2}\,\omega$$

$$= \frac{3(y + y''') + 9(y' + y'')}{8}\,\omega$$

$$= \frac{y + y''' + 3(y' + y'')}{8} \cdot R$$

wo $R = 3\omega = PS$ iſt.

Daß die Formeln für die Area aus drey und vier Ordinaten, welche Cotes und Newton gegeben haben, eigentlich bei einer apolloniſchen Parabel Statt haben, erhellt auch daraus, daß, wenn dieſe Formeln in aller Schärfe gelten ſollen, in (135) überhaupt $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$ ſeyn muß. Dies giebt aber $y = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, welches die Gleichung für eine Parabel iſt, in welcher die x auf einer, auf die Axe der Parabel ſenkrechter genommen werden, die y aber dieſer Axe parallel ſind.

143. Die Aufgabe der mechaniſchen Quadraturen, wie man die bisher betrachteten nennt, läßt ſich überhaupt ſo abfaſſen. Wenn y die Ordinate x die Abſciſſe der zu quadrirenden Curve bezeichnet, und $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \ldots$ u. ſ. w. iſt, ſo iſt $\int y \partial x$, von $x = 0$ bis $x = f$ genommen,

$$= \alpha f + \frac{1}{2}\beta f^2 + \frac{1}{3}\gamma f^3 + \frac{1}{4}\delta f^4 + \text{u. ſ. w.}$$

$$= f\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 + \frac{1}{4}\delta f^3 + \ldots\right),$$

wo $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 + \ldots$ die der Abſciſſe f entſprechende Ordinate einer Curve iſt, für welche

$$y = \alpha + \frac{1}{2}\beta x + \frac{1}{3}\gamma x^2 + \frac{1}{4}\delta x^4 + \text{etc.}$$

Es kommt nun darauf an, dieſe Ordinate aus einigen an der zu quadrirenden Curve innerhalb der Gränzen $x = 0$ und $x = f$ in ſchicklichen Abſtänden genommenen Ordinaten zuſammenzuſetzen, um zu der Berechnung der Area der Coefficienten α, β, γ u. ſ. w. nicht zu bedürfen, als welche, wenn die Ordinaten durch die Abſciſſen nicht in der angenommenen Form gegeben ſind, zu finden beſchwerlich ſeyn kann. Sind nun $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, ... $y^{(r)}$, die Ordinaten an der zu quadrirenden Curve, welche den Abſciſſen $x = 0, \frac{1}{m} f$, $\frac{1}{n} f, \frac{1}{p} f \ldots\ldots f$, wo m, n, p u. ſ. w. $>$ 1 ſind, beziehungsweiſe entſprechen, ſo laſſen ſich, weil die Ausdrücke für die Ordinaten an der Curve und ihrer Quadratrix bloß in den Zahlen, womit die einzeln Glieder multiplicirt werden, verſchieden ſind, immer Zahlcoefficienten L, M, N, P, ... R finden, welche $Ly^{(0)} + My^{(1)} + Ny^{(2)} + \ldots + Ry^{(r)}$ mit dem Ausdrucke $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 + \frac{1}{4}\delta f^3 + \text{etc.}$, in mehr oder weniger von dem Anfange der Reihe an genommenen Gliedern identiſch machen, wodurch alsdann, wo nicht ein genauer, doch, wofern nur y ſich mit keiner zu großen Abweichung auf die Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ bringen läßt, ein genäherter Werth der Area oder von $\int y \partial x$ erhalten wird.

Nimmt man m, n, p . . . u. ſ. w., willkührlich an, wie wenn man die Abſtände der Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(1)}$ u. ſ. w., alle unter ſich gleich ſetzt, ſo laſſen ſich, wie die Theorie der Gleichungen lehrt, im Allgemeinen die beiden Ausdrücke $Ly^{(0)} + My^{(1)} + \ldots + Ry^{(r)}$ und $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{2}\gamma f^2 +$ etc. nur in ſo viel Gliedern identificiren, als man Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, ... $y^{(r)}$ genommen hat. Läßt man m, n, p, u. ſ. w. aber unbeſtimmt, ſo kann man außer jenen Gliedern noch ſo viele identiſch machen, als unbeſtimmte m, n, p . . . , d. i., als Ordinaten zwiſchen $y^{(0)}$ und $y^{(r)}$ eingeſchaltet ſind. Man erhält alſo bey derſelben Anzahl von Ordinaten, als in dem erſten Falle genommen ſind, eine größere Genauigkeit, welche noch vermehrt wird, wenn man auch noch die Ordinaten in den Endpuncten der Baſis $y^{(0)}$ und $y^{(r)}$ ausſchließt, da dieſe ebenfalls ſchon beſtimmten Abſciſſen zugehören.

144. Geſetzt alſo, man wählt zur Beſtimmung der Area drey den Abſciſſen $x = \frac{1}{m} f, \frac{1}{n} f, \frac{1}{p} f$ entſprechende Ordinaten, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, ſo daß die Ordinate an der Quadratrix durch $My^{(1)} + Ny^{(2)} + Py^{(3)}$ ausgedrückt wird, ſo iſt

$$y^{(1)} = \alpha + \frac{1}{m}\beta f + \frac{1}{m^2}\gamma f^2 + \text{etc.}$$

$$y^{(2)} = \alpha + \frac{1}{n}\beta f + \frac{1}{n^2}\gamma f^2 + \text{etc.}$$

$$y^{(3)} = \alpha + \frac{1}{p}\beta f + \frac{1}{p^2}\gamma f^2 + \text{etc.}$$

und man erhält, wenn man den Ausdruck $My^{(1)} + Ny^{(2)} + Py^{(3)}$ entwickelt, und in den erſten ſechs Gliedern mit $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 +$ etc. vergleicht,

durch Gleichſetzung der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von f, zur Beſtimmung von M, N, P, m, n, p, folgende ſechs Gleichungen

$$M + N + P = 1$$

$$\frac{M}{m} + \frac{N}{n} + \frac{P}{p} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{M}{m^2} + \frac{N}{n^2} + \frac{P}{p^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{M}{m^3} + \frac{N}{n^3} + \frac{P}{p^3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{M}{m^4} + \frac{N}{n^4} + \frac{P}{p^4} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{M}{m^5} + \frac{N}{n^5} + \frac{P}{p^5} = \frac{1}{6}$$

Eliminirt man hier aus je zwey nächſten Gleichungen P, in den daraus hervorgehenden N, und endlich in den hieraus ſich ergebenden M, ſo wird, wenn man

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = s$, $\frac{1}{mn} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{np} = t$,

und $\frac{1}{mnp} = u$ ſetzt,

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t - u = 0$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{3}t - \frac{1}{2}u = 0$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{5}s + \frac{1}{4}t - \frac{1}{3}u = 0$$

aus welchen drey Gleichungen $s = \frac{3}{2}$, $t = \frac{3}{5}$,

$u = \frac{1}{20}$ gefunden wird.

Nennt man jede der Größen $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ ohne Unterſchied $\frac{1}{z}$, ſo wird (Gleichung, 54.)

$$\frac{1}{z^3} - \frac{3}{2z^2} + \frac{3}{5z} - \frac{1}{20} = 0$$

oder $z^3 - 12z^2 + 30z - 20 = 0$.

Dieſe Gleichung hat, wie man bald durch Zerlegung des letzten Gliedes in Factoren und Subſtitution derſelben in der Gleichung ſtatt z findet, eine rationale Wurzel, welche iſt, $z = 2$. Die beiden andern ſind in dieſer quadratiſchen Gleichung

$$z^2 - 10z + 10 = 0$$

enthalten. Sie giebt noch

$$z = 5 \pm \sqrt{15}.$$

Demnach iſt $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5 \pm \sqrt{15}}$ oder $\frac{5 \mp \sqrt{15}}{10}$.

Läßt man die Werthe $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ der Größe nach auf einander folgen, ſo daß $\frac{1}{m}$ der kleinſte, und $\frac{1}{p}$ der größte derſelben iſt, ſo iſt $\frac{1}{m} = \frac{5 - \sqrt{15}}{10}$, $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{p} = \frac{5 + \sqrt{15}}{10}$.

Man bemerke, daß $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} = 1$ und $\frac{1}{mp} = \frac{1}{10}$ iſt, wie auch die Gleichung $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{10} = 0$, ohne Auflöſung zeigt.

Der Werth von M findet ſich aus der Gleichung

$$M\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)$$

$+\frac{1}{np}$ welche die erſte der vier durch die Elimination von P und N erhaltenen iſt. Es wird daraus $M=\frac{5}{18}$. Eben ſo wird aus dei Gleichung

$$M\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)+N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$$

welche durch Elimination von P aus den beiden erſten der obigen ſechs Gleichungen entſteht, und worin $\frac{1}{n}-\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ iſt, $N=\frac{4}{9}$. Dadurch wird endlich aus der Gleichung $M+N+P=1$, $P=\frac{5}{18}=M$.

Der Ausdruck für die Area wird nun $\frac{5(y^{(1)}+y^{(3)})+8y^{(2)}}{18}f$, wo die Ordinaten $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ den Abſciſſen $x=\frac{5-\sqrt{15}}{10}f$, $x=\frac{1}{2}f$, und $x=\frac{5+\sqrt{15}}{10}f$ entſprechen.

Um die Correction dieſes Ausdrucks zu finden, entwickele man den Coefficienten zu f^6 in $My^{(1)}+Ny^{(2)}+Py^{(3)}$, welcher $\left(\frac{M}{m^6}+\frac{N}{n^6}+\frac{P}{p^6}\right)\eta$ oder $\left(M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)+\frac{N}{n^6}\right)\eta$ iſt. Dies geſchieht

am kürzeſten ſo.

Es iſt $M\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{p^4}\right)=\frac{1}{5}-\frac{N}{n^4}$, und

$M\left(\frac{1}{m^5}+\frac{1}{p^5}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}$, folglich

$$M\left(\frac{1}{m^5}+\frac{1}{p^5}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}$$

das iſt

$$M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)+\frac{1}{mp}M\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{p^4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}$$

alſo

$$M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}-\frac{N}{n^4}\right)=$$
$$\frac{11}{75}-\frac{N}{n^5}+\frac{N}{10n^4}$$

und

$$M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)+\frac{N}{n^6}=\frac{11}{75}-\frac{N}{n^4}\left(\frac{10n-10-n^2}{10n^2}\right)$$
$$=\frac{11}{75}-\frac{1}{240}=\frac{57}{400}.$$

Der geſuchte Coefficient iſt alſo $\frac{57}{400}\eta$, er ſollte aber ſeyn $\frac{1}{7}\eta$, iſt folglich um $\frac{1}{2800}\eta$ zu klein, und der Fehler der Area nächſtens $\frac{1}{2800}\eta f^7$, um welches ſie nach der Formel zu klein gefunden wird. Die Fehler der Coteſiſchen Formeln für die Area aus fünf und aus ſechs Ordinaten ſind nahe $\frac{1}{2688}\eta f^7$ und

$\frac{11}{52500}\eta f^7$, um welche die Area zu groß gefunden wird. Der Fehler unſerer Formel fällt zwiſchen beide.

Nimmt man $\int y\partial x$, anſtatt es von $x = 0$ bis $x = f$ zu nehmen, von $x = a$ bis $x = b$, wo $b = a + f$, ſo gehören $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ zu $x = a + \frac{1}{m} f$, $a + \frac{1}{n} f$, $a + \frac{1}{p} f$, alles andere bleibt wie vorhin, und es iſt der Werth des Integrals

$$\frac{5\,(y^{(1)} + y^{(3)}) + 8\,y^{(2)}}{18} f$$

$$+ \frac{f^6}{2800} \cdot \frac{1}{1.2\ldots6} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

wo $y^{(4)}$ und $y^{(0)}$ die Ordinaten für $x = 0$ und $x = f$ oder für $x = a$ und $x = b$ ſind.

145. Da der Fehler der vorigen Formel additiv iſt, ſo füge ich hier noch eine bey, in welcher derſelbe ſubtractiv iſt. Man ſchalte zwiſchen den beiden Ordinaten $y^{(0)}$ $y^{(4)}$ in den Endpuncten der Baſis f zwey andere $'y$ und y', welche den Abſciſſen $x = a + \frac{1}{10} f\,(5 - \sqrt{5})$ und $x = a + \frac{1}{10} f\,(5 + \sqrt{5})$ entſprechen, ein, ſo iſt die Area über der Baſis

$$f = \frac{y^{(0)} + y^{(4)} + 5\,('y + y')}{12} f$$

$$- \frac{f^6}{2100} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots 6} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

146[a]. Die Idee, die Ordinaten in ungleichen Abſtänden und zwar ſo zu nehmen, daß dadurch bey einer gegebenen Anzahl von Ordinaten der möglich größte

Grad

Grad der Genauigkeit erreicht wird, rührt von Gauß her, wiewohl doch auch ſchon Newton in der Method. Flux. et Serier. infin. da, wo er von den mechaniſchen Quadraturen handelt, eine ähnliche äußert. Gauß hat die Formeln für die Area bis zu dem Falle von ſieben zwiſchen den Endpuncten der Baſis genommenen Ordinaten entwickelt, und alle zu der Berechnung der Area nöthigen numeriſchen Beſtimmungen in großer Schärfe mitgetheilt in der Methodus noua integralium valores per approximationem inueniendi. Göttingae, 1815.

146[b]. Man kann ſich der mechaniſchen Quadraturen auch zu Integrationen bedienen, wenn kein anderes bequemes Mittel ſich findet. Denn die Differentialformel $X\partial x$ ſtellt das Differential einer Fläche vor woran x die Abſciſſe und X, eine Function von x, die Ordinate iſt.

Exempel.

Den Werth der Integrals $\int \partial\varphi \sqrt{\sin\varphi}$ von $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 90°$ oder $\frac{\pi}{2}$ an zu geben. Man theile den Abſtand von 90° in 8 gleiche Intervalle, ſo erhält man in allen neun Ordinaten, welche ſind

$y^{(0)} = 0$	$y^{(1)} = \sqrt{\sin 11°15'} = 0{,}44169$
$y^{(2)} = \sqrt{\sin 22°30'} = 0{,}61861$	$y^{(3)} = \sqrt{\sin 33°45'} = 0{,}74537$
$y^{(4)} = \sqrt{\sin 45°} = 0{,}84090$	$y^{(5)} = \sqrt{\sin 56°15'} = 0{,}91185$
$y^{(6)} = \sqrt{\sin 67°30'} = 0{,}96119$	$y^{(7)} = \sqrt{\sin 78°45'} = 0{,}99035$
$y^{(8)} = \sqrt{\sin 90°} = 1{,}00000$	

Berechnet man aus den fünf Ordinaten in den geraden Stellen $y^{(0)}, y^{(2)}, y^{(4)}, y^{(6)}, y^{(8)}$ nach der Coteſiſchen Formel die Area, ſo wird ſolche = 1,1806; nach der letzten Formel in (138) aber findet ſich dieſelbe = 1,2032. Da die Fehler der beiden gebrauchten Formeln entgegengeſetzt, von einerley Ordnung und nahe gleich groß ſind, ſo kann man das arithmetiſche

Mittel zwiſchen den beiden gefundenen Werthen für die wahre Area nehmen, welche ſolchergeſtalt wird = 1,1969. In den Actis Petropol. für 1780. Th II. S. 58. iſt der Werth des Integrals = 1,1980 gefunden, aus Gränzen, welche weiter aus einander liegen, als die hieſigen, und viel mehr Rechnung erfordern.

147. Wenn in der Formel $\int X\partial x$ die Ordinate X innerhalb der Gränzen, zwiſchen welchen das Integral zu nehmen iſt, unendlich groß wird, ſo kann man nicht das ganze Integral nach der vorigen Methode finden, ſondern muß ſolches theilen.

Z. B. Wenn $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ von x = 0, bis x = 1 verlangt würde, wo $X = \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}$ für x = 1 unendlich wird, ſo ſuche man zuerſt den Werth des Integrals von x = 0 bis x = 1 — ω, wo ω eine ſehr kleine Größe iſt, nach der vorigen Methode. Nun ſetze man x = 1 — z, ſo iſt dem gefundenen Werthe noch der Werth von $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(4z-6z^2+4z^3-z^4)}}$ innerhalb der Gränzen z = 0 und z = ω genommen, zuzuſetzen. Da z eine ſehr kleine Größe iſt, ſo kann man z^3 und z^4 gegen z^2 und z vernachläſſigen, wodurch die vorige Formel

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(4z-6z^2)}} = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\int \frac{\partial z}{\sqrt{(\frac{2}{3}z-z^2)}}$$

wird. Das Integral iſt nach (Integralformel, 55) $\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ Arc. sin. vers. 3z; welches für z = 0 verſchwindet. Daher iſt die Ergänzung des Integrals $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ von x = 0 bis x = 1 — ω, wodurch

es bis $x = 1$ erſtreckt wird,

$= \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ Arc. sin vers. 3ω. Man kann auch durch Umwandlung der gegebenen Differentialformel in eine andere, indem man eine ſchickliche Subſtitution anwendet, helfen. Wenn z. B. $\int \frac{\partial x \sqrt{(1 - e^2x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ wo $e^2 < 1$ iſt, von $x = 0$ bis $x = 1$ gefunden werden ſollte, wo für den letzten Werth

$X = \sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}}$ unendlich wird, ſo ſetze man

$x = \frac{2z}{1 + zz}$, ſo wird $\partial x = \frac{2\partial z\,(1 - zz)}{(1 + zz)^2}$ und

$$\frac{\partial x \sqrt{(1 - e^2x^2)}}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{2\partial z \sqrt{((1 + zz)^2 - 4e^2z^2)}}{(1 + zz)^2}$$

wo alsdann das Integral von $z = 0$ bis $z = 1$ zu nehmen iſt.

148. Lambert hat in ſeinen Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik Th. II. S. 250 — 313 eine Abhandlung über Quadratur und Rectification der krummen Linien geliefert, worin gleichfalls annähernde Formeln für die Area einer Curve aus gleichweit von einander abſtehenden Ordinaten vorkommen. Da Lambert aber nicht alle über den Endpuncten und Theilungspuncten der Baſis ſtehende Ordinaten in Betracht gezogen hat, ſondern nur einige derſelben, ſo ſtehen bey gleicher Anzahl der Theile in der Baſis ſeine Formeln den Coteſiſchen an Genauigkeit nach.

149. In Legendre's Exercices de Calcul intégral Par. 1811. handelt der dritte Theil von den Quadraturen. Legendre leitet zuerſt die oben in (137) gegebene zweyte Formel von Maclaurin auf eine nette Art ab, und fügt dann mancherley Bemerkungen über

ihre Anwendbarkeit in den Fällen, wo einer der Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y^3}{\partial x^3}$ an den Gränzen des Integrals $\int y \partial x$ oder innerhalb derſelben unendlich wird, bey. Er wendet alsdann eine ähnliche Methode an, um die Coordinaten einer Curve zu finden, für welche der Bogen s durch eine Function von $\frac{\partial y}{\partial x}$ d. i. der Tangente des Winkels, welchen die berührende in dem Endpuncte des Bogens mit der Abſciſſenlinie macht, gegeben iſt, und macht eine Anwendung davon auf das baliſtiſche Problem zur Berechnung der Schußweite. Noch zeigt Legendre eine ſehr feine von Laplace herrührende Methode den Werth von $\int y \partial x$ zu finden, wenn y an den beiden Gränzen des Integrals verſchwindet, innerhalb derſelben beſtändig entweder poſitiv oder negativ, und nur eines einzigen größten Werths fähig iſt, und handelt endlich von verſchiedenen merkwürdigen beſtimmten Integralen, welche zur Theorie der transſcendenten Größen gehören.

150. Da es Schwierigkeiten haben kann, in der Maclauriniſchen Formel in (134) die Werthe der Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial x^3}$ u. ſ. w. für den Anfang und das Ende des Integrals $\int y \partial x$ zu beſtimmen, ſo iſt eine Formel vorzuziehen, in welcher ſtatt der Differentiale die Differenzen der in Rechnung gezogenen Ordinaten vorkommen. Dieſe theile ich hier noch aus Laplaces Mécanique céleste Livre IX. art. 5. mit. Es iſt nämlich

$$\frac{1}{\omega}\int y \partial x = \frac{1}{2} y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots + y^{(n-1)} + \frac{1}{2} y^{(n)}$$

$$- \frac{1}{12}(\Delta.\ y^{(n-1)} - \Delta.\ y^{(0)})$$

$$- \frac{1}{24}(\Delta^2.\ y^{(n-2)} + \Delta^2.\ y^{(0)})$$

$$- \frac{19}{720}(\Delta^3.\ y^{(n-3)} - \Delta^3.\ y^{(0)})$$

$$- \frac{3}{160}(\Delta^4.\ y^{(n-4)} + \Delta^4.\ y^{(0)})$$

$$- \frac{863}{60480}(\Delta^5.\ y^{(n-5)} - \Delta^5.\ y^{(0)})$$

— etc.

wo ω der Abſtand je zweyer nächſten Ordinaten iſt. Die Formel rührt eigentlich von Lagrange her, welcher ſie zuerſt in der Abhandlung: Sur une nouvelle espéce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, in den Mém. de Berlin für das Jahr 1772 bekannt gemacht hat. Laplace hat ihr eine für die Berechnung bequemere Form gegeben.

Partiell quadrirbare Curven.

151. Eine Aufgabe über die Quadratur krummer Linien, welche mit den Unterſuchungen in der unbeſtimmten Analytik verwandt iſt, entſteht, wenn die Formen quadrirbarer krummer Linien geſucht werden. Da die Fläche einer Curve iſt $Z = \int y \partial x$, alſo $\partial Z = y \partial x$ und $y = \frac{\partial Z}{\partial x}$, ſo nehme man für Z irgend eine algebraiſche Function von x, differentiire dieſelbe, und mache den Differentialquotienten $\frac{\partial Z}{\partial x}$ zur Ordinate, ſo iſt die Curve quadrirbar.

152. Die Frage kann auch dahin erweitert werden, daß die Curven zu finden ſeyn, an welchen einzelne Portionen ihrer Fläche algebraiſch angegeben werden können, obgleich die unbeſtimmte Quadratur transſcendent iſt. Johann Bernoulli und Hermann haben eine Aufloͤſung dieſer Aufgabe gefunden, die in des erſteren Werken, T. II. Nr. III befindlich iſt. Man nehme eine krumme Linie, die nicht quadrirbar iſt. Ihre Gleichung ſey $y = \varphi x$, wo φ das Functionszeichen iſt. Die Curve gehe durch den Anfang der Coordinaten. Durch denſelben Anfangspunct werde eine gerade oder krumme Linie gezogen, deren Gleichung ſey $t = \psi x$. Dieſe beiden Curven wollen wir durch die Bezeichnungen, A, B, unterſcheiden. Auf der Axe der y für die Curve A trage man die Ordinate t als Abſciſſe, und ziehe aus ihrem Endpuncte an die Curve A mit der Axe der x eine parallele u, ſo iſt $\varphi u = t$. Die beiden Flächenräume an der Curve A ſind $\int y \partial x$ und $\int u \partial t$. Da $t = \psi x$ iſt, ſo iſt $\partial t = \psi' x . \partial x$, wo $\psi' x$ den Differentialfactor bezeichnet. Beide Flächenräume zuſammen ſind $= \int y \partial x + \int u \psi' x . \partial x$. Man conſtruire eine dritte Curve C, deren Ordinate zu der Abſciſſe x ſey $z = y + u\psi' x$, ſo iſt ihr Flächenraum $Z = \int z \partial x = \int y \partial x + \int u \psi' x . \partial x$, ſo groß als die beiden Flächenräume an der Curve A. Für die Abſciſſen x, die zu den Durchſchnittspuncten der Curven A und B gehören, iſt die Summe der beiden Flächenräume $= xy$, eine algebraiſche Größe, wenn y eine algebraiſche Function von x iſt. Die Curve C, deren Ordinaten ſind $z = y + u\psi' x$, oder $z = \varphi x + u \psi' x$, iſt alſo für diejenigen Abſciſſen, die zu den Durchſchnittspuncten der Curven A und B gehören, quadrirbar. An dieſen Puncten iſt $\varphi x = \psi x$. Denn da $\varphi u = t$, und $t = \psi x$ iſt, ſo iſt $\varphi u = \psi x$. Für die Durchſchnittspuncte iſt $u = x$, alſo daſelbſt $\varphi x = \psi x$. Dieſe Gleichung beſtimmt die Werthe der Abſciſſen x zu den Durchſchnittspuncten.

Z. B. Man nehme ſtatt der Curve B eine gerade Linie, welche mit der Axe der x einen halben rechten Winkel mache, ſo iſt $t = x$; $\partial t = \partial x$ oder $\psi' x = 1$, und $z = \varphi x + u$, auch $\varphi u = x$. An den Durchſchnittspuncten der Curve A mit der geraden iſt $\varphi x = x$.

Die Curve B ſey eine Parabel, ſo iſt $t = \sqrt{ax}$, und $\partial t = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \partial x$, alſo $\psi' x = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$, und die Gleichung für die partiell quadrirbare Curve iſt $z = \varphi x + \frac{au}{2\sqrt{ax}}$. Für die Größe u iſt die Gleichung $\varphi u = \sqrt{ax}$. An den Durchſchnittspuncten der Parabel mit der Curve A iſt $\varphi x = \sqrt{ax}$.

Dieſer Vortrag iſt zur Erläuterung des Aufſatzes von Bernoulli dienlich, welcher derſelben noch bedarf, beſonders weil die Figuren nicht gehörig gezeichnet ſind. Die Bezeichnungsart iſt hier aus der neuen Analyſis genommen.

153. Lacroix giebt in ſeinem Werke über die Differential- und Integralrechnung, Th. II. §. 535. eine bloß analytiſche Auflöſung der Aufgabe von den partiell quadrirbaren Curven. Der Flächenraum einer ſolchen ſey $Z = \int P\partial x + \int Q\partial x$, wo das $\int P\partial x$ algebraiſch ſey, das andere, $\int Q\partial x$ aber transſcendent. Dieſes letztere ſey $= \int u\partial x - \int v\partial z$, wo u und v ähnliche Functionen, jene von x, dieſe von z ſind, das heißt, aus x und z nebſt den Conſtanten auf gleiche Art zuſammen geſetzt werden. Die veränderliche z ſey eine ſolche Function von x, daß ſie $= x$ werde, wenn x die Werthe a, b, c, u. ſ. f., hat. Dadurch wird für dieſe Werthe $v = u$, und $\int u\partial x - \int v\partial z = 0$, alſo $\int Q\partial x = 0$, und $\int y\partial x = \int P\partial x$, eine algebraiſche Größe. Um der Function v dieſe Beſchaffen-

heit zu geben, ſetze man $z = x + (x-a)(x-b)(x-c)$ etc., oder allgemeiner $z = x + T(x-a)(x-b)(x-c)$ etc, wo T eine Function von x iſt, die keine einfache Factoren enthält, als welche alle in dem beygefügten Producte enthalten ſeyn ſollen; auch muß T nicht etwa unendlich groß werden, wenn das Product verſchwindet. Zugleich muß T ſo beſtimmt werden, daß $\int v\partial z$ mit $\int u\partial x$ zugleich anfange, damit keine transſcendente Conſtante ſich in dem Integral finde.

154. Exempel. Es ſey $u = \sqrt{(2rx - xx)}$; $v = \sqrt{(2rz - zz)}$; $z = x + T(x - a)$, ſo iſt

$$\int y\partial x = \int P\partial x + \int \partial x \sqrt{(2rx - xx)} - \int \partial z \sqrt{(2rz - zz)}.$$

Die beiden transſcendenten Integrale hangen vom Kreiſe ab, und ſind $= 0$, wenn $x = 0$, und $z = 0$ ſind. Darum muß $z = 0$ ſeyn, wenn $x = 0$ iſt, alſo muß T den Factor x enthalten. Man ſetze

$$T = \frac{x}{a}, \text{ ſo wird } z = \frac{xx}{a};\ \partial z = \frac{2x\partial x}{a};$$

$$2rz - zz = \frac{(2ar - xx)x^2}{aa}, \text{ und daher}$$

$$y = P + \sqrt{(2rx - xx)} - \frac{2xx}{aa}\sqrt{(2ar - xx)}.$$

An jeder Curve, welche dieſe Gleichung, bey irgend einer Function P von x hat, iſt die Area von $x = 0$ bis $x = a$ algebraiſch quadrirbar. Die beiden transſcendenten Integrale ſind

$$\frac{1}{2} r^2 \text{Ang.sin} \frac{\sqrt{(2rx - xx)}}{r} - \frac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - xx)},$$

und

$$\frac{1}{2} r^2 \text{Ang.sin} \frac{\sqrt{(2rz - zz)}}{r} - \frac{1}{2}(r - z)\sqrt{(2rz - zz)}.$$

aus Integralformel (58. 56.). In dem letztern ſetze man für z ſeinen Werth $\frac{xx}{a}$, ſo wird es

$$\frac{1}{2} r^2 \text{Ang.sin} \frac{x}{ar} \sqrt{(2ar - xx)}$$
$$- \frac{(ar - xx)x}{2aa} \sqrt{(2ar - xx)},$$

welches für $x = a$ dem erſteren gleich wird.

Das $\int \frac{2xx}{aa} \partial x \sqrt{(2ar - xx)}$ iſt (aus Integralformel, 69. 58. 49.) =

$$- \frac{x}{2aa}(ar - x^2)\sqrt{(2ar - xx)} + r^2 \text{Ang.sin} \frac{x}{\sqrt{2ar}}$$

Der Winkel in dieſer Form iſt die Hälfte des Winkels in jener oder des Ang.sin $\frac{x}{ar}\sqrt{(2ar - xx)}$.

Denn man ſetze Ang. sin $\frac{x}{\sqrt{2ar}} = \varphi$, ſo iſt

$$\cos \varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{xx}{2ar}\right)} = \sqrt{\frac{2ar - xx}{2ar}},$$

und

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi . \cos \varphi = \frac{x}{ar}\sqrt{(2ar - xx)}.$$

Beide Integralformeln ſtimmen alſo überein.

155. Von **Eulers** Unterſuchungen betreffend die Curve, welche innerhalb eines Quadranten der Grundfläche einer Halbkugel zu beſchreiben iſt, damit das Stück der Kugelfläche, deſſen orthographiſche Projection die Curve iſt, quadrirbar ſey, iſt in dem Artikel, Florentiniſche Aufgabe, 20, Nachricht gegeben. Auf einem geraden Kegel iſt es leicht, quadrirbare

Stücke der Oberfläche an zu geben. Man darf nur innerhalb der Grundfläche und in der Ebene derſelben irgend eine krumme Linie, die ſich quadriren läßt, verzeichnen, ſo ſchneiden die geraden Cylinder, deren Grundflächen jene Curven ſind, (das Wort Cylinder hier in weiterer Bedeutung, wie krumme Flächen, 20, genommen) auf der krummen Seitenfläche des Kegels quadrirbare Stücke ab. Der Grund iſt, weil irgend ein Stück der krummen Seitenfläche eines geraden Kegels ſich zu ſeiner Projection auf die Grundfläche verhält, wie die Seitenlinie des Kegels zum Halbmeſſer der Grundfläche deſſelben wie ſich leicht durch die Elementargeometrie zeigen läßt. Dieſe Eigenſchaft kommt außer der Fläche des geraden Kegels noch allen den krummen Flächen zu, für welche bey rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Ausdruck $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ einer conſtanten Größe gleich iſt. Es iſt nämlich $\partial x \partial y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$ das Element irgend einer krummen Fläche, und $\partial x \partial y$ die Area der Projection deſſelben auf die Ebene der x, y. Daher jenes zu dieſem in einem beſtändigen Verhältniſſe, wenn $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \text{Const.}$ iſt.

Quadratwurzel, ſ. Quadrat.

Quadrilaterum, eine vierſeitige geradlinige Figur.

Quadrillion, eine Zahl, beſtehend aus einer Million Trillionen, oder 10^{24}.

Quadrinomium, eine viertheilige Größe, wie $a + b + c + d$, oder $a + bx + cx^2 + dx^3$.

Quadriren, ſ. Quadratur.

Quadriſectio, Theilung einer Größe, eines Winkels in vier Theile.

Quantitas, ſ. Größe.

Queraxe, latus transverſum, iſt die Haupt⸗axe in der Ellipſe und Hyperbel.

Querſinus, ſ. Sinus verſus.

Quindecagonum, eine geradlinige Figur von funfzehn Seiten, insbeſondere eine ordentliche.

Quinquangulum, eine geradlinige Figur mit fünf Winkeln, das iſt, eine fünfſeitige.

Quinquillion, eine Zahl, beſtehend aus einer Million von Quadrillionen, d. i. 10^{30}.

Quotient, iſt diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmahl eine Zahl in einer anderen enthalten iſt. Ein Quotient verhält ſich zu der Einheit, wie der Dividendus zu dem Diviſor; ſ. Diviſion und Bruch. — In allgemeinen Ausdrücken eines Quotienten oder Bruches wird manchmahl bey gewiſſen Werthen der darin enthaltenen veränderlichen Größen Dividendus und Diviſor, oder Zähler und Nenner zugleich Null. Wie der Werth des Quotienten in dieſem Falle gefunden werde, zeigt der Artikel, Function, 50.

R.

Rad, ariſtoteliſches, iſt die Benennung einer Aufgabe oder Schwierigkeit, die wälzende Bewegung eines Kreiſes auf einer geraden Linie betreffend, ſo genannt, weil Ariſtoteles zuerſt ſie vorgetragen hat. Es iſt die, welche in dem Artikel, Cykloide, Th. I.

S. 600., angeführt iſt. Daſelbſt iſt bemerkt, daß das Wälzen eines Kreiſes (oder auch jeder andern krummen Linie,) auf einer geraden Linie noch nicht die Gleichheit zwiſchen dem Stücke jener und dem Kreis-Bogen, deſſen Endpuncte bey dem Wälzen in die Endpuncte dieſes Stücks fallen, zur Folge hat. Hier folgt die Erörterung des Falles, da zwey concentriſche Kreiſe gleiche Winkelbewegung haben, indem ihr Mittelpunct auf einer geraden Linie ſich bewegt.

Es iſt (Fig. 19.) C der gemeinſchaftliche Mittelpunct zweyer Kreiſe, an welchen in A und B die berührenden AD und BE ſich parallel ſind, indem A und B mit C in gerader Linie liegen. Der Mittelpunct C bewege ſich nach CF parallel mit AD, und mit demſelben alſo die Ebene beider Kreiſe, indem zugleich dieſe Ebene ſich um C dreht, von M nach A, ſo wie von N nach B. Ein Punct M des von CA beſchriebenen Kreiſes hat nun zwey Bewegungen, eine parallel mit CF nach Mm, die andere parallel mit CA nach Mp. Durch beide gelange er nach P auf AD, wo der Kreis, nachdem er ſich um den Winkel ACM gedreht hat, die AD berührt. Der Mittelpunct des Kreiſes iſt nun in G, in der auf AD durch P ſenkrechten PG, ſo daß CG = AP iſt. Die Länge AP hat zu dem Bogen AM kein beſtimmtes Verhältniß, da es von der Geſchwindigkeit des Punctes C auf CF und der Geſchwindigkeit auf dem Kreiſe abhängt, deren Verhältniß willkührlich iſt. Auf dem mit CB beſchriebenen Kreiſe liege der Punct N mit C und M in gerader Linie. Wenn M nach P gekommen iſt, alſo CM auf GP liegt, ſo fällt N auch auf dieſe GP in Q, auf BE, wo GQ = CN oder CB iſt. Man ziehe durch N mit CG die parallele Nn, und mit CB die parallele Nq, ſo hat N zwey Bewegungen Nn und Nq. Die Bewegung Nq verhält ſich zu der Mp wie CB : CA; aber die Bewegung Nn iſt gegen die Nq größer als die Mm gegen Mp iſt. Iſt nun AP = Bogen AM,

ſo iſt BQ größer als Bogen BN. Nähme man CB größer als CA, ſo würde BQ kleiner als BN ſeyn.

Was Ariſtoteles ſelbſt zur Erklärung der Schwierigkeit beybringt, läuft auf leere Spitzfündigkeiten hinaus und iſt keine wahre Auflöſung derſelben.

Galilei verglich die wälzende Bewegung zweyer concentriſchen Kreiſe mit der ähnlichen zweyer concentriſchen ähnlichen, ordentlichen Vielecke. Wenn das größere Vieleck auf einer geraden Linie herumgewälzt wird, ſo daß die Seiten deſſelben, bey der Drehung um einen Winkelpunct nach dem andern, eine ſtetige gerade Linie ausmachen, ſo legen ſich die Seiten des kleineren Vielecks auf eine eben ſo lange Linie, laſſen aber Zwiſchenräume zwiſchen einander. Dieſe Erklärung möchte die Schwierigkeit eher vergrößern als heben. Denn der kleinere Kreis läßt auf der Linie, auf welcher er ſich wälzt, keine Zwiſchenräume. Käſtner ſcheint ſie zu billigen. Analyſis endl. Größen, §. 601.

Tacquet hat eine große Abhandlung de circulorum volutionibus geſchrieben. In der Vorrede erzählt er, daß die Unterſuchung ihm ſehr viele Mühe gemacht habe. Die Erklärungen des Ariſtoteles und Galilei verwirft er ganz. Er ſelbſt will beweiſen, daß, wenn die Geſchwindigkeit des Mittelpunctes ſo groß iſt, als die Geſchwindigkeit der Drehung, der Weg, den der Kreis auf der berührenden geraden bey einer Umdrehung zurücklegt, dem Umfange deſſelben gleich ſey. Die Folgerung iſt aber gar nicht einleuchtend. Eine drehende und ſchleifende Bewegung mit einander verbunden will er nicht zugeben.

Mairan hat der Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris im Jahre 1715 eine Erklärung der Frage über die Wälzung concentriſcher Kreiſe zur Prüfung übergeben, welche von derſelben völlig gebilligt ward. Ein Auszug iſt in der Histoire pour 1715 befindlich. Er bemerkt, daß die Bewegung eines Punctes

auf dem Umfange aus zweyen, einer kreisförmigen und einer geraden, zuſammengeſetzt iſt. Das Verhältniß beider Bewegungen kann dasjenige der Gleichheit oder irgend einer Ungleichheit ſeyn. In dem letztern Falle wird der Kreis, den er ſich als ein Vieleck von unendlich vielen kleinen Seiten vorſtellt, über der Grundlinie fortgeſchleift, vorwärts oder rückwärts. Die von mir gegebene Erklärung wird deutlicher ſeyn. Die Kreisbewegung iſt in der That noch eine zuſammengeſetzte.

Die Wegemeſſer beruhen auf der Vorausſetzung, daß die Länge, auf welcher ein Rad bey jedem Umlaufe hinrollt, dem Umfange deſſelben gleich ſey. Die Reibung an den Achſen könnte den Weg etwas länger machen, wenn das Rad dadurch etwas geſchleift würde.

Radialis curva iſt die Benennung, welche einige Schriftſteller ſolchen krummen Linien geben, deren Conſtruction unmittelbar auf der Relation zwiſchen den aus einem beſtimmten Puncte an ſie gezogenen geraden und den zugehörigen Winkeln, von einer gegebenen Linie an gerechnet, beruhet, wie die verſchiedenen Spiralen, die Quadratrix des Dinoſtratus, die Epicykloiden. Die aus dem angenommenen Puncte an die Curve gezogenen geraden ſind wie die Radii eines Kreiſes, der ſelbſt eine curva radialis heißen mag. Übrigens kann man jede Curve als eine radialis betrachten, weil man die Gleichung, welche zwiſchen geraden Coordinaten für ſie gegeben wird, auf eine zwiſchen Winkeln und geraden aus einem gegebenen Puncte bringen kann. Die Benennung iſt übrigens wenig üblich.

Radicalzeichen oder Wurzelzeichen ſiehe Potenz.

Radiometer, ein in ältern Zeiten gebräuchliches Werkzeug der Seefahrer, Höhen der Geſtirne zu

meſſen, der ſo genannte Jakobsſtab. S. die zweyte Abtheilung dieſes Werks.

Radius iſt in der gemeinen Geometrie der Halbmeſſer eines Kreiſes oder einer Kugel, den man mit einem der Strahlen verglichen hat, welche ein leuchtender Körper ausſendet. In der höhern Geometrie iſt Radius jede der Linien, die von einem gegebenen Puncte an eine Curve gezogen werden. In der Aſtronomie wird eine ſolche Linie durch die Benennung, radius vector, ausgezeichnet. — Radius curvedinis iſt der Halbmeſſer der Krümmung, ſ. Krümmungskreis.

Radix, ſ. Wurzel.

Radlinie, ſ. Cykloide.

Ratio, ſ. Verhältniß.

Rational iſt eine Zahl, welche ſich durch die Einheit und Theile derſelben vollſtändig ausdrucken oder darſtellen läßt. Das Verhältniß zweyer Größen iſt rational, wenn ſie ſich verhalten, wie zwey rationale Zahlen, das iſt, wenn ſie commenſurabel ſind. Das Gegentheil von rational iſt irrational, ſ. Irrational. Euklides betrachtet die Linien, deren Quadrate commenſurabel ſind, ob ſie gleich ſelbſt es nicht ſind, noch als rational.

Raum iſt die unbegränzte, blos im Verſtande gedachte, nach allen Richtungen hin ſich erſtreckende Ausdehnung, worin der Geometer nach Belieben, uneingeſchränkt ſeine Linien ziehen, und ſeine Flächen ausbreiten kann. Zieht man in dieſem Raume durch einen angenommenen Punct drey auf einander ſenkrechte gerade Linien, ſo wird der ganze unendliche Raum in acht Theile getheilt, in deren einem jeder Punct durch die zugehörigen drey Coordinaten ſeine Stelle angewieſen bekömmt. Der Raum in der phyſiſchen Welt iſt eben dieſes, nur daß der Punct, durch welchen wir die

Axen der Coordinaten für die darin befindlichen Körper ziehen, nicht ein unveränderlicher iſt Leibnitz nannte dieſen phyſiſchen Raum ſehr paſſend die Ordnung der neben einander befindlichen Dinge.

Raute (Rhombus, fr. Losange) iſt ein Parallelogramm von vier gleichen Seiten mit ungleichen Winkeln.

Real iſt eine Größe, deren Zuſammenſetzung aus anderen Größen keinen Widerſpruch gegen die Bedingungen der Möglichkeit enthält. Es iſt das Synonym von Möglich. Die Realität einer Größe in der reinen Mathematik betrifft blos die Gedenkbarkeit. Doch kann eine reale Größe auch wirklich in Zahlen oder geometriſch wirklich dargeſtellt werden, wenigſtens nahe genug, wenn ſie mit einer Irrationalität behaftet ſeyn ſollte.

Recheninſtrumente und Rechenmaſchinen, ſ. Inſtrumentale Arithmetik.

Rechenknecht iſt die Aufſtellung der Vielfachen einer Zahl bis zu dem Neunfachen, um ſich derſelben bey dem Multipliciren und Dividiren zu bedienen, beſonders wenn eine Zahl oft als Multiplicandus und Diviſor gebraucht wird. Nepers Rechenſtäbe liefern die Vielfachen einer Zahl bis zu dem Neunfachen ganz leicht,

Rechenkunſt im engern Verſtande iſt die Anleitung zu der Kunſt, ſicher und bequem mit Zahlen zu rechnen, oder aus gegebenen Zahlen die geſuchten, ihrer Verbindung mit jenen gemäß, herzuleiten. Dieſe iſt diejenige, welche beſonders in den kaufmänniſchen Rechenbüchern gelehrt wird. Man mag ſie durch die Benennungen, praktiſche, techniſche oder bürgerliche Rechenkunſt von der rein theoretiſchen Arithmetik unterſcheiden, ſ. Arithmetik. Die Grundlage zu derſelben ſind die Regeln für die vier gemeinen Species in

in ganzen und gebrochenen Zahlen; die Lehre von den Proportionen, den einfachen und den zuſammengeſetzten, die Kettenregel, und auch die Lehre von der arithmetiſchen und geometriſchen Progreſſion. Dieſes alles wird in der erſten Abtheilung dieſes Werks vorgetragen. Die Beſchaffenheit der Gegenſtände, worauf die Rechnung anzuwenden iſt, muß die beſondere Anleitung zur praktiſchen Arithmetik erklären, damit die Rechnung darauf gehörig, und mit Vortheil angewandt werden könne, z. B. die Waaren- Wechſel- und Münzrechnung, das Buchhalten, die Leibrentenrechnung, u. a. m. Davon wird das nöthige in einer folgenden Abtheilung unſers Werks beygebracht werden.

Rechnung auf Linien und mit der Feder, ſ. Inſtrumentale Arithmetik.

Seit einiger Zeit ſind die Übungen im Kopfrechnen ſehr empfohlen. Sie dienen allerdings zur Erweckung der Aufmerkſamkeit und zur Erfindung von allerhand Vortheilen aus der Beſchaffenheit der vorgegebenen Zahlen. Anweiſung dazu geben folgende Schriften.

Biermanns Anleitung zum Rechnen im Kopfe. Zweyte Auflage. Hannover, 1795.

Köhlers Anweiſung zum Kopfrechnen. Vierte Auflage. Leipzig, 1816.

Heuß Anweiſung, das Rechnen im Kopfe zu lehren. Stuttgart. 1804.

Rechnungsprobe iſt eine Rechnung, wodurch man ſich zu verſichern ſucht, daß das Reſultat einer vollführten Rechnung in Zahlen richtig ſey.

Die beſte Probe iſt, wenn zwey Rechner ſie unternehmen, und ihre Reſultate übereinſtimmig finden. Wenn ein Rechner dieſes nicht haben kann, mag er ſelbſt die ganze Rechnung nach einer Zwiſchenzeit wieder vornehmen, und zwar auf eine abgeänderte Art.

z. B. bey dem Addiren beſonders vieler Poſten, wird er einmahl ſie von oben herunter, das anderemahl von unten nach oben ſummiren. Oder er mag ſie in zwey oder mehrere Abtheilungen ſondern, von jeder die Summe ziehen, und die Summen von dieſen Summen nehmen.

Die Multiplication mag er durch die Diviſion, die Diviſion durch die Multiplication prüfen. Hier können auch die Logarithmen nützliche Dienſte leiſten. Das Facit von einer Regel de Tri nehme man als ein gegebenes Glied der Proportion, und eines der gegebenen Glieder zum geſuchten.

Insbeſondere aber wird man unter einer Rechnungsprobe ein Verfahren verſtehen, welches kürzer iſt als die gemachte Rechnung, die man prüfen will. Von dieſer Art iſt die Neuner- und Eilferprobe, welche ſich auf die Beſchaffenheit unſers Zahlenſyſtems gründen.

Die Neunerprobe beruht darauf, daß die Summe der Ziffern in einer Zahl durch 9 dividirt denſelben Reſt läßt, welchen die Zahl ſelbſt durch 9 dividirt übrig läßt. ſ. Neun. Dieſen Reſt nennt man die Probezahl.

Eine Summe zu prüfen, zähle man die Ziffern aller Theile zuſammen, wobey man jede volle Neun wegwirft, und merke ſich den Reſt. Die Ziffern in der Summe addire man ebenfalls, werfe die Nenner weg, ſo muß der Reſt mit jenem vorher gefundenen übereinſtimmen, wenn die Rechnung richtig geführt iſt. Das folgende Exempel wird den Grund zeigen.

	Reſte.
835674	6
746135	8
28463	5
7294	4
4358	2
1621924	7

Die Summen der Ziffern in den einzelnen Theilen laſſen zum Reſte die beygezeichneten Zahlen. Dieſes ſind zugleich die Reſte von der Diviſion jedes Theils durch 9. Die Summe dieſer Reſte iſt 25 oder 2 . 9 + 7. Die gefundene Summe der Theile muß alſo bey der Diviſion durch 9 den Reſt 7 laſſen; eben dieſen Reſt muß aber auch die Summe der Ziffern in der gefundenen Summe geben, wie es auch geſchieht.

Anſtatt den Reſt bey jedem Theile einzeln hinzuſetzen, kann man kürzer die Ziffern in den Theilen nach der Reihe ſummiren, und jede volle 9 wegwerfen.

Die Probe der Multiplication geſchieht durch die Neun folgendermaßen. Man ſuche die Reſte von der Diviſion der Summe der Ziffern in beiden Factoren durch 9, kurz die Probezahlen aus beiden, multiplicire ſie in einander, werfe die etwa darin enthaltenen 9 weg: der Reſt muß der Probezahl aus dem Producte gleich ſeyn.

Zum Beyſpiel.

		Reſte	Product.
	835674	6	42
	27385	7	
Product	22884932490	6	6

Der Beweis iſt in dem Artikel, Neun, 5. gegeben.

Die Probe der Diviſion durch Neun geſchieht auf eine ähnliche Art. Die Probezahlen des Diviſors und Quotienten werden in einander multiplicirt, dazu wird die Probezahl aus dem Reſte addirt, von der Summe werden die vollen Neuner weggeworfen, der Reſt muß der Probezahl aus dem Dividendus gleich ſeyn.

Zum Beyſpiel.

Dividendus	22884923947
Diviſor	27385
Quotient	835673
Reſt	18842

Die Probezahl aus dem Diviſor iſt 7, aus dem Quotienten 5, aus dem Reſte 5. Die letztere addire man zu dem Producte jener, ſo iſt die Summe = 40. Die Probezahl daraus, 4, iſt mit der aus dem Dividendus dieſelbe.

Es folgt freylich noch nicht, wenn die Probe zutrifft, daß die Rechnung richtig ſey. Denn das Facit könnte zwey falſche Ziffern enthalten, deren Summe richtig wäre, ſo daß, was die eine zu groß, die andere zu klein iſt. Oder es könnten bey der Rechnung und in der Probe zwey entgegengeſetzte gleiche Fehler begangen ſeyn. Dieſe Fälle ſind aber nicht wahrſcheinlich, am wenigſten bey einem irgends geübten Rechner.

Die Zahl Eilf giebt eine ähnliche Probe an die Hand, nur daß dieſe nicht ſo leicht als die Nennerprobe iſt. Der Reſt von der Diviſion durch 11, oder die Probezahl iſt der Überſchuß der Summe der Ziffern, in den ungeraden Stellen von der rechten Hand her über die Summe der Ziffern in den geraden Stellen. Iſt die letztere größer als jene, ſo werden 11 oder ein Vielfaches von 11 zu jener addirt. S. den Artik. Neun, 7. ff.

In dem Additions-Exempel oben ſind die Reſte von der Diviſion durch 11 oder die Probezahlen, 4, 5, 6, 1, 2, deren Summe 18 = 11 + 7, und daraus die Probezahl 7. In der Summe der Zahlen iſt die Probezahl 16 — 9 = 7. Man wird die Ziffern in den ungeraden Stellen beſonders, und die in den geraden ebenfalls beſonders zu ſummiren, die vollen 11 wegzuwerfen, und die letztere Summe von jener abzuziehen haben.

In dem Multiplications-Exempel ſind die Probezahlen aus den Factoren 4 und 6, ihr Product 24 giebt die Probezahl 2. Die Probezahl aus dem Producte iſt ebenfalls 2.

In dem Diviſions-Exempel iſt die Probezahl aus dem Diviſor 6, aus dem Quotienten 3, aus dem Reſte 10. Dieſes giebt zur Probezahl 6 . 3 + 10 = 28 oder 6. Dieſes iſt auch die Probezahl aus dem Dividendus.

Die Neunerprobe der Addition und Subtraction lehrt Wallis in der Mathesi universali, cap. 16. mit der Bemerkung, daß er nicht wiſſe, ob jemand den Beweis davon gegeben habe. Dieſen fügt er hinzu. Dieſelbe Probe für die Multiplication und Diviſion lehrt er daſelbſt, cap. 21. Käſtner ſagt in der Geſchichte der Mathematik, I. S. 619, daß ihm von einer Probe der Multiplication durch 9 nichts gegenwärtig ſey, und daß er ſich vergebens darnach umgeſehen habe.

Clausberg in ſeiner Rechenkunſt, Th. II. S. 677. bezeigt kein Vertrauen zu der Neunerprobe, ſondern lehrt ſtatt derſelben die Elferprobe. Allein dieſe iſt erſtlich weniger bequem und kann triegen, wo jene den Irrthum angiebt.

Wenn nur eine Ziffer unrichtig iſt, oder zwey Ziffern in Abſicht auf ihren abſoluten Werth ungleich fehlen, ſo zeigen beide Proben es an. Sind zwey Fehler gleich und entgegengeſetzt, ſo verſchweigt ihn die Neunerprobe und in gleichnamigen Stellen auch die Eilferprobe. Sind zwey Fehler gleich und gleichnamig, ſo zeigt ihn die Neunerprobe an, die Eilferprobe verſchweigt ihn aber, wenn er in ungleichnamigen Stellen begangen iſt. Z. B. das richtige Facit ſey

F 437865927,
das unrichtige A 435865947,
oder B 435865907,

ſo giebt die Neunerprobe für A wie für F die Probe-

bezahl 5, die Eilferprobe aber 4 und 0. Hingegen giebt die Eilferprobe für B wie für F die Probezahl 4. Da die Neunerprobe aber für B giebt 2.

Die Fehlſamkeit beider Proben iſt gleich, wie man an dieſem Exempel ſehen mag. Es ſind darin 9 Ziffern, aus welchen ſich $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$ oder 36 verſchiedene Stellen für zwey fehlerhafte Ziffern nehmen laſſen. So viel Binionen ſind nämlich in einer Anzahl von 9 verſchiedenen Dingen enthalten (Combination, 12.). Unter dieſen 36 Stellen ſind 5.4 oder 20, worin die Stellenzahlen der beiden Ziffern ungleichnamig ſind. Nämlich es giebt 5 ungerade Stellen für die eine der Ziffer und bey jeder 4 gerade für die andere Ziffer. Ferner giebt es $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ oder 10 Fälle, wo die Ziffern beide in den ungeraden, und $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ Fälle, wo ſie beide in den geraden ſind. Sind die Fehler gleich und entgegengeſetzt, ſo giebt es 20 Fälle unter 36, wo die Eilferprobe den Fehler angiebt, da die Neunerprobe ſie verſchweigt. Sind die Fehler gleichnamig ſo zeigt die Neunerprobe ſie an, die Eilferprobe verſchweigt ſie aber in 20 Fällen unter 36.

Es können auch drey Ziffern fehlerhaft ſeyn, ſo daß alle drey zwey fehlerhaften gleichgültig ſind, wie im folgenden Exempel.

Richtiges	F.	437861923
unrichtiges	A.	435862123

wo beide Proben triegen.

Bey der Addition benannter Zahlen hat man wegen der Verwandlung der kleineren Einheiten in größere noch eine Abänderung der Probe zu machen. Z. B. die Summe der Groſchen betrage 185, wovon

168 in 7 Rthlr. verwandelt, und 17 zum Facit genommen ſind. Da von 24 die Probezahl iſt 6 nach der Neunerprobe, ſo iſt für die abgeſonderten 7 Rthlr. die Probezahl 6 . 7 oder 6, und dieſe zu der Probezahl von 17, nämlich 8 genommen, muß eine Probezahl 14 oder 5 geben, welche mit der Probezahl der Summe übereinkommt, wie es bey 185 auch zutrifft. Auf ähnliche Art verfährt man bey der Probirung der Pfennige, wo für jeden abgeſonderten Groſchen oder 12 Pfennige zu der Probezahl der übrig gebliebenen Pfennige 3 zu addiren ſind. Die Rechenmeiſter geben deshalb einem Thaler 6 **Probegroſchen**, und dem Groſchen 3 **Probepfennige**.

Nach der Eilferprobe hat der Thaler 2 Probegroſchen, der Groſchen 1 Probepfennig.

Auf ähnliche Art verfährt man bey andern benannten Größen. So hat ein Pfund 5 **Probeloth** nach der Neunerprobe und 10 Probeloth nach der Eilferprobe.

In den Beyträgen zur Mathematik und Phyſik von F. G. Buſſe, Deſſau 1785, iſt eine Abhandlung über die Rechnungsproben enthalten. Was daſelbſt zur Beurtheilung der beiden hier erklärten Rechnungsproben beygebracht wird, möchte eine Verbeſſerung bedürfen. Die Wahrſcheinlichkeit, daß bey dem Zutreffen der Probe das Facit richtig ſey, hängt von der Fertigkeit des Rechners ab. Man kann nur die Zuverläſſigkeit beider Proben mit einander vergleichen.

Rechnungszeichen, ſ. Zeichen.

Reciprok (reciprocum) iſt eine Zahl von der andern, wenn das Product beider die Einheit giebt. So iſt 3 das Reciproke von $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{n}$ von n. Wer iel zu rechnen hat, mag ſich eine Tafel der Brüche

$\frac{1}{n}$ machen. In Huttens Wörterbuche iſt eine ſolche für die Quotienten der Zahlen von 1 bis 1000 auf 7 Decimalſtellen enthalten.

Ein Verhältniß iſt das Reciproke eines andern, wenn die Stellung der Glieder die entgegengeſetzte iſt, wie 5 : 3 und 3 : 5.

Ein Parallelogramm iſt das Reciproke eines andern, ihm gleichwinkligen, wenn die Seiten des einen die mittleren Glieder der Proportion ſind, in welcher die äußern Glieder die Seiten des andern ſind.

Eine Gleichung heißt eine reciproke, wenn neben jeder Wurzel derſelben, p, auch $\frac{1}{p}$ als Wurzel vorhanden iſt, ſ. Gleichung, 17.

Rectangel, iſt ein Rechteck.

Rectification iſt die Verwandlung eines Bogens einer krummen Linie in eine eben ſo lange gerade Linie.

1. Eine krumme Linie muß man ſich nicht aus höchſt kleinen, ſelbſt nicht unendlich kleinen, geraden Linien zuſammengeſetzt vorſtellen. Man mag ſie ſich als Gränze der eingeſchriebenen Polygone gedenken, muß aber alsdann wohl bemerken, daß eine Gränze immer von dem, was ſich der Gränze nähert, unterſchieden bleibt. Es iſt vielleicht beſſer, ſogar die Vorſtellung einer Gränze hier nicht zu gebrauchen, um jede Übereinkunft des geraden mit dem krummen zu entfernen. Wolf ſagt in den Elementis Analyseos, P. II. §. 144, daß eine krumme Linie aus unzählig vielen, unendlich kleinen geraden lineolis beſtehe, und wenn eine derſelben durch die Differentialrechnung gefunden ſey, ſo gebe die Summe die Länge der Curve. Der Zuſatz insbeſondere erweckt ganz verkehrte Begriffe, da man

ein Differential nicht berechnen kann, und die Integralrechnung auch kein Summiren unendlich kleiner Theile iſt. In der franzöſiſchen großen Encyklopädie iſt ein Artikel über die Quadratur des Kreiſes, deſſen Verfaſſer, Pankouke, der Herausgeber der erſten Ausgabe, ſich vorſtellt, daß alle Curven aus geraden Linien, oder Kreisbogen oder beiderley zuſammengeſetzt ſeyn; daß diejenigen, welche keine Kreisbogen enthalten, als unendliche Reihen kleiner geraden Linien anzuſehen ſeyn, deren Gleichung ihre Krümmung beſtimmt; der Umfang dieſer Curven, und ihre Flächenräume ſeyn commenſurabel oder nicht, nach Beſchaffenheit der Curve. Es iſt nicht nöthig hierüber Bemerkungen zu machen. Der Verfaſſer verbreitet ſich weitläufig über die Rectification der krummen Linien, will die Unmöglichkeit, den Kreis in eine gerade Linie zu verwandeln, zeigen, thut dies aber ſo, daß daraus folgen würde, keine Curve laſſe ſich rectificiren.

Descartes (Geometria, p. 39.), und andere ſeiner Zeit zweifelten, daß irgend eine krumme Linie mit einer geraden verglichen werden könne. Daher war die Entdeckung der erſten rectificabeln Curve ſehr überraſchend. Man hätte an der Erfindſamkeit des menſchlichen Geiſtes nicht verzweifeln ſollen, zumahl da ſchon frühe krummlinichte Figuren mit geradlinichten waren verglichen worden. Es ſind aber wirklich nur wenige algebraiſche Linien rectificabel.

2. Es iſt AMN (Fig. 20.) irgend eine Curve, zu deren Puncte M die Coordinaten AP, PM, und zu einem andern Puncte N die Coordinaten AQ, QN gehören. Sie ſind rechtwinklichte. Die Abſciſſenlinie AX ſey an der concaven Seite des Bogens genommen. Durch M ziehe man mit AQ die parallele Mn bis an NQ. Es ſey AP $=$ x, PQ $= \Delta x$; PM $=$ y, Nn $= \Delta y$; der Bogen AM $=$ s, Bogen MN $= \Delta s$. Durch die Puncte M, N ziehe man eine ſchneidende gerade SMN, und durch M die berührende TMm.

Jene ſchneide die Abſciſſenlinie in S', die berührende dieſelbe in T. Die verlängerte Ordinate QN und die berührende ſchneiden ſich in m. An der berührenden iſt $Mn : mn = \partial x : \partial y$, (berührende Linie, 12, und Linie, gerade, 15.), oder $PT : PM = \partial x : \partial y$. An der ſchneidenden iſt $PS : PM = \Delta x : \Delta y$. Aus der erſteren Proportion iſt $PT^2 : PM^2 = \partial x^2 : \partial y^2$, daher $TM^2 : PM^2 = \partial x^2 + \partial y^2 : \partial y^2$, und

$TM = \frac{y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial y}$. Auf gleiche Weiſe iſt

$SM = \frac{y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}$. Da SM der TM näher als um jede angebliche Größe gebracht werden kann, ſo iſt

$\frac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial y}$ die Gränze von $\frac{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}$

das iſt von $\frac{\Delta s}{\Delta y}$. Da dieſe Gränze durch $\frac{\partial s}{\partial y}$ bezeichnet wird, ſo iſt $\partial s : \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 1 : 1$.

3. Man mag auch den Beweis folgendergeſtalt abfaſſen. Der Bogen MN iſt größer als die Chorde deſſelben. Auch iſt der Bogen MN kleiner als $Mm + Nm$ (Linie, gerade, 6.). Durch die Drehung der ſchneidenden Linie um M kann der Punct N an M ſo nahe gebracht werden, daß der Bogen MN kleiner als Mm iſt. Denn es iſt $Mn:nm = PT:PM$, und $Nn : Mn = PM:PS$; alſo iſt $Nn:nm = PT:PS$, und daraus $Nm:nm = TS:PS$. Folglich kann das Stück Nm im Verhältniß gegen nm und alſo auch gegen Mm ſo klein genommen werden, als nur immer erforderlich ſeyn mag, und dadurch kann in der Formel, Bogen $MN < Mm + Nm$, der Bogen MN immer kleiner als Mm gemacht werden, ſo wie die gerade MN in jedem Falle kleiner als Mm iſt, wovon dieſer Satz auch eine Folge iſt.

Nun folgt aus den beiden Proportionen,

$$PT : TM = Mn : Mm$$
$$PS : SM = Mn : MN,$$

daß $\frac{\Delta s}{\Delta x} < \frac{TM}{PT}$, und $\frac{\Delta s}{\Delta x} > \frac{SM}{PS}$ iſt.

Der Differentialquotient $\frac{\partial s}{\partial x}$ iſt nicht größer und nicht kleiner als $\frac{TM}{PT}$. Erſtlich iſt er nicht größer. Denn wenn dieſes wäre, ſo könnte er ſich nicht dem $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ ohne Ende nähern, da $\frac{TM}{PT} > \frac{\Delta s}{\Delta x}$ iſt. Es iſt aber auch $\frac{\partial s}{\partial x}$ nicht kleiner als $\frac{TM}{PT}$. Denn wenn dieſes wäre, ſo könnten ſich die Quotienten $\frac{TM}{PT}$ und $\frac{SM}{PS}$ einander nicht ohne Ende nähern. Es iſt nämlich $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ und daher auch $\frac{\partial s}{\partial x} > \frac{SM}{PS}$, alſo fiele $\frac{\partial s}{\partial x}$ zwiſchen die Quotienten $\frac{TM}{PT}$ und $\frac{SM}{PS}$, welche daher immer verſchieden blieben, ſo nahe auch die Puncte M, N einander rückten. Es iſt alſo $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{TM}{PT}$, oder $PT : TM = \partial x : \partial s$. Nun iſt auch $PT : PM = \partial x : \partial y$, und daraus $PT : TM = \partial x : \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$; folglich iſt $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$.

4. Bey dem Gränzverhältniſſe von $\Delta x : \Delta s$ oder von $\Delta y : \Delta s$ kann die Krümme des Bogens

nicht in Betrachtung kommen, weil dieſe eine Folge von mehr als zwey Puncten vorausſetzt. Die Abſtände der Endpuncte in der ſtetigen Reihe von Bogen werden mit den Differentialen der Coordinaten eben ſo verglichen, wie bey endlichen Unterſchieden.

5ᵃ. So wie $\surd(\Delta x^2 + \Delta y^2) =$
$$\Delta x \surd\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right) \text{ oder } = \Delta y \surd\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1\right)$$
iſt, ſo iſt auch $\partial s = \partial x \surd\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x_2}\right)$
$$= \partial y \surd\left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 1\right).$$
Dieſe Ausdrücke werden negativ, wenn die Veränderungen des Bogens und der Abſciſſe oder Ordinate entgegengeſetzt ſind.

Es ſey $\partial y = p\partial x$, ſo iſt $\partial s = \partial x \surd(1 + pp)$, eine Form, die oft gebraucht wird, beſonders für die Krümmungs-Halbmeſſer.

5ᵇ. Werden die Ordinaten aus einem Puncte C gezogen, und die Natur der krummen Linie durch eine Gleichung zwiſchen der veränderlichen CM und dem Winkel ACM, welchen CM mit einer der Lage nach gegebenen geraden AC macht, beſtimmt, ſo fälle man von M auf CA die ſenkrechte MP, und ſetze CP $= t$, PM $= u$, und den Bogen AM wie vorhin $= s$. Es iſt nun vermöge des vorigen
$$\partial s = -\partial t \surd\left(1 + \frac{\partial u^2}{\partial t^2}\right)$$
und wenn CM y, ACM φ heißt, $u = y \sin\varphi$, $t = y \cos\varphi$, alſo $\partial u = \partial y \sin\varphi + y \cos\varphi \partial\varphi$, $\partial t = dy \cos\varphi - y \sin\varphi \partial\varphi$. Dadurch wird $\partial s = \surd(\partial y^2 + y^2 \partial\varphi^2)$
$$= \partial y \surd\left(1 + y^2 \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2}\right).$$

Dies läßt ſich auch auf folgende Art finden. Es iſt (Fig. 21.) AMN eine krumme Linie, an deren Punct M von dem fixen Puncte C in der Ebene derſelben die gerade CM gezogen iſt, welche mit der der Lage nach gegebenen AC den veränderlichen Winkel ACM einſchließt. An M ſey die Berührende TM gezogen, und auf ſie der Perpendikel CP von C gefällt. Man ziehe noch an einen andern Punct der Curve N die CN, welche der Berührenden in t begegnet, und die Chorde MN, auf deren Verlängerung man von C den Perpendikel CQ fälle. Endlich beſchreibe man noch aus C mit dem Halbmeſſer CN innerhalb der Schenkel des Winkels MCN den Kreisbogen Nn, und ziehe Nr ſenkrecht auf Cn. Das Verhältniß des Bogens MN zu Mn wird nun aus folgenden Verhältniſſen zuſammengeſetzt, dem des Bogens MN zu der Chorde MN, dem der Chorde MN zu Mr, und dem von Mr zu Mn. Das Gränzverhältniß des Bogens MN zu Mn iſt alſo das zuſammengeſetzte aus den Gränzen der drey zuletzt genannten Verhältniſſe. Die Gränze des Verhältniſſes des Bogens MN zu der Chorde MN, ſo wie diejenige des Verhältniſſes von Mr zu Mn iſt aber 1 : 1, und das Verhältniß von MN : Mr wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke MNr und CMQ gleich dem von CM : MQ, von welchem letzteren Verhältniſſe die Gränze iſt CM : MP d. i. 1 : cos CMP.

Wenn nun $CM = y$, $ACM = \varphi$, $CN = y + \Delta y$, $MCN = \Delta\varphi$, der Bogen $AM = s$, und Bogen $MN = \Delta s$, ſo iſt Bogen $\frac{MN}{Mn} = \frac{\Delta s}{\Delta y}$, wovon $\frac{\partial s}{\partial y}$ die Gränze iſt. Mithin iſt $\partial s : \partial y = 1 : \cos CMP$. Da $\tang CMP = \frac{y\partial\varphi}{\partial y}$ (berüh-

rende Linie, 27.) ſo iſt,

$$\cos CMP = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{y^2 \partial\varphi^2}{\partial y^2}\right)}}$$

$= \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial\varphi^2)}}$, wodurch $\partial s = \frac{\partial y}{\cos CMP}$ $= \sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial\varphi^2)}$ wird. Der Beweis bleibt, wenn auch AMN dem Puncte C die convexe Seite zukehrt.

6. Für den Kreis iſt die Gleichung $xx + yy = aa$; daraus $x\partial x = - y\partial y$, und $p = - \frac{x}{y}$, alſo

$$\partial s = - \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = - \frac{a\partial x}{y} =$$
$$+ \frac{a\partial y}{x}, \text{ oder } \partial s = - \frac{a\partial x}{\sqrt{(aa - yy)}} = +$$
$$\frac{a\partial y}{\sqrt{(aa - yy)}}.$$

Das Vorzeichen — iſt genommen, weil der Bogen von dem Puncte an gerechnet, wo $x = a$ iſt, und die Abſciſſe x ſich ungleichnamig verändern. Es iſt $s = a \text{ Ang.cos} \frac{x}{a} = a \text{ Ang sin} \frac{y}{a}$. Die Entwicklung dieſer Formeln iſt in dem Artikel, Cyklometrie, vorgetragen.

Rectification der Kegelſchnitte.

7. Es ſey AMB (Fig. 22.) der Quadrant einer Ellipſe, deren halbe große Axe $AC = a$, halbe kleine $BC = b$ iſt. Auch ſey AND der Quadrant eines Kreiſes mit dem Halbmeſſer a; die gemeinſchaftliche Abſciſſe $CP = x$; die Ordinate an der Ellipſe $MP = y$, der Bogen $BM = s$. Die Gleichung für die Ellipſe iſt $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$,

woraus durch die Differentialrechnung iſt

$$\partial y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2}\,\partial x^2. \text{ Daher iſt}$$

$$\partial s^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}\,\partial x^2.$$

Werden hier a und b mit einander vertauſcht, und wird y ſtatt x geſetzt, ſo wird ∂s durch ∂y mit y ausgedruckt.

8. Man ſetze $\frac{aa - bb}{aa} = e^2$, und $\frac{x}{a} = z$, welches der Sinus des Winkels DCN iſt, ſo iſt $\partial x = a\partial z$, und $\partial s = a\partial z\,\frac{\sqrt{(1 - e^2 z^2)}}{\sqrt{(1 - z^2)}}$.

9. Dieſe Formel zu integriren, verwandle man die Wurzelgröße im Zähler nach dem binomiſchen Lehrſatze in eine Reihe,

$$\sqrt{(1 - e^2 z^2)} = 1 - \mathfrak{A}e^2 z^2 - \mathfrak{B}e^4 z^4 - \mathfrak{C}e^6 z^6 - \mathfrak{D}e^8 z^8 - \mathfrak{E}e^{10} z^{10} - \text{etc.}$$

$$\text{wo } \mathfrak{A} = \frac{1}{2};\ \mathfrak{B} = \frac{1.1}{2.4};\ \mathfrak{C} = \frac{1.1.3}{2.4.6};$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8};\ \mathfrak{E} = \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10};\ \text{etc.}$$

Jedes dieſer Glieder werde mit $\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$ multiplicirt, ſo werden die Integrale folgeweiſe aus den vorhergehenden gefunden, nach der allgemeinen Formel, Integralformel, 61.

$$\int \frac{z^{m+2}\,\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{m+1}{m+2}\int \frac{z^m\,\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}} - \frac{1}{m+2}\,z^{m+1}\sqrt{(1 - z^2)}$$

Verlangt man nur den ganzen Quadranten, ſo fällt der algebraiſche Theil weg, weil nun $z = 1$ iſt, und es iſt

$$\int \frac{z^{m+2} \partial z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{m+1}{m+2} \int \frac{z^m \partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Die Conſtante iſt $= 0$, weil das Integral $= 0$ ſeyn ſoll, für $x = 0$.

Es wird nun nach den Formeln, a. a. O. 62, wo x hier z iſt, $\text{Ang sin } z = \frac{1}{2}\pi$, alſo der elliptiſche Quadrant

$$AMB = \frac{1}{2}\pi a \left[1 - \frac{1}{2}\mathfrak{A}e^2 - \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{B}e^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{C}e^6 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathfrak{D}e^8 - \frac{1..9}{2...8}\mathfrak{E}e^{10} - \text{etc.}\right]$$

Setzt man für die Binomialcoefficienten ihre Werthe, ſo iſt

$$AMB = \frac{1}{2}\pi a \left[1 - \frac{1.1}{2.2}e^2 - \frac{1.1.3.1}{2.2.4.4}e^4 - \frac{1.1.3.3.5.1}{2.2.4.4.6.6}e^6 - \frac{1.1.3.3.5.5.7.1}{2.2.4.4.6.6.8.8}e^8 - \text{etc.}\right]$$

10. Euler hat die Aufgabe noch etwas anders behandelt, in den Comm. novis Ac. Petr. T. XVIII. Da $\frac{xx}{aa} + \frac{yy}{bb} = 1$ iſt, ſo ſetzt er $\frac{xx}{aa} = \frac{1+z}{2}$ folglich $\frac{yy}{bb} = \frac{1-z}{2}$, woraus ſich ergiebt

$$\partial x = \frac{a\partial z}{2\sqrt{2(1+z)}}; \quad \partial y = \frac{-b\partial z}{2\sqrt{2(1-z)}}; \text{ und}$$

∂s

$$\partial s^2 = \frac{(aa + bb - (aa - bb)\, z)}{8\,(1 - z^2)}\, \partial z^2.$$

Zur Abkürzung ſetze man $aa + bb = cc$; und $\frac{aa - bb}{aa + bb} = n$ ſo iſt

$$s = \frac{c}{2\sqrt{2}} \int \partial z\, \frac{\sqrt{(1 - nz)}}{\sqrt{(1 - z^2)}}.$$

Die Integration iſt dieſelbe wie vorher. Die Conſtante muß ſo beſtimmt werden, daß der elliptiſche Bogen $= 0$ ſey, wenn $z = -1$ genommen wird. Die Integrale von den ungeraden Potenzen verſchwinden für $z = +1$ und $z = -1$. Es iſt der Quadrant

$$AMB = \frac{c\pi}{2\sqrt{2}} \Big[1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{3.5}{8.8} n^4 - \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{3.5}{8.8} \cdot \frac{7.9}{12.12} n^6 - \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{3.5}{8.8} \cdot \frac{7.9}{12.12} \cdot \frac{11.13}{16.16} n^8 - \text{etc.} \Big]$$

Die Conſtante iſt gerade die Hälfte des elliptiſchen Quadranten für $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Die Progreſſionalgröße n^2 iſt kleiner als e^2; der Coefficient von n^2 iſt beträchtlich kleiner als der von e^2 in der vorigen Reihe; allein die Factoren, welche ſucceſſiv hinzukommen, ſind in der Euleriſchen Reihe größer.

11. Die unbeſtimmte Rectification der Ellipſe ergiebt ſich aus den Integralen, in Integralformel, 62, wo die ganze Rechnung ſchon gemacht iſt. Man hat nur nöthig zu den Integralen die Factoren der Potenzen von z nebſt dem Factor a zuzuſetzen. Das dortige x iſt hier z, und z daſelbſt hier $\sqrt{(1 - zz)}$.

Es iſt, wenn man die Formel in (8.) entwickelt, und Ang.sin z = φ ſetzt,

$$\frac{s}{a} = \varphi - \mathfrak{A}e^2 \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi.\cos\varphi\right)$$

$$- \mathfrak{B}e^4 \left(\frac{1.3}{2.4}\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin\varphi.\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi^3.\cos\varphi\right)$$

$$- \mathfrak{C}e^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi.\cos\varphi - \frac{1.5}{4.6}\sin\varphi^3.\cos\varphi - \frac{1}{6}\sin\varphi^5.\cos\varphi\right)$$

$$- \text{etc.}$$

12. Ein elliptiſcher Bogen läßt ſich auch durch den Winkel φ, deſſen Sinus z iſt, und die Sinus der geraden Vielfachen von φ ausdrücken.

In der Gleichung, $\partial s = a\partial z \sqrt{\frac{1-e^2z^2}{1-z^2}}$, ſetze man $z = \sin\varphi$, ſo iſt $\partial z = \cos\varphi.\partial\varphi = \partial\varphi.\sqrt{(1-z^2)}$, folglich

$$\partial s = a\partial\varphi\sqrt{(1-e^2\sin\varphi^2)},$$

das iſt

$$\partial s = a\partial\varphi\,(1 - \mathfrak{A}e^2\sin\varphi^2 - \mathfrak{B}e^4\sin\varphi^4 - \mathfrak{C}e^6\sin\varphi^6 - \mathfrak{D}e^8\sin\varphi^8 - \mathfrak{E}e^{10}\sin\varphi^{10} - \text{etc.})$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc., die in (9.) angegebenen Werthe haben.

Aus den Formeln für die Potenzen der Sinus in Goniometrie, 137, ſetze man für dieſelben ihre Werthe durch Coſinus der geraden Vielfachen von φ, um die Integration zu bewerkſtelligen, da $\int\cos m\varphi.\partial\varphi = \frac{1}{m}\sin m\varphi$ iſt, Integralformel, 109.

13. Um die Formation der Reihe für den elliptiſchen Bogen deutlicher einzuſehen, muß man in den Formeln für die Potenzen der Sinus die Coefficienten der Coſinus als Binomialcoefficienten bezeichnen. In der 2mten Potenz ſeyn dieſe durch $^{2m}\mathfrak{A}$, $^{2m}\mathfrak{B}$, $^{2m}\mathfrak{C}$, u. ſ. f. angedeutet (Binomial-Coefficient, 1.), ſo iſt, z. B.

$$2^7 . \sin \varphi^8 = \frac{1}{2} . {}^8\mathfrak{D} - {}^8\mathfrak{C} \cos 2\varphi + {}^8\mathfrak{B} \cos 4\varphi$$
$$- {}^8\mathfrak{A} \cos 6\varphi + \cos 8\varphi$$

$$2^9 . \sin \varphi^{10} = \frac{1}{2} . {}^{10}\mathfrak{E} - {}^{10}\mathfrak{D} \cos 2\varphi + {}^{10}\mathfrak{C} \cos 4\varphi$$
$$- {}^{10}\mathfrak{B} \cos 6\varphi + {}^{10}\mathfrak{A} \cos 8\varphi - \cos 10\varphi.$$

Die Coefficienten in der Potenz $(1 - z)^{\frac{1}{2}}$ müſſen nun der Gleichförmigkeit wegen, durch $^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}$, $^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}$, $^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}$, $^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}$, u. ſ. f. bezeichnet werden. Es ſind hier die abſoluten Größen in (9.) zu verſtehen.

14. Es ſey nun

$$\frac{s}{a} = A\varphi + \frac{1}{2} B \sin 2\varphi - \frac{1}{4} C \sin 4\varphi$$
$$+ \frac{1}{6} D \sin 6\varphi - \frac{1}{8} E \sin 8\varphi + \frac{1}{10} F \sin 10\varphi$$
$$- \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\frac{\partial s}{a} = (A + B \cos 2\varphi - C \cos 4\varphi + D \cos 6\varphi$$
$$- E \cos 8\varphi + F \cos 10\varphi - \text{etc.})\, \partial\varphi.$$

Man entwickele die Formel für $\frac{\partial s}{a}$ in (12.) nach den Coſinus der Vielfachen von φ, ſo giebt die Ver-

gleichung mit jener Reihe für $\frac{\partial s}{a}$ die Werthe der Coefficienten A, B, C, D, etc. wie folget.

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} \cdot {}^{2}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}e^2 - \frac{1}{2^4} \cdot {}^{4}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}e^4 - \frac{1}{2^6} \cdot {}^{6}\mathfrak{C} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6 - \frac{1}{2^8} \cdot {}^{8}\mathfrak{D} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 - \frac{1}{2^{10}} \cdot {}^{10}\mathfrak{E} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}e^2 + \frac{1}{2^3} \cdot {}^{4}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}e^4 + \frac{1}{2^5} \cdot {}^{6}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6 + \frac{1}{2^7} \cdot {}^{8}\mathfrak{C} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{D} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{2^3} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}e^4 + \frac{1}{2^5} \cdot {}^{6}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{8}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{C} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

$$D = \frac{1}{2^5} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6 + \frac{1}{2^7} \cdot {}^{8}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

$$E = \frac{1}{2^7} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

$$F = \frac{1}{2^9} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

15. Hieraus wird durch gehörige Einſchaltungen und Aufhebungen von Factoren

$$\frac{s}{a} = \varphi \Big[1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 16} e^4 - \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{4 \cdot 16 \cdot 36} e^6$$

$$- \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64} e^8 - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100} e^{10} - \text{etc.} \Big]$$

$$+ \frac{1}{1} \sin 2\varphi \Big[\frac{1}{8} e^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 12} e^4 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{8 \cdot 12 \cdot 16} \cdot \frac{1}{2} e^6$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} e^8$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$- \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 4} \sin 4\varphi \Big[\frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 16} e^4 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{12 \cdot 16 \cdot 20} e^6$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24} \cdot \frac{1}{2} e^8$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 9} \sin 6\varphi \Big[\frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{16 \cdot 20 \cdot 24} e^6$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28} e^8 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32} \cdot \frac{1}{2} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16} \sin 8\varphi \Big[\frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32} e^8$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32 \cdot 36} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25} \sin 10\varphi \left[\frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{24 \cdot 28 \cdot 32 \cdot 36 \cdot 40} e^{10} + \text{etc.} \right]$$

16. Die Länge eines elliptiſchen Bogens läßt ſich auch vermittelſt des Krümmungshalbmeſſers finden. In M (Fig. 23.) ſey die Normale MQ gezogen, welche die große Axe unter dem Winkel AQM $= \omega$ ſchneidet. Der Halbmeſſer der Krümmung in M ſey $= r$, und für $\omega = 45°$ ſey $r = f$, ſo iſt $r = \frac{f}{(1 + n \cos 2\omega)^{2:3}}$, (Krümmungskreis, 17.). Ferner iſt, wenn nun AM $= s$ geſetzt wird, $\partial s = r \partial \omega$, (eb. daſ. 1.). Es muß hier AM durch s bezeichnet werden, damit die Differentiale ∂s, $\partial \omega$ gleichnamig ſeyn, indem AM und ω zugleich zunehmen. Es iſt alſo

$$\partial s = \frac{f \partial \omega}{(1 + n \cos 2\omega)^{2:3}},$$

wo n denſelben Werth wie in (10.) hat.

17. Die Rechnung iſt ſchon in dem Artikel, Integralformel, 127. gemacht. Man muß ſtatt des dortigen ν hier $-\frac{3}{2}$, und 2ω ſtatt φ ſetzen. Dadurch iſt $\mathfrak{A} = -\frac{3}{2}$; $\mathfrak{B} = +\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$; $\mathfrak{C} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}$, $\mathfrak{D} = +\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$, u. ſ. f. Es wird nun durch die Integration erhalten, da $\frac{\partial s}{f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \partial \omega}{(1 + n \cos 2\omega)^{2:3}}$ iſt,

$$\frac{AM}{f} = \omega \left(1 + \frac{3.5}{4.4} n^2 + \frac{3.5.7.9}{4.4.8.8} n^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12} n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$- \sin 2\omega \left(\frac{3}{4} n + \frac{3.5.7}{4.8.12} . \frac{3}{1} n^3 + \frac{3..11}{4..20} . \frac{5.4}{1.2} n^5 + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin 4\omega \left(\frac{3.5}{4.8} n^2 + \frac{3.5.7.9}{4.8.12.16} . \frac{4}{1} n^4 + \frac{3...13}{4...24} . \frac{6.5}{1.2} n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{3} \sin 6\omega \left(\frac{3.5.7}{4.8.12} n^3 + \frac{3...11}{4...20} . \frac{5}{1} n^5 + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{4} \sin 8\omega \left(\frac{3.5.7.9}{4.8.12.16} n^4 + \frac{3...13}{4...24} . \frac{6}{1} n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{5} \sin 10\omega \left(\frac{3.5.7.9.11}{4.8.12.16.20} n^5 + \text{etc.}\right)$$

$+ \text{etc.}$

Die numeriſchen Coefficienten von n ſind wenig convergirend.

Der Factor zu ω iſt der Quotient von

$$1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} n^4 - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} n^6 - \text{etc.}$$

durch $1 - nn$ dividirt. Jene Reihe iſt die in (10).

Die folgenden Reihen laſſen ſich auf dieſelbe Art convergenter machen, wenn man ſie mit $1 - nn$ multiplicirt, und dagegen ihnen den Diviſor $1 - nn$ giebt.

Es iſt nämlich $f = \frac{a^2 b^2 \sqrt{8}}{(a^2 + b^2)^{3:2}}$. Die in ω multiplicirte Reihe nenne man R, die Reihe in 10. bezeichne man durch S. Der elliptiſche Quadrant iſt $= \frac{1}{2}\pi f.R = \frac{1}{2}\pi . \frac{a^2 b^2 \sqrt{8}}{(aa + bb)^{3:2}}.R$, und aus (10.) iſt derſelbe $= \frac{1}{2}\pi . \frac{c}{\sqrt{2}}.S = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{aa + bb}{2}}.S$.

Daher iſt $R = \frac{(aa + bb)^2}{4a^2 b^2} S. = \frac{S}{1 - nn}$. Denn $1 - n^2 = \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}$.

18. Die Formel, die Länge eines elliptiſchen Bogens durch den Winkel ω der Normale mit der großen Axe zu finden, hat ihre Anwendung in der Geographie, weil hier ein Ort oder Parallelkreis durch die Breite deſſelben gegeben wird, welche auf einem elliptiſchen Meridian durch jenen Winkel ω gemeſſen wird.

19. Wenn die Lage des Punctes M durch den Winkel BRM der Normale mit der kleineren Axe angegeben wird, ſo werden die ſubtractiven Glieder in (17.) additiv. Es iſt nämlich, wenn nun $BRM = \omega'$ geſetzt wird, $r = \frac{f}{(1 - n \cos 2\omega')^{3:2}}$. Denn es iſt $\cos 2\omega = 1 - 2 \sin \omega^2 = 1 - 2(\cos \omega')^2$, und $1 + n \cos 2\omega = 1 + n - 2n(\cos \omega')^2 = 1 - n \cos 2\omega'$, Die Entwickelung des Differentials ∂s iſt alſo ganz dieſelbe wie vorher, nur daß n negativ wird, daher die Factoren zu den Sinus der einfach

geraden Vielfachen von ω ihr Vorzeichen ändern, indem ω' oder $90° - \omega$ für ω geſetzt wird.

20. Der Bogen AM (Fig. 23.) kann auch durch die Potenzen von $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ oder e^2, und durch die Potenzen der Sinus von ω, oder ſtatt dieſer, durch Sinus der Vielfachen von ω, ausgedrückt werden. Es iſt (Krümmungskreis, 16.)

$$x^2 = \frac{a^4 \cos \omega^2}{a^2 \cos \omega^2 + b^2 \sin \omega^2},$$

alſo, da $b^2(a^2 - x^2) = a^2 y^2$ iſt,

$$y^2 = \frac{b^4 \sin \omega^2}{a^2 \cos \omega^2 + b^2 \sin \omega^2}.$$

Oder

$$x = \frac{a \cos \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{1:2}};\quad y = \frac{b^2 \sin \omega}{a(1 - e^2 \sin \omega^2)^{1:2}}.$$

Die Differentiation giebt

$$\partial x = -\frac{b^2}{a} \cdot \frac{\sin \omega . \partial \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}},$$

$$\partial y = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\cos \omega . \partial \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}}.$$

Das Differential ∂x iſt negativ, weil x abnimmt, wenn ω zunimmt.

Hieraus iſt

$$\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{a(1 - e^2)\partial \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}},$$

oder, da $\partial \omega = \frac{\partial \sin \omega}{\cos \omega}$,

$$\partial s = \frac{a(1 - e^2)\partial \sin \omega}{\cos \omega (1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}}.$$

Die Integration dieſer beiden Differentialformeln zu bewerkſtelligen, muß man ſie in eine Reihe verwandeln. Es iſt

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin\omega^2)^{3:2}} = 1 + \mathfrak{A}e^2 \sin\omega^2 + \mathfrak{B}e^4 \sin\omega^4 + \mathfrak{C}e^6 \sin\omega^6 + \text{etc.}$$

wo

$$\mathfrak{A} = \frac{3}{2};\quad \mathfrak{B} = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4};\quad \mathfrak{C} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6};$$

u. ſ. w. iſt.

21. Aus den Formeln für die Potenzen der Sinus (Goniometrie, 137.), und der Formel, $\int \cos\lambda\omega . \partial\omega = \frac{1}{\lambda} \sin\lambda\omega$, wird erhalten:

$$s = a(1 - e^2) \times$$

$$\Big[\Big(1 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}e^2 + \frac{3}{8}\mathfrak{B}e^4 + \frac{10}{32}\mathfrak{C}e^6 + \frac{35}{128}\mathfrak{D}e^8 + \text{etc.}\Big)\omega$$

$$- \Big(\frac{1}{4}\mathfrak{A}e^2 + \frac{4}{16}\mathfrak{B}e^4 + \frac{15}{64}\mathfrak{C}e^6 + \frac{56}{256}\mathfrak{D}e^8 + \text{etc.}\Big)\sin 2\omega$$

$$+ \Big(\frac{1}{32}\mathfrak{B}e^4 + \frac{6}{128}\mathfrak{C}e^6 + \frac{28}{512}\mathfrak{D}e^8 + \text{etc.}\Big)\sin 4\omega$$

$$- \Big(\frac{1}{192}\mathfrak{C}e^6 + \frac{8}{768}\mathfrak{D}e^8 + \text{etc.}\Big)\sin 6\omega$$

$$+ \Big(\frac{1}{1024}\mathfrak{D}^8 + \text{etc.}\Big)\sin 8\omega$$

$$- \text{etc.}\Big]$$

Die Coefficienten zu den Potenzen von e^2 in dem Factor von ω ſind

$$\frac{1.3}{2.2};\ \frac{1.3^2.5}{2^2.4^2};\ \frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2};\ \frac{1.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2};$$

$$\frac{1.3^2.5^2.7^2.9^2.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2},\text{ u. ſ. f.}$$

Die Coefficienten in dem Factor von $\sin 2\omega$ ſind

$$\frac{3}{8};\ \frac{3^2.5}{8.12};\ \frac{3^2.5^2.7}{8.12.16}.\frac{1}{2};\ \frac{3^2.5^2.7^2.9}{8.12.16.20}.\frac{1}{2.3};$$

$$\frac{3^2.5^2.7^2.9^2.11}{8.12.16.20.24}.\frac{1}{2.3.4},\text{ u. ſ. f.}$$

Die Coefficienten in dem Factor zu $\sin 4\omega$ ſind

$$\frac{3^2.5}{12.16}.\frac{1}{4};\ \frac{3^2.5^2.7}{12.16.20}.\frac{1}{4};\ \frac{3^2.5^2.7^2.9}{12.16.20.24}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2};$$

$$\frac{3^{10}.5^2.7^2.9^2.11}{12.16.20.24.28}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2.3};\text{ u. ſ. f.}$$

22. Die zweyte Formel für ∂s zu integriren ſetze man $\sin\omega = u$, ſo iſt

$$\partial s = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-u^2)}}(1 + \mathfrak{A}e^2u^2 + \mathfrak{B}e^4u^4 + \mathfrak{C}e^6u^6 + \mathfrak{D}e^8u^8 + \text{etc.})\,\partial u.$$

Die Integrale ergeben ſich aus Integralformel, 62.

Man ſetze $\alpha = \frac{3}{2^2}$; $\beta = \frac{3.5}{4^2}\alpha$; $\gamma = \frac{5.7}{6^2}\beta$;

$\delta = \frac{7.9}{8^2}\gamma$; u. ſ. f. ſo iſt

$$s = a(1-e^2)\times$$
$$\Big[(1 + \alpha e^2 + \beta e^4 + \gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.})\,\omega$$
$$- (\alpha e^2 + \beta e^4 + \gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.})\sin\omega.\cos\omega$$

$$- \frac{2}{3} (\beta e^4 + \gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.}) \sin \omega^3 . \cos \omega$$

$$- \frac{2.4}{3.5} (\gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.}) \sin \omega^5 . \cos \omega$$

$$- \frac{2.4.6}{3.5.7} (\delta e^8 + \text{etc.}) \sin \omega^7 . \cos \omega$$

$$- \text{etc.} \Big]$$

Dieſe letztere Formel hat Pasquich gegeben, in von Zach monatlicher Correſpondenz. I. Bd. S. 439. Die Gründe der Berechnung ſind in dem IX. Bande. S. 302 geliefert.

23. Wolfs Rechnung, die Ellipſe zu rectificiren, (Elem. Anal. Infin. §. 172.) iſt noch ſehr unbequem. Er löſet in dem Differential des Bogens ∂s $= \frac{\sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 - x^2)}} \partial x$, wo c die halbe kleine Axe iſt, Zähler und Nenner in eine Reihe auf, dividirt die erſtern durch die letztern, und integrirt darauf. So findet er eine ſehr unvollſtändige Reihe von ſechs Gliedern, ohne ein bemerkliches Geſetz der Fortſchreitung. Lambert hat in dem 3. Theile ſeiner Beyträge zur Mathematik den elliptiſchen Bogen auf gleiche Art geſucht, verwandelt aber erſtlich die Diviſion in eine Multiplication, durch $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe aufgelöſet, und findet ein Geſetz des Fortganges für die Coefficienten der Progreſſionalgröße. Nur convergiren dieſe zu langſam. Deswegen ſucht er verſchiedene andere Methoden, um die elliptiſchen Bogen bequemer anzugeben, von welchen hier einige benutzt ſind. In der Formel, S. 51. für $\frac{v}{\cos \lambda}$ ſind einige Unrichtigkeiten, als Z. 4, wo der Factor 20 wegzuſtreichen iſt. Daſſelbe muß Z. 5 mit dem Factor 9

in dem Coefficienten zu $t\lambda^{10}$, und in dem folgenden mit dem Factor 13; auch Z. 6 mit den Factoren 11 und 13. geſchehen. — Hindenburg hat in der Sammlung analytiſch-combinatoriſcher Abhandlungen, II. S. 132. von der Rectification der Ellipſe ein Beyſpiel hergenommen, ſeine Methode daran zu zeigen.

24. Für die Hyperbel iſt die Gleichung, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Daraus iſt $b^2x\partial x = a^2y\partial y$;

$$\partial y^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\partial x^2,\ \text{und}$$

$$\partial s^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{a^2(x^2-a^2)}\partial x^2.$$

Es ſey $\frac{a^2}{a^2+b^2} = n^2$, ſo iſt

$$\partial s = \frac{\partial x \sqrt{(x^2-n^2a^2)}}{n\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Dieſe Formel zu integriren, entwickele man die Wurzelgröße $\sqrt{(x^2-n^2a^2)} = x - \mathfrak{A}.\frac{n^2a^2}{x}$

$$- \mathfrak{B}.\frac{n^4a^4}{x^3} - \mathfrak{C}.\frac{n^6a^6}{x^5} - \mathfrak{D}.\frac{n^8a^8}{x^7} - \text{etc.}$$

$$\text{wo}\ \mathfrak{A} = \frac{1}{2};\ \mathfrak{B} = \frac{1.1}{2.4};\ \mathfrak{C} = \frac{1.1.3}{2.4.6};$$

$\mathfrak{D} = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}$, u. ſ. f. Die Differentiale, welche hier erhalten werden, haben die Form $\frac{M\partial x}{x^m\sqrt{(xx-aa)}}$, wo m eine ungerade Zahl iſt. Es iſt (Integralformel, 65.),

$$\int \frac{\partial x}{x^m \sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{(m-1)aa} \cdot \frac{\sqrt{(xx-aa)}}{x^{m-1}}$$

$$+ \frac{m-2}{(m-1)aa} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2}\sqrt{(xx-aa}}.$$

Da m ungerade iſt, ſo führt die Integration zuletzt auf $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(xx-aa)}}$, welches aus Integralformel, 54, iſt $\frac{1}{a}$ Ang.sec $\frac{x}{a}$ oder $\frac{1}{a}$ Ang.cos $\frac{a}{x}$.

Wenn der Bogen am Scheitel anfängt, wo x = a iſt, ſo iſt daſelbſt der algebraiſche Theil des Integrals = o, und der Winkel zu der Secante $\frac{x}{a}$ ebenfalls = o, daher die Const. = o.

25. Es iſt, wenn zur Abkürzung $xx-aa = u^2$ geſetzt wird,

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(xx-aa)}} = \sqrt{(xx-aa)}.$$

$$\int \frac{a^2\partial x}{x\sqrt{(xx-aa)}} = a \text{ Ang.sec} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{a^4\partial x}{x^3\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{aau}{x^2} + \frac{1}{2} a \text{ Ang.sec} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{a^6\partial x}{x^5\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4u}{x^4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{a^2u}{x^2}$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} a \text{ Ang.sec.} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{a^8\partial x}{x^7\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^6u}{x^6} + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6} \cdot \frac{a^4u}{x^4}$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot \frac{a^2u}{x^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} a \text{ Ang.sec.} \frac{x}{a}. \text{ u. ſ. f.}$$

Die veränderliche u nähert ſich der x deſto mehr, je größer x wird.

Mit Hülfe dieſer Integrale iſt die Reihe für den hyperboliſchen Bogen leicht gefunden. Es iſt

$$s = \frac{u}{n}\Big[1 - \frac{1}{2}\mathfrak{B}n^4 . \frac{a^2}{x^2}$$

$$- \frac{1}{4}\mathfrak{C}n^6\left(\frac{a^4}{x^4} + \frac{3}{2}.\frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$- \frac{1}{6}\mathfrak{D}n^8\left(\frac{a^6}{x^6} + \frac{5}{4}.\frac{a^4}{x^4} + \frac{5.3}{4.2}.\frac{a^2}{x^2}\right) + \text{etc.}\Big]$$

$$- n\Big(\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{B}n^2 + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{C}n^4$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{D}n^6 + \text{etc.}\Big) \times a . \text{Ang.sec}\frac{x}{a}.$$

25^b. Es iſt $\frac{u}{n} = \frac{\sqrt{(aa + bb)}\,(xx + aa)}{a}$

$= \frac{y\sqrt{(aa + bb)}}{b}$ die Größe der geraden, welche durch den Endpunct des Bogens M (Fig. 74. Tab. XIII. Th. 2) der Aſymptote CS parallel gezogen worden, von dieſem Puncte an bis an die Achſe CA genommen. Setzt man x unendlich, ſo fällt jene gerade mit der Aſymptote CQS zuſammen. In dieſem Falle verſchwinden alle durch x oder Potenzen deſſelben dividirten Glieder, Ang.sec $\frac{x}{a}$ wird $= \frac{\pi}{2}$, und der Überſchuß der Aſymptote CS über den ganzen unendlichen Zweig der Hyperbel AMS

$$= \frac{1}{2}na\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2}.\frac{1}{4}n^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{1}{6}n^4\right.$$

$$+\frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} . \frac{1}{8} n^4 + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2} . \frac{1}{10} n^6 + \text{etc.} \Big)$$

26. An der gleichſeitigen Hyperbel iſt $n^2 = \frac{1}{2}$ und $\partial s = \frac{\partial x \sqrt{(2x^2 - a^2)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$. Man ſetze $2x^2 - a^2 = z^2$, ſo iſt $\partial x = \frac{z \partial z}{\sqrt{2(z^2 + a^2)}}$, und $\partial s = \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(z^4 - a^4)}}$. Man ſieht hier, was das Integral eines Differentials dieſer Form iſt.

Setzt man $z^2 = u$, und $a = 1$, ſo iſt $\partial s = \frac{\partial u \sqrt{u}}{2\sqrt{(uu - 1)}}$.

27. Es iſt $\frac{z^2}{a^2}$ die Secante des doppelten Winkels, welchen der Radius aus dem Mittelpuncte der gleichſeitigen Hyperbel an den Endpunct des Bogens mit der Axe macht. Denn der Winkel des Radius mit der Axe ſey φ, ſo iſt $\tang \varphi = \frac{y}{x}$, und $\sec \varphi^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{2x^2 - a^2}{x^2}$. Ferner $2 - \sec \varphi^2 = \frac{a^2}{x^2}$, alſo $\frac{\sec \varphi^2}{2 - \sec \varphi^2} = \frac{2x^2 - a^2}{a^2}$. Multiplicirt man in dem erſten Theile dieſer Gleichung Zähler und Nenner durch $\cos \varphi^2$, ſo wird derſelbe $= \frac{1}{2 \cos \varphi^2 - 1} = \frac{1}{\cos 2\varphi} = \sec 2\varphi$, alſo $\frac{2x^2 - a^2}{a^2} = \sec 2\varphi$.

28. Man ſetze $a^2 = 2$, ſo iſt die Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel, $xx - yy = 2$. Auch ſey $\tang\varphi = \frac{y}{x}$, ſo iſt $\tang(45^\circ - \varphi) = \frac{x-y}{x+y}$. Dieſer Quotient ſey $= u$, ſo iſt $y = \frac{1-u}{\sqrt{2u}}$;

$x = \frac{1+u}{\sqrt{2u}}$, und $\partial s = -\frac{\partial u\sqrt{(1+uu)}}{2u\sqrt{u}}$.

29. Nimmt man die Coordinaten x, y, jene auf der einen Aſymptote, dieſe mit der andern Aſymptote parallel, ſo iſt $xy = aa$, und $\partial y = -\frac{aa\partial x}{xx}$; alſo

$$\partial s = \partial x\sqrt{\left(1 + \frac{a^4}{x^4}\right)}, \text{ oder } \partial s = \frac{\partial x}{xx}\sqrt{(a^4 + x^4)}.$$

Dieſe Formel läßt ſich nicht anders als durch Auflöſung in eine Reihe integriren.

30. Die in (11) und (25) gefundenen Ausdrücke für einen elliptiſchen und hyperboliſchen Bogen ſind nur dann brauchbar, wenn e an der Ellipſe und n an der Hyperbel kleine Größen ſind. Iſt aber e oder n wenig von Eins unterſchieden, ſo muß man den Reihen für den elliptiſchen oder hyperboliſchen Bogen eine andere Geſtalt geben. Zu dem Ende drücke man das Differential des elliptiſchen Bogens in (8) ſo aus

$$\frac{\partial s}{a} = \frac{\partial z\sqrt{(1-ez)}}{\sqrt{(1-z)}} \cdot \sqrt{\frac{1+ez}{1+z}}$$

$$= \frac{\partial z\sqrt{(1-ez)}}{\sqrt{(1-z)}} \cdot \sqrt{\left(e + \frac{1-e}{1+z}\right)}$$

Man ſetze $1 + z = u$, und zur Abkürzung $\frac{1-e}{e} = m$, ſo wird

$$\frac{\partial s}{a\sqrt{e}} = \frac{\partial u \sqrt{(1+e-eu)}}{\sqrt{(2-u)}} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{m}{u}\right)}$$

$$= \frac{\partial u (1+e-eu)}{\sqrt{(2+2e-(1+3e)u+eu^2)}} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{m}{u}\right)}$$

Man entwickele $\sqrt{\left(1+\frac{m}{u}\right)}$ nach dem binomiſchen Lehrſatze, ſo wird wenn man $\sqrt{(2+2e-(1+3e)u+eu^2)}$, um abzukürzen, $= V$ ſetzt

$$\frac{s}{a\sqrt{e}} = \frac{1+3e}{2}\int\frac{\partial u}{V} - e\int\frac{u\partial u}{V}$$

$$+ \left(\frac{5+3e}{8}\right) m \int\frac{\partial u}{uV}$$

$$- \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9+3e}{12}\right) m^2 \int\frac{\partial u}{u^2 V}$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\cdot\left(\frac{13+3e}{16}\right) m^3 \int\frac{\partial u}{u^3 V}$$

$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\left(\frac{17+3e}{20}\right) m^4 \int\frac{\partial u}{u^4 V}$$

$$+ \text{etc.}$$

wo die Integrale ſo zu nehmen ſind, daß ſie für $z=0$, alſo für $u = 1$ verſchwinden.

Es iſt

$$\frac{1+3e}{2}\int\frac{\partial u}{V} - e\int\frac{u\partial u}{V} = -\int\partial V$$

$$= \text{Const.} - V$$

$$= 1 - V.$$

Ferner

$$\int\frac{\partial u}{uV} = \int\frac{\partial u}{u\sqrt{(2+2e-(1+3e)u+eu^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \int \frac{\partial u}{u\sqrt{\left(\frac{2+2e}{e} - \frac{1+3e}{e} u + u^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+2e)}} \int \frac{\partial u \sqrt{\frac{2+2e}{e}}}{u\sqrt{\left(\frac{2+2e}{e} - \frac{1+3e}{e} u + u^2\right)}}$$

alſo nach (Integralformel, 77.) $\int \frac{\partial u}{Vu} =$

$$\frac{1}{\sqrt{(2+2e)}} \log \frac{2(2+2e)-(1+3e)u - 2\sqrt{(2+2e)}V}{u \times \text{const.}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+2e)}} \log \frac{3+e-(1+3e)z-2\sqrt{(2+2e)}V}{(1+z)(3+e-2\sqrt{(2+2e)})}$$

nach gehöriger Beſtimmung der Conſtante und Wiederherſtellung von z, wo denn $V = \sqrt{(1-z)(1-ez)}$.

Dieſes Integral, auf welches alle übrigen zurückgebracht werden, ſetze man $= L$.

Um die übrigen zu finden, differentiire man die Formel $\frac{V}{u^{p-1}}$, ſo wird

$$\partial . \frac{V}{u^{p-1}} = -\frac{(1+3e-2eu)\,du}{2u^{p-1}V} - \frac{(p-1)V\partial u}{u^p}$$

$$= -\frac{4(p-1)(1+e)-(2p-3)(1+3e)u+2(p-2)eu^2}{2u^pV}\partial u$$

Hieraus ergiebt ſich

$$\int \frac{\partial u}{u^pV} = -\frac{V}{2(p-1)(1+e)u^{p-1}}$$

$$+ \frac{(2p-3)(1+3e)}{4(p-1)(1+e)} \int \frac{\partial u}{u^{p-1}V}$$

$$- \frac{(p-2)e}{2(p-1)(1+e)} \int \frac{\partial u}{u^{p-2}V}.$$

Setzt man hier nach und nach $p = 2, 3, 4,$ u. ſ. w. ſo erhält man $\int \frac{\partial u}{u^2 V}$, $\int \frac{\partial u}{u^3 V}$, $\int \frac{\partial u}{u^4 V}$ u. ſ. f. durch $\int \frac{\partial u}{u V}$. Heißen die gehörig ergänzten Werthe jener Integrale M, N, P, u. ſ. f. ſo ergiebt ſich

$$M = \frac{1}{2(1+e)} - \frac{V}{2(1+e)(1+z)} + \frac{1+3e}{4(1+e)} \cdot L$$

$$N = \frac{1}{4(1+e)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 8} \cdot \frac{(1+3e)}{(1+e)^2}$$

$$- \frac{V}{4(1+e)(1+z)^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 8} \frac{(1+3e)}{(1+e)^2} \cdot \frac{V}{1+z}$$

$$+ \left\{ \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \frac{(1+3e)^2}{(1+e)^2} - \frac{e}{4(1+e)} \right\} L$$

$$P = \frac{1}{6(1+e)} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 12} \frac{(1+3e)}{(1+e)^2}$$

$$+ \frac{15 + 58e + 103e^2}{2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot (1+e)^3} - \frac{1}{6(1+e)} \cdot \frac{V}{1+z}$$

$$- \frac{1 \cdot 5 (1+3e)}{4 \cdot 12 (1+e)^2} \cdot \frac{V}{(1+z)^2}$$

$$- \frac{15 + 58e + 103e^2}{2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot (1+e)^3} \cdot \frac{V}{1+z}$$

$$+ \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{(1+3e)^3}{(1+e)^3} - \frac{1 \cdot 9 (1+3e) e}{4 \cdot 12 (1+e)^2} \right\} L$$

u. ſ. w.

Dadurch wird nun

$$\frac{s}{a\sqrt{e}} = 1 - V + \frac{(5+3e)(1-e)}{8e} L$$

$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{(9+3e)(1-e)^2}{12e^2} M$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot \frac{(13 + 3e)(1 - e)^3}{16e^3} N$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{(17 + 3e)(1 - e)^4}{20e^3} P$$

$$+ \text{etc.}$$

31. Verlangt man den elliptiſchen Quadranten, ſo iſt $z = 1$, und $V = 0$. Bezeichnet man alſo den Quadranten AMB (Fig. 22) durch E, ſo wird

$$\frac{E}{a\sqrt{e}} = 1 + \frac{(5 + 3e)(1 - e)}{8e\sqrt{(2+2e)}} \log \frac{1 - e}{3 + e - 2\sqrt{(2 + 2e)}}$$

$$- \frac{(3 + e)(1 - e)^2}{32e^2 (1 + e)}$$

$$- \frac{(3 + 10e + 3e^2)(1 - e)^2}{32e^2 \sqrt{(2 + 2e)^3}} \log \frac{1 - e}{3 + e - 2\sqrt{(2 + 2e)}}$$

$$+ \frac{(91 + 190e + 39e^2)(1 - e)^3}{2048e^3 (1 + e)^2}$$

$$+ \frac{(39 + 191e + 185e^2 + 33e^3)(1 - e)^3}{1024e^3 \sqrt{(2 + 2e)^5}} \times$$

$$\log \frac{1 - e}{3 + e - 2\sqrt{(2 + 2e)}}$$

$$- \text{etc.}$$

Da hier kein Geſetz der Fortſchreituug bemerkbar iſt, ſo hat man eine andere Reihe für E zu ſuchen. Dieſe erhält man ſo. Es iſt, wenn man Kürze halber die halbe große Axe der Ellipſe $a = 1$, ſetzt, aus (9)

$$E = \frac{\pi}{2} \Big\{ 1 - \frac{1}{2^2} e^2 - \frac{1^2}{2^2 . 4^2} . 3e^4$$

$$- \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} . 5e^6 - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2} . 7e^8 - \text{etc.} \Big\}$$

Nimmt man von dieſem Ausdrucke das erſte und zweyte Differential in Beziehung auf e, ſo wird

$$\frac{\partial E}{\partial e} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2^2}\cdot 2e + \frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot 3\cdot 4\,e^3 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot 5\cdot 6\,e^5 + \text{etc.}\right\}$$

$$\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot 3\cdot 4\cdot 3e^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot 5\cdot 6\cdot 5e^4 + \text{etc.}\right\}$$

Hieraus iſt

$$\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} + \frac{1}{e}\cdot\frac{\partial E}{\partial e} = -\frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{2^2}\cdot 3e^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot 5e^4 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot 7e^6 + \text{etc.}\right\}$$

Multiplicirt man hier mit $1 - e^2$, ſo wird

$$(1-e^2)\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} + \frac{1-e^2}{e}\cdot\frac{\partial E}{\partial e}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{2^2}\cdot e^2 - \frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot 3e^4 - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot 5\,e^6 - \text{etc.}\right\}$$

$$= - E.$$

Alſo iſt

$$(1-e^2)\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} + \frac{1-e^2}{e}\cdot\frac{\partial E}{\partial e} + E = 0.$$

Man ſehe jetzt E als eine Function von b, der halben kleinen Axe an, ſo muß man um die Differentialgleichung zwiſchen E und b zu erhalten, ſtatt $\frac{\partial\partial E}{\partial e^2}$

ſetzen $\frac{\partial e\,\partial\partial E - \partial E\,\partial\partial e}{\partial e^3}$ (Differentialgleichung. 16.).

Dadurch wird aus der vorigen Gleichung.

$$(1-e^2)\cdot\frac{1}{\partial e^2}\left(\frac{\partial e\,\partial^2 E - \partial E\,\partial^2 e}{\partial e}\right)+\frac{1-e^2}{e}\cdot\frac{\partial E}{\partial e} + E = 0.$$

Nun iſt

$$e^2 = 1 - b^2$$

alſo, ∂b conſtant genommen

$$\partial e = -\frac{b\,\partial b}{e}$$

$$\partial\partial e = -\frac{\partial b^2}{e^3}$$

folglich

$$\frac{1-e^2}{\partial e^2} = \frac{b^2}{\partial e^2} = \frac{e^2}{\partial b^2} = \frac{1-b^2}{\partial b^2}$$

$$\frac{\partial\partial e}{\partial e} = \frac{\partial b}{b e^2} = \frac{\partial b}{b(1-b^2)}$$

Hiermit erhält man aus der letzten Gleichung dieſe

$$(1-b^2)\frac{\partial\partial E}{\partial b^2} - \left(\frac{1+b^2}{b}\right)\frac{\partial E}{\partial b} + E = 0.$$

welche zur Entwickelung von E nach b dient. Um die Form der Reihe, welche E durch b darſtellt, zu beſtimmen, entwickele man die beiden erſten Glieder der Reihe in (31), indem man $e = \sqrt{(1-b^2)} = 1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{8}b^4 - \text{etc.}$ macht, bis zur zweyten Potenz von b, ſo findet man $E = 1 - \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}b^2 \log\frac{4}{b}$.

Man ſetze demnach $E = Q + R \log \frac{4}{b}$, wo Q und P zwey nach den Potenzen von b^2 fortſchreitende Reihen anzeigen, ſo iſt

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial Q}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial b} \log \frac{4}{b} - \frac{R}{b}$$

$$\frac{\partial\partial E}{\partial b^2} = \frac{\partial\partial Q}{\partial b^2} + \frac{\partial\partial R}{\partial b^2} \log \frac{4}{b} - 2 \frac{\partial R}{\partial b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{R}{b^2}.$$

Bringt man dieſe Werthe in die Differentialgleichung zwiſchen E und b, ſo entſtehen, weil die in $\log \frac{4}{b}$ multiplicirten Glieder für ſich o ſeyn müſſen, zur Beſtimmung von Q und R dieſe beiden Differentialgleichungen

$$(1 - b^2) \frac{\partial\partial R}{\partial b^2} - \left(\frac{1 + b^2}{b}\right) \frac{\partial R}{\partial b} + R = 0 \text{ (I)}$$

$$(1 - b^2) \frac{\partial\partial Q}{\partial b^2} - \left(\frac{1 + b^2}{b}\right) \frac{\partial Q}{\partial b}$$

$$- 2 \left(\frac{1 - b^2}{b}\right) \frac{\partial R}{\partial b} + Q + \frac{2R}{b^2} = 0 \text{ (II)}$$

Es ſey $R = \alpha b^2 + \beta b^4 + \gamma b^6 + \delta b^8 + \ldots$

ſo iſt $\frac{\partial R}{\partial b} = 2\alpha b + 4\beta b^3 + 6\gamma b^5 + 8\delta b^7 + \ldots$

$$\frac{\partial\partial R}{\partial b^2} = 2\alpha + 12\beta b^2 + 30\gamma b^4 + 56\delta b^6 + \ldots$$

wodurch aus der Gleichung (I) wird

$$(8\beta - 3\alpha)b^2 + (24\gamma - 15\beta)b^4 + (48\delta - 35\gamma)b^6 + \text{etc.} = 0,$$

alſo α unbeſtimmt bleibt. Man kennt deſſen Werth aber ſchon, welcher $\frac{1}{2}$ iſt, und hat nun, weil die in

b^2, b^4, b^6 u. ſ. w. multiplicirten Coefficienten o ſeyn müſſen,

$$\beta = \frac{3}{8}\alpha = \frac{1.3}{2.4}\alpha = \frac{1.1.3}{2.2.4}$$

$$\gamma = \frac{15}{24}\beta = \frac{3.5}{4.6}\beta = \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4\,4.6}$$

$$\delta = \frac{35}{48}\gamma = \frac{5.7}{6.8}\gamma = \frac{1.1.3.3.5\,5.7}{2.2.4.4.6.6.8}$$

u. ſ. w.

Um die Glieder der Reihen für R und Q leichter zuſammenziehen zu können, und weil überdies Q mit von R abhängt, ſetze man

$$Q = 1 + K'\alpha b^2 + K''\beta b^4 + K'''\gamma b^6 + K^{iv}\delta b^8 + \text{etc.}$$

Sucht man nun $\frac{\partial Q}{\partial b}$, $\frac{\partial\partial Q}{\partial b^2}$ und bringt die Werthe derſelben nebſt denen von $\frac{\partial R}{\partial b}$ und $\frac{R}{b^2}$ in (II), ſo erhält man zur Beſtimmung von K'', K''', u. ſ. w. $\left(K' \text{ kennt man ſchon, es iſt nämlich } K' = -\frac{1}{2}\right)$ folgende Gleichungen

$$8K''\beta - 3K'\alpha - 6\beta + 4\alpha = 0$$
$$24K'''\gamma - 15K''\beta - 10\gamma + 8\beta = 0$$
$$48K^{iv}\delta - 35K''\gamma - 14\delta + 12\gamma = 0$$

Da nun

$$8\beta = 3\alpha,\quad 24\gamma = 15\beta,\quad 48\delta = 35\delta$$

u. ſ. f. ſo wird

$$K'' = K' + \frac{6\beta - 4\alpha}{1.3\alpha}$$

$$K''' = K'' + \frac{10\gamma - 8\beta}{3.5\beta}$$

$$K^{IV} = K''' + \frac{14\delta - 12\gamma}{5 \cdot 7\gamma}$$

u. ſ. f.

wo das Geſetz der Fortſchreitung klar iſt. Entwickelt man die Werthe wirklich, ſo findet ſich,

$$K'' = K' - \frac{7}{12} = -\frac{13}{12} = -1 - \frac{1}{12}$$
$$= -1 - \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$K''' = K'' - \frac{7}{60} = K'' - \frac{1}{12} - \frac{1}{30}$$
$$= K'' - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6}$$

$$K^{IV} = K''' - \frac{43}{840} = K''' - \frac{1}{30} - \frac{1}{56}$$
$$= K''' - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

Bezeichnet man alſo die Coefficienten vom zweyten an K'', K''', K'''' . . . . durch A, B, C, D, ſo iſt

$$E = 1 + \frac{1}{2} b^2 \left(\log \left(\frac{4}{b}\right) - \frac{1}{2} \right)$$
$$+ \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} b^4 \left(\log \left(\frac{4}{b}\right) - 1 - \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$
$$+ \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} b^6 \left(\log \left(\frac{4}{b}\right) - A - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} \right)$$
$$+ \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} b^8 \left(\log \left(\frac{4}{b}\right) - B - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} \right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Euler hat dieſe Reihe für den Quadranten einer Ellipſe von großer Excentricität gegeben in einer Abhandlung de rectificatione ellipseos, welche die letzte

Stelle im 2ten Th. ſeiner Opusculorum varii argumenti einnimmt. Sein Verfahren, zu derſelben zu gelangen, iſt hier etwas vereinfacht. Will man a in die Reihen wieder einführen, ſo hat man nur $\frac{E}{a}$, $\frac{b}{a}$ ſtatt E, b zu ſetzen.

32. Die Rechnung für einen hyperboliſchen Bogen im Falle eines der Einheit ſehr nahe kommenden n, läßt ſich auf dieſelbe Art, welche in (30) für die Ellipſe gebraucht iſt, anſtellen. Wenn aber e an der Ellipſe oder n an der Hyperbel nicht ſehr nahe an 0 oder 1 fallen, ſo giebt es für die Berechnung eines elliptiſchen oder hyperboliſchen Bogens keine vorzüglichere Methode, als die von Lagrange, in (Integralformel, 81.) erwähnte, von welcher hier die Anwendung auf die Ellipſe nach Legendre gezeigt werden ſoll.

Das Element ∂s eines im Scheitel der kleinen Axe anfangenden elliptiſchen Bogens s iſt, wenn die große Axe $= 2$, und die Abſciſſe aus dem Mittelpuncte $x = \sin\varphi$ geſetzt wird, $= \partial\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin\varphi^2)}$. Da $e < 1$, ſo ſetze man noch $e = \sin\varepsilon$, ſo wird

$$\partial s = \partial\varphi \sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)} = \frac{\partial\varphi(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$$

Es ſey $$\frac{(1 + \cos\varepsilon)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}} = \sin\varphi'$$

ſo wird $$\frac{\cos\varphi^2 - \cos\varepsilon\sin\varphi^2}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}} = \cos\varphi'$$

wodurch alſo für $\sin\varepsilon = 1$, $\sin\varphi' = \sin\varphi$, $\cos\varphi' = \cos\varphi$ wird. Ferner giebt die Differentiation

$$\partial\varphi' = \frac{(1 + \cos\varepsilon)(\cos\varphi^2 + \cos\varepsilon\sin\varphi^2)\partial\varphi}{1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2}.$$

Man nehme noch $\frac{1 - \cos\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon} = \sin\varepsilon'$.

ſo wird

$$\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)} = \frac{\cos\varphi^2 + \cos\varepsilon \sin\varphi^2}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$$

Folglich

$$\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon' \sin\varphi'^2)}} = \frac{(1 + \cos\varepsilon)\,\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$$

und $\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$

$$= \frac{1}{1 + \cos\varepsilon} \cdot \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}}$$

weil

$$\sin\varepsilon' = \frac{(1 - \cos\varepsilon)(1 + \cos\varepsilon)}{(1 + \cos\varepsilon)^2} = \frac{\sin\varepsilon^2}{(1 + \cos\varepsilon)^2}.$$

Zur Beſtimmung von $\sin\varphi$ durch $\sin\varphi'$ erhält man folgende Gleichung $(1 + \cos\varepsilon)^2 \sin\varphi^4 - ((1 + \cos\varepsilon)^2 + \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2) \sin\varphi^2 = - \sin\varphi'^2$ welche, weil $\frac{\sin\varepsilon^2}{(1 + \cos\varepsilon)^2} = \sin\varepsilon'$, und $\frac{1}{1 + \cos\varepsilon} = \frac{1 + \sin\varepsilon'}{2}$, durch Diviſion mit $(1 + \cos\varepsilon)^2$ ſich in dieſe verwandelt $\sin\varphi^4 - (1 + \sin\varepsilon' \sin\varphi'^2) \sin\varphi^2 = - \frac{(1 + \sin\varepsilon')^2 \sin\varphi'^2}{4}$. Hieraus iſt

$$\sin\varphi^2 = \frac{1 + \sin\varepsilon' \sin\varphi'^2 - \cos\varphi' \sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}}{2}.$$

Der in das Radical multiplicirte Theil muß mit dem Vorzeichen — genommen werden, damit für

$\sin\varepsilon = 1$, wodurch auch $\sin\varepsilon' = 1$ wird, $\sin\varphi = \sin\varphi'$ werde.

Subſtituirt man den gefundenen Werth von $\sin\varphi^2$ und von $\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$ in dem Ausdrucke für ∂s, ſo wird $\partial s = \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon'}}{2} . \cos\varphi' \partial\varphi'$

$$+ \frac{\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon} . \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}} \times \left\{1 - \frac{\sin\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon' \sin\varphi'^2}{2}\right\}$$

Der erſte Theil hier iſt für ſich integrabel, der andere hängt von der Integration einer Formel, wie $\frac{(A - B\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$, welche die urſprüngliche unter ſich begreift, ab. Der Vortheil der vorgenommenen Reduction aber beſteht darin, daß $\sin\varepsilon'$ kleiner als $\sin\varepsilon$ iſt; denn es liegt zwiſchen den Gränzen $\frac{1}{4}\sin\varepsilon^2$ und $\sin\varepsilon^2$. Man würde alſo, wenn man den obigen zweyten Theil in eine Reihe auflöſte, und integrirte, in Abſicht auf $\sin\varepsilon'$ eine ſchnellere Convergenz erhalten, als vorher in Beziehung auf $\sin\varepsilon$. Allein man kann dieſe Reihenentwickelung erſparen. Man darf nämlich die obige Reduction nur aufs Neue bey dem zweyten Theile der Formel für ∂s anbringen, und dies Verfahren ſo lange wiederhohlen, bis man zu einem $\sin\varepsilon^{(m)}$ gekommen iſt, welcher klein genug iſt, um vernachläſſigt werden zu können, alsdann können, weil $\sin\varphi^{(m)2} < 1$, $(\sin\varepsilon^{(m)} \sin\varphi^{(m)})^2$ und

$$\frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon' \sin\varepsilon'' \ldots\ldots \sin\varepsilon^{(m)} \sin\varphi^{(m)2}}{2^m}$$

um ſo eher vernachläſſigt werden, und der letzte Theil

des Ausdrucks für ∂s wird $\partial \varphi^{(m)}$ multiplicirt in eine Conſtante; wodurch dann s ſelbſt ſehr leicht gefunden wird. Das ganze Verfahren wird ſogleich klärer werden. Man ſetze

$$\frac{(1 + \cos \varepsilon') \sin \varphi' \cos \varphi'}{\sqrt{(1 - \sin \varepsilon'^2 \sin \varphi'^2)}} = \sin \varphi''$$

$$\text{und } \frac{1 - \cos \varepsilon'}{1 + \cos \varepsilon'} = \sin \varepsilon''$$

ſo wird

$$\frac{\partial \varphi'}{\sqrt{(1 - \sin \varepsilon'^2 \sin \varphi'^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin \varepsilon''}}{\sin \varepsilon'} . \frac{\partial \varphi''}{\sqrt{(1 - \sin \varepsilon''^2 \sin \varphi''^2)}}$$

und $\sin \varphi'^2 =$

$$\frac{1 + \sin \varepsilon'' \sin \varphi''^2 - \cos \varphi'' \sqrt{(1 - \sin \varepsilon''^2 \sin \varphi''^2)}}{2}$$

auch

$$\partial s = \frac{\sin \varepsilon \sqrt{\sin \varepsilon'}}{2} \cos \varphi' \partial \varphi$$

$$+ \frac{\sin \varepsilon \sqrt{\sin \varepsilon' \sin \varepsilon''}}{4} \cos \varphi'' \partial \varphi''$$

$$+ \frac{\sqrt{\sin \varepsilon' \sin \varepsilon''}}{\sin \varepsilon \sin \varepsilon'} . \frac{\partial \varphi''}{\sqrt{(1 - \sin \varepsilon''^2 \sin \varphi''^2)}} \times$$

$$\left\{1 - \frac{\sin \varepsilon^2}{2} - \frac{\sin \varepsilon^2 \sin \varepsilon'}{4} - \frac{\sin \varepsilon^2 \sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \sin \varphi''^2}{4}\right\}$$

Macht man aufs Neue

$$\frac{(1 + \cos \varepsilon'') \sin \varphi'' \cos \varphi''}{\sqrt{(1 - \sin \varepsilon''^2 \sin \varphi''^2)}} = \sin \varphi'''$$

$$\frac{1 - \cos \varepsilon''}{1 + \cos \varepsilon''} = \sin \varepsilon''' \quad \text{und ſo fort,}$$

wo sinε, sinε', sin ε'', sin ε''' u. ſ. w. eine ſtark ab-nehmende Reihe bilden, ſo wird, wenn man die Gränze der Werthe $\varphi, \frac{1}{2}\varphi', \frac{1}{4}\varphi'', \frac{1}{8}\varphi''' \ldots$ durch Φ bezeichnet, durch Integration

$$s = \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon'}}{2} . \sin\varphi' + \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon' \sin\varepsilon''}}{4} \sin\varphi''$$
$$+ \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon' \sin\varepsilon'' \sin\varepsilon'''}}{8} \sin\varphi''' + \text{etc.}$$
$$+ KL\Phi. \text{ wo}$$

$$K = \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon} . \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon'} . \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'''}}{\sin\varepsilon''} \ldots\ldots$$

und

$$L = 1 - \frac{\sin\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon'}{4} - \frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon' \sin\varepsilon''}{8} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\sin\varepsilon^2}{4\sin\varepsilon'} \left(1 - \frac{\sin\varepsilon'^2 \sin\varepsilon''}{2} - \frac{\sin\varepsilon'^2 \sin\varepsilon'' \sin\varepsilon'''}{4} - \text{etc.}\right)$$

durch Zuſammenziehung der drey erſten Glieder iſt, und keine Conſtans hinzugefügt zu werden braucht, weil für $\varphi = 0$, auch $\varphi', \varphi'', \varphi''' \ldots = 0$ werden, und s verſchwindet.

Verlangt man den elliptiſchen Quadranten E, ſo iſt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und $\sin\varphi' = 0$, $\cos\varphi' = -1$, alſo $\varphi' = \pi$, ferner $\sin\varphi'' = 0$, $\cos\varphi' = 1$, und $\varphi'' = 2\pi$ zu nehmen, weil φ'' mit φ' zugleich wächſt vermöge der Gleichung

$$\partial\varphi'' = \frac{\sin\varepsilon'}{\sqrt{\sin\varepsilon''}} . \frac{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon''^2 \sin\varphi'')}}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi'^2)}} \partial\varphi'$$

worin die Radicalien poſitiv genommen werden.

Eben ſo wird $\varphi''' = 4\pi$ u. ſ. w. Demnach iſt die Gränze der Werthe $\frac{1}{2}\varphi'$, $\frac{1}{4}\varphi''$, $\frac{1}{8}\varphi'''$ u. ſ. w. $\frac{1}{2}\pi$ und es wird $E = \frac{1}{2}\pi KL$

33. Die Berechnung der Winkel φ', φ'' u. ſ. w. geſchieht am leichteſten nach den Formeln

$$\tang(\varphi' - \varphi) = \cos\varepsilon \tang\varphi$$
$$\tang(\varphi'' - \varphi') = \cos\varepsilon' \tang\varphi'$$

u. ſ. w. welche aus den obigen folgen. Es iſt nämlich

$$\tang\varphi' = \frac{(1 + \cos\varepsilon)\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi^2 - \cos\varepsilon\sin\varphi^2}$$
$$= \frac{\tang\varphi + \cos\varepsilon\tang\varphi}{1 - \cos\varepsilon\tang\varphi \,.\, \tang\varphi}.$$

Setzt man $\cos\varepsilon\tang\varphi = \tang\psi$, ſo iſt das Glied rechter Hand $= \tang(\varphi + \psi)$, alſo

$$\varphi' - \varphi = \psi$$
$$\text{oder } \tang(\varphi' - \varphi) = \cos\varepsilon\tang\varphi.$$

Den Winkel ψ hat man in demſelben Quadranten wie φ zu nehmen, weil das Verhältniß je zweyer Winkel der Reihe φ, φ', φ'', φ''', u. ſ. w., ſich dem von $1 : 2$ ohne Ende nähert.

Beyſpiel. Man verlangt den Quadranten einer Ellipſe, deren halbe große Axe $= 1$, halbe kleine $= \frac{1}{2}$, iſt, wie auch den Bogen, welcher der Abſciſſe $= \frac{4}{5}$ vom Mittelpuncte an gerechnet, entſpricht.

Hier iſt alſo $\cos\varepsilon = \frac{1}{2}$, mithin $\varepsilon = 60°$.

Dadurch ergiebt ſich vermöge der Formeln

sin

$$\sin\varepsilon' = \tang\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$\sin\varepsilon'' = \tang\frac{1}{2}\varepsilon'^2 \text{ u. ſ. w.}$$

$\varepsilon' = 19^\circ\ 28'\ 16'',39$; $\varepsilon'' = 1^\circ\ 41'\ 12''\ 75$; $\varepsilon''' = 0^\circ\ 0'\ 44''\ 71$; $\varepsilon^{IV} = 0^\circ\ 0'\ 0'',00$.

Hier iſt alſo

$$K = \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon}\cdot\frac{2\sqrt{\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon'}\cdot\frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'''}}{\sin\varepsilon''}$$

$$= \frac{8\sqrt{\sin\varepsilon'''}}{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}}$$

$$L = \frac{\sin\varepsilon^2}{4\sin\varepsilon'}\left(1 - \frac{\sin\varepsilon'^2\sin\varepsilon''}{2} - \frac{\sin\varepsilon'^2\sin\varepsilon''\sin\varepsilon'''}{4}\right)$$

und man erhält $\log K = 0,1376330$; $L = 0,5615801$ und damit $E = 1,211056 + .$

Ferner iſt $\sin\varphi = \frac{4}{5} = 0,8000000$ und dadurch findet ſich

$$\begin{array}{lllll} \varphi & = 53^\circ & 7' & 48'', & 37 \\ \varphi' & = 86 & 49 & 12, & 61 \\ \varphi'' & = 173 & 26 & 52, & 38 \\ \varphi''' & = 346 & 53 & 54, & 88 \\ \varphi^{IV} & = 2\varphi'''. \end{array}$$

Hier iſt alſo $\Phi = \frac{1}{16}\varphi^{IV} = \frac{1}{8}\varphi''' =$ $43^\circ\ 21'\ 44'',36 = 0,75681529$ in Theilen des Halbmeſſers.

Weiter erhält man

$$\frac{1}{2}\sin\varphi'\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'} = 0,2496151$$

$$\frac{1}{4}\sin\varphi''\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''} = 0,0023479$$

$$\frac{1}{8} \sin\varphi''' \sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon' \sin\varepsilon'' \sin\varepsilon'''} = -0{,}0000343$$

$$KL\Phi = 0{,}5834915$$

und dadurch $s = 0{,}8354202$

Die mechaniſchen Quadraturen geben mir E zwiſchen 1,2110553 und 1,2110561; den Bogen S findet Montucla (T. III. S. 203) nach Simpſons Annäherungsformel (Quadratur, 140.) = 0,828242. Es ſind dabey nur fünf Ordinaten gebraucht.

34. Man kann die Reihe der $\sin\varepsilon$ auch rückwärts fortſetzen, und dadurch s von dem Integrale $\int \frac{(A - B \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon \sin\varphi^2)}}$, wo $\sin\varepsilon$ ſo wenig als man will von Eins verſchieden iſt, abhängig machen. Da für $\sin\varepsilon = 1$, jenes Integral $= B \sin\varphi + (A - B) \times \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = B \sin\varphi + (A - B) \log \operatorname{tg} (45° + \frac{1}{2}\varphi)$, ſo erhält man hierdurch eine Annäherung zu dem wahren Werthe deſſelben, wofern nur $\cos\varepsilon \sin\varphi$ gegen $\cos\varphi$ vernachläſſigt werden kann. Wir ſind gezwungen, wegen der weitern Ausführung und Entwickelung auf Legendre's Exercices de Calcul intégral. Paris. 1811. zu verweiſen, wo dieſer Gegenſtand umſtändlich behandelt iſt. Man findet daſelbſt auch die Anwendung der Lagrangiſchen Methode auf die Hyperbel, indem der Unterſchied eines hyperboliſchen Bogens von dem Stücke der Berührenden an dem Endpuncte deſſelben, welches von dem Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Berührende abgeſchnitten wird, durch eine Reihe, wie hier für den elliptiſchen Bogen gegeben iſt, dargeſtellt wird.

35. Die elliptiſchen und hyperboliſchen Bogen bilden eine eigene Klaſſe tranſcendenter Größen, da ſie aus einer unendlichen Reihe Glieder beſtehen, deren je-

des ſelbſt wiederum eine unendliche Reihe giebt. Man kann ſie als die nächſte Gattung der Transcendenten nach den Kreis- und logarithmiſchen Functionen anſehen. Maclaurin und d'Alembert haben ſich zuerſt damit beſchäftigt, die Integralformeln aufzuſuchen, welche ſich auf die Rectification elliptiſcher und hyperboliſcher Bogen bringen laſſen, jener in dem Treatiſe of Fluxions. §. 798 u. folgg., dieſer in den Berliner Memoiren für 1746 und in ſeinen Opuscules. Nachher hat Euler dieſen Gegenſtand in den Nov. Comment. Petrop. T. X. behandelt. Landen entdeckte den merkwürdigen Satz, daß ein hyperboliſcher Bogen ſich vermittelſt zweyer elliptiſchen Bogen zuſammenſetzen läßt. Philosophical Transactions 1775. Dadurch werden die Integrale, welche Maclaurin und d'Alembert für ſolche, die von der Rectification der Hyperbel abhängen, erklärt hatten, allein von der Rectification der Ellipſe abhängig. Legendre erwies in den Mém. de l'Acad. de Scienc. 1786. Landens Satz auf eine einfachere Art, als dieſer ſelbſt gethan hatte, und zeigte, daß ſich die Rectification irgend einer Ellipſe, immer auf die Rectification zweyer andern, davon die eine der geraden Linie, die andere dem Kreiſe ſo nahe kommt als man will, bringen laſſe. M. ſ. die vorhin angeführten Exercices de Calc. intégral.

36. Die Parabel, welche den Übergang von der Ellipſe zu der Hyperbel macht, iſt durch eine einfache logarithmiſche Formel rectificabel. Ihre einfachſte Gleichung iſt, $ax = yy$, alſo ihre Differentialgleichung, $a\partial x = 2y\partial y$. Daher iſt das Differential des Bogens, $\partial s = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{4yy}{aa}\right)}$. Man ſetze

$\frac{2y}{a} = u$, ſo iſt $\partial y = \frac{1}{2} a\partial u$, und

$\partial s = \frac{1}{2} a\partial u \sqrt{(1 + uu.)}$ Daraus iſt (Integral.

formel, 69. 50.)

$$s = \frac{1}{4} au \sqrt{(1 + uu)} + \frac{1}{4} a \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1 + uu)}}$$

und ferner

$$s = \frac{1}{4} au \sqrt{(1 + uu)} + \frac{1}{4} a \log (\sqrt{(1 + uu)} + u),$$

wo die Conſtante in beiden Theilen = o iſt, weil der Bogen in dem Scheitel anfangen ſoll, wo u = o iſt.

Für u deſſen Werth zurückgeſetzt, iſt

$$s = \frac{y}{2a} \sqrt{(aa + 4yy)} + \frac{1}{4} a \log. \frac{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y)}{a}.$$

37. Für die Ordinate y deren Werth $\sqrt{ax}$ geſetzt, iſt

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{(ax + 4xx)} + \frac{1}{8} a \log. \frac{a + 8x + 4\sqrt{(ax + 4xx)}}{a}.$$

Es iſt von der Zahl des Logarithmen das Quadrat genommen, und dagegen der Logarithme halbirt.

Dieſes Integral findet man auch unmittelbar, wenn man ∂s durch ∂x und x ausdrückt. Es iſt

$\partial y = \frac{1}{2} \partial x \sqrt{\frac{a}{x}}$, und $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{a}{4x}\right)}$

$= \frac{1}{2} \partial x \sqrt{\frac{a + 4x}{x}} = \frac{1}{2} . \frac{(ax + 4x) \partial x}{\sqrt{(ax + 4xx)}}$. Das Integral wird, nach Abſonderung des Differentials

$\frac{1}{2} \partial . \sqrt{(ax + 4xx)}$ aus Integralformel, 56. gefunden.

38. Es ſey an der Parabel (Fig. 11.) PM = y, QN = z, ſo iſt der Bogen

$$MN = \frac{z}{2a} \sqrt{(aa + 4zz)} - \frac{y}{2a} \sqrt{(aa + 4yy)}$$
$$+ \frac{1}{4} a \log . \frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y}.$$

Rectification einiger andern krummen Linien.

39. Die Curve ſey eine paraboliſche, deren Gleichung iſt $x = ry^n$, wo n eine ganze oder gebrochene Zahl iſt, und die Größen als Zahlen betrachtet werden. Es iſt $\partial x = nry^{n-1}dy$, und das Differential des Bogens $\partial s = \partial y \sqrt{(1 + n^2r^2y^{2n-2})}$. Das Integral iſt algebraiſch, wenn $1 = 2k(n - 1)$ iſt, wo k eine ganze poſitive Zahl bedeutet. Denn es iſt, zufolge Integralformel, 59, das Integral, $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$, algebraiſch, wenn $m = (k+1)n$ iſt, wo k eine ganze poſitive Zahl iſt. Es muß alſo in unſerm Differential, wo $m = 1$ iſt, und $2n - 2$ ſtatt des Exponenten n ſteht, das Reciprokum von $n-1$ eine gerade Zahl ſeyn. Das iſt es, wenn $n = \frac{2m+1}{2m}$ iſt, alſo, wenn n die Werthe $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}$, u. ſ. f. hat.

40. Es ſey $n = \frac{3}{2}$, ſo iſt $x = ry^{\frac{3}{2}}$, oder $x^2 = r^2y^3$, und wenn die Gleichung homogen gemacht wird, $ax^2 = y^3$, wo nun a, x, y gerade Linien bedeuten. Die krumme Linie iſt die Evolute der gemeinen Parabel, (Evolute, 6.), gewöhnlich die parabola semicubicalis, auch cubica secunda genannt.

Es iſt für dieſelbe $\partial s = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{y}{a}\right)}$.

Daher $s = \frac{8}{27} a \left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} a.$

41. Es ſey $n = \frac{5}{4}$ ſo iſt die Gleichung für die Curve, $x^4 = r^4 y^5$, oder $ax^4 = y^5$, wo a ſtatt $\frac{1}{r^4}$ geſetzt iſt. Nun iſt

$$\partial s = \left(1 + \frac{25}{16}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial y.$$

Man ſetze $\frac{y}{a} = u$, und behalte n^2 für $\frac{25}{16}$,

ſo iſt $\partial s = a\,(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,\partial u$.

Die Vergleichung mit der Formel IV. a. a. O. giebt

$$s = \frac{4a}{5n^2}\,u^{\frac{1}{2}}\,(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{2a}{5n^2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,\partial u.$$

Ferner iſt

$$\int u^{-\frac{1}{2}}\,(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,\partial u = \frac{4}{3n^2}(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}.$$

Folglich iſt

$$s = \left(\frac{4a}{5n^2}\,u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{n^4}\right)(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man für u ſeinen Werth zurück, ſo iſt

$$s = \left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\sqrt{ay} - \frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 a\right) \times$$

$$\left(1 + \frac{25}{16}\cdot\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5 a,$$

wenn s für $y = 0$ verſchwinden ſoll.

42. Iſt aber $n = \frac{2m}{2m - 1}$, ſo iſt

$2n - 2 = \frac{2}{2m - 1}$, und das Reciprokum davon iſt keine ganze Zahl. Das Integral iſt nun theils algebraiſch theils logarithmiſch. Man ſetze $y^{2n-2} = u^2$, oder $y^{n-1} = u$, alſo $y = u^{1:(n-1)}$, und $\partial y = \frac{1}{n-1} u^{(-n+2):n-1} \partial u = (2m - 1) u^{2m-2} \partial u$. Nun iſt $\partial s = (1 + n^2 r^2 y^{2n-2})^{\frac{1}{2}} \partial y = (2m - 1) u^{2m-2} \times (1 + n r u^2)^{\frac{1}{2}} \partial u$. Bey der ſucceſſiven Integration nach Integralformel IV. 59. wird der Exponent des Factors u^{2m-2} jedesmahl um 2 vermindert, und ſo kommt man zuletzt auf das Differential $(1 + n^2 r^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \partial u$, wovon das Integral iſt $\frac{1}{2} u (1 + n^2 r^2 u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1 + n^2 r^2 u^2)}}$, (a. a. O. 69). Der zweyte Theil iſt logarithmiſch (a. a. O. 50.).

43. Die paraboliſchen Linien, deren Bogen ſich auf Logarithmen bringen laſſen, ſind alſo diejenigen, für welche iſt $ax = yy$; $ax^3 = y^4$; $ax^5 = y^6$, und ſo fort.

44. Exempel. Es ſey $n = \frac{4}{3}$, alſo $ax^3 = y^4$. Nun iſt $\partial s = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{16}{9} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$. Man ſetze $y^{\frac{1}{3}} = u$, alſo $y = u^3$; $\partial y = 3u^2 \partial u$; auch ſey $\frac{16}{9} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = b$, ſo iſt $\partial s = 3u^2 (1 + bu^2)^{\frac{1}{2}} \partial u$. Daraus iſt (Integralformel, 69.).

$$s = \frac{3}{4} u^3 (1 + bu^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \int \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(1 + bu^2)}},$$

Ferner iſt (eb. daſ. 61.),

$$\int \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(1+bu^2)}} = \frac{1}{2b} u \sqrt{(1+bu^2)}$$
$$- \frac{1}{2b} \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1+bu^2)}}$$

und $$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(1+bu^2)}},$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{\partial u \sqrt{b}}{\sqrt{(1+bu^2)}} = \log.(\sqrt{(1+bu^2)} + u\sqrt{b}).$$

Aus dieſen Werthen folgt

$$s = \frac{3}{4} \left(u^3 + \frac{1}{2b} u\right) \sqrt{(1+bu^2)}$$
$$- \frac{3}{8\sqrt{b^3}} \log.(\sqrt{(1+bu^2)} + u\sqrt{b}),$$

wo die Conſtante Null iſt. Setzt man den Werth für u zurück, ſo iſt

$$s = \frac{3}{4}\left(y + \frac{9}{32}(a^2 y)^{\frac{1}{3}}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{16}{9}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} -$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^4 a \log\left(\sqrt{\left(1 + \frac{16}{9}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} + \frac{4}{3}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

45. Wenn der Exponent n eine andere Form als die beiden hier betrachteten hat, ſo iſt die Differentialformel für ∂s nicht integrirbar, und das Integral läßt ſich auch nicht auf ein logarithmiſches bringen. Denn, wenn man $y^{n-1} = u$ ſetzt, ſo wird

$$\partial s = \frac{1}{n-1} u^{\frac{-(n-2)}{n-1}} \partial u \sqrt{(1 + n^2 r^2 u^2)}, \text{ wo}$$

$\frac{n-2}{n-1}$ keine ganze durch 2 theilbare Zahl werden kann,

außer, wenn $n = \frac{2m}{2m - 1}$ iſt.

46. Die paraboliſche Linie, deren Gleichung iſt $ax^2 = y^3$, iſt die erſte, welche rectificirt worden iſt, von einem engliſchen Mathematiker, Wilhelm Neil. Er machte ſeine Entdeckung, die viel Aufſehens erregte, im Jahre 1657 bekannt. Der Beweis, den er davon gegeben hat, ſteht in Wallis Abhandlung über die Cykloide und Ciſſoide, in einem Anhange, Operum, T. I. p. 557. Es iſt ſehr undeutlich. Eben daſelbſt befinden ſich auch die Beweiſe von Brouncker und von Wallis ſelbſt. Wallis hatte es als ein Mittel vorgeſchlagen, für eine krumme Linie zwey gerade zu finden, zwiſchen welchen ihre Länge enthalten ſey, daß man die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate von dem Unterſchiede zweyer Abſciſſen und Ordinaten, das iſt $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, berechnen, und eine Anzahl ſolcher Wurzeln an dem gegebenen Bogen ſummiren ſollte. Arithm. Infin. Scholion. Prop. 38. Es kann ſeyn, daß durch dieſe Bemerkung Neil auf ſeine Methode der Rectification geführt iſt.

Von Hevraet fand um dieſelbe Zeit mit Neil die Rectification der Curven auf eine andere und allgemeinere Art. Er bringt die Rectification einer gegebenen Curve auf die Quadratur einer andern. Neil fand, wie Craige bemerkt, (Methodus figurarum p. 30.), nicht die Rectification einer gegebenen Curve, ſondern gab eine krumme Linie an, die ſich rectificiren läßt. Hevraet gründet gründet ſeine Rectification auf folgenden Satz. Wenn an einer Curve eine Ordinate ſich zu der Normale verhält, wie eine gegebene gerade zu der Ordinate an einer zweyten Curve, ſo iſt die Fläche dieſer letztern gleich dem Rechteck von jener gegebenen geraden und einer geraden, die dem Bogen der erſtern von einem gegebenen Puncte an gleich iſt. Er führt die parabola ſemicubicalis zum Beyſpiele an,

auch die andern abſolut rectificabeln Parabeln, und bemerkt, daß die Rectification der gemeinen Parabel von der Quadratur der Hyperbel abhängt. Sein Aufſatz iſt der Schootenſchen Ausgabe von Cartesii Geometria beygefügt. Zur Erläuterung ſeiner Methode dient das folgende.

Es iſt die Normale an einer Curve A $= \sqrt{\left(y^2 + \left(\frac{y\partial s}{\partial x}\right)^2\right)} = \frac{y\partial s}{\partial x}$. An der Curve B ſey die Ordinate $= z$, und $y : \frac{y\partial s}{\partial x} = a : z$, alſo $z = \frac{a\partial s}{\partial z}$, und $z\partial x = a\partial s$. Daher iſt die Area der Curve B oder $\int z\partial x = as$.

Huygens ſchreibt die erſte Rectification dem Hevraet zu. Neil habe ſie nicht vollſtändig gekannt. Denn er habe nicht gewußt, daß die von ihm rectificirte Linie den Geometern längſt bekannt geweſen war. Er eignet ſich einen Antheil an Hevraets Erfindung zu, weil er im Jahre 1657 die Länge der apolloniſchen Parabel durch die Quadratur der Hyperbel beſtimmt, auch Hevraet die zu gleicher Zeit von ihm gefundene Complanation des paraboliſchen Konoids erfahren habe, wodurch er auf die Ausmeſſung des paraboliſchen Bogens habe kommen können. Dieſes ſcheint ſehr geſucht zu ſeyn. (Horolog. oscill. P. III. Prop. 9.)

Um dieſelbe Zeit fand Fermat, nach einer ihm eigenen Methode, auch die Rectification der ſemicubiſchen Parabel. Sein Aufſatz kam 1650 mit einer Schrift des Jeſuiten Lalouere über die Cykloide heraus; iſt auch in ſeinen Werken befindlich. Er ſucht das Verhältniß zwiſchen dem Stück auf einer berührenden von dem Berührungspuncte an bis an den

Durchſchnitt mit einer folgenden Ordinatenlinie, und dem zugehörigen Unterſchiede der Abſciſſen. In eben dieſer Schrift zeigt er auch, wie durch ſolche Abſchnitte auf den berührenden zwey Gränzen für die Länge der Curve gefunden werden.

47. Für die Ciſſoide iſt die Gleichung, $\frac{x^3}{a-x} = y^2$, oder $x\left(\frac{a}{x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = y$. Hieraus iſt die Differentialgleichung für dieſelbe,

$$\partial y = \left(\frac{a}{x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \partial x$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{a\partial x}{x}.$$

$$= \left(\frac{3a - 2x}{2x}\right)\left(\frac{a - x}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} . \partial x.$$

Ferner iſt

$$\partial s^2 = \left(\frac{(3a - 2x)^2 x}{4(a-x)^3} + 1\right) \partial x^2$$

$$= \frac{4a^3 - 3a^2 x}{4(a-x)^3} \partial x^2.$$

$$\partial s = \frac{a\partial x}{2(a-x)} \sqrt{\frac{4a - 3x}{a - x}}.$$

Dieſe Formel zu integriren, ſetze man nach Integralformel, 48. II. $\frac{4a - 3x}{a - x} = uu$, ſo iſt $4a - auu = 3x - xuu$, oder weil uu größer als 4 iſt, $a(uu - 4) = (uu - 3)x$, alſo $x = \frac{a(uu - 4)}{uu - 3}$; $a - x = \frac{a}{uu - 3}$. Aus der letztern Gleichung folgt etwas leichter als aus dem Werthe von x, daß $\partial x = \frac{2au\partial u}{(uu-3)^2}$.

Folglich iſt $\partial s = \frac{au^2 \partial u}{uu-3}$. Da die höchſte Potenz von u im Zähler dieſelbe iſt, wie im Nenner, ſo ſondere man durch die Diviſion einen Theil des Differentials ab, damit der Zähler niedriger als der Nenner werde, nach Integralformel, 35. Es iſt

$$\partial s = a\partial u + \frac{3a\partial u}{uu-3},$$

oder

$$\partial s = a\partial u + \frac{3a\partial u}{(u+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}.$$

Daher iſt (Integralformel, 8.),

$$s = au + \frac{a\sqrt{3}}{2} \log . \frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}} + \text{Const.}$$

Die Curve fange an für $x = 0$, ſo iſt $u = 2$ für dieſen Werth von x, und Const =

$$-2a - \frac{a\sqrt{3}}{2} \log . \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Alſo iſt

$$s = a(u-2) + \frac{a\sqrt{3}}{2} \log . \frac{(2+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})}$$

oder

$$s = a(u-2) + a\sqrt{3} . \log . \frac{(2+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}{\sqrt{(u^2-3)}}.$$

Setzt man für u ſeinen Werth durch x, ſo wird der Bogen unmittelbar durch die Abſciſſe erhalten. Für $x = \frac{1}{2} a$ iſt s der innerhalb des Quadranten enthaltene Bogen der Ciſſoide, und $u = \sqrt{5}$. Alſo iſt dieſer Bogen

$$= a(\sqrt{5}-2) + a\sqrt{3} . \log . \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

Newtons künſtliche Conſtruction ſehe man nach in deſſelben Methodus flux et ser infin Probl. XII. exempl. 5. Sie gewährt aber nicht die Überſicht wie die Rechnungsformel.

48. Für die logarithmiſche Linie iſt die Subtangente eine beſtändige Linie, oder es iſt $\frac{y\partial x}{\partial y}$ $= a$. Daraus

$$\partial s = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{aa}{yy}\right)} = \frac{\partial y \sqrt{(aa + yy)}}{y}.$$

Die Integration giebt

$$s = \sqrt{(aa + yy)} + a^2 \int \frac{\partial y}{y \sqrt{(aa + yy)}},$$

und

$$\int \frac{\partial y}{y \sqrt{(aa + yy)}} = \frac{1}{a} \log . \frac{\sqrt{(aa + yy)} - a}{y}.$$

Alſo iſt

$$s = \sqrt{(aa + yy)} + a \log . \frac{\sqrt{(aa + yy)} - a}{y} + C.$$

In dem Anfange des Bogens ſey die Ordinate $= b$, ſo iſt

$$\text{Const.} = -\sqrt{(aa + bb)} - a \log . \frac{\sqrt{(aa + bb)} - a)}{b}.$$

49. So wie die Rectification des Kreiſes von keiner andern krummen Linie abhängt, ſo hängt auch die Rectification der logarithmiſchen Linie blos von ihr ſelbſt ab.

50. Eine gegebene gerade Linie bewege ſich innerhalb eines rechten Winkels ſo, daß ſie mit ihren Endpuncten die Schenkel deſſelben treffe, ſo iſt die

Gleichung für die Curve, welche ſie ſtetig berührt, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Dieſe Curve iſt rectificabel.

Denn es iſt die Differentialgleichung, $x^{-\frac{1}{3}}\partial x + y^{-\frac{1}{3}}\partial y = 0$, oder $y^{\frac{1}{3}}\partial x + x^{\frac{1}{3}}\partial y = 0$, alſo $\partial y = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\partial x$, und $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$ oder $\partial s = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\partial x = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}\partial x$. Folglich iſt $s = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \text{Const.}$ Läßt man den Bogen und die Abſciſſen x zugleich anfangen, ſo iſt Const. $= 0$, und $s = \frac{3}{2}(ax^2)^{\frac{1}{3}}$.

Drückt man ∂s durch ∂x aus, ſo iſt $\partial s = -\partial y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$, weil y abnimmt, wenn x und daher auch s zunehmen. Oder, $\partial s = -a^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}}\partial y$. Daher $s = \text{Const.} - \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a - \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$. Es iſt nämlich $y = a$, wenn $x = 0$ und $s = 0$ ſind.

Am Ende dieſes Artikels folgt die Herleitung der Gleichung für die Curve aus der gemachten Bedingung.

51. Die Evolute der Ellipſe hat die Gleichung $\left(\frac{ax}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{aa - bb}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$ wo x die Abſciſſe auf der größern Axe von dem Mittelpuncte aus, y die Ordinate, und a, b, die halben Axen ſind. (Tempelhofs Analyſis des Unendlichen §. 691. de

Prasse dissert. de ellipseos evoluta, cet. §. III.).

Zur Abkürzung ſetze man $\frac{aa-bb}{b} = c$ und $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = m$, ſo iſt

$$mx^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung differentiirt giebt

$$mx^{-\frac{1}{3}}\partial x + y^{-\frac{1}{3}}\partial y = 0,$$

alſo iſt

$$\partial y = -m\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\partial x,$$

und

$$\partial s = \partial x\sqrt{\left(1+m^2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)},$$

oder

$$\partial s = \partial x\sqrt{\left(1-m^3+m^2\left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)},$$

oder

$$\partial s = \partial x\left(1-m^3+m^2c^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dieſe Differentialformel iſt integrirbar zufolge der Bemerkung in Integralformel. 60. II. In der Formel III. §. 69. daſ. iſt für den gegenwärtigen Fall $m + np + n = 0$, und es iſt

$$s = \frac{1}{1-m^3}\,x\left(1-m^3+m^2c^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

oder

$$s = \frac{1}{1-m^3}\left((1-m^3)x^{\frac{2}{3}}+m^2c^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Fängt der Bogen mit der Abſciſſe x an, ſo iſt Const $= -\frac{m^3}{1-m^3}\,c.$

Die Evolute der Ellipſe beſteht aus vier gegen ihren Mittelpunct convexen, gleich großen und ähnli-

chen Bogen, die in vier Spitzen zuſammenlaufen. Die Curve in (45.) eben ſo.

52. Die Rectification der Cykloide und der Epicykloide iſt bey dieſen Linien vorgetragen. Die Cykloide iſt gleich nach der ſemicubiſchen Parabel von Wren rectificirt worden.

53. Die Rectification einer ſphäriſchen Epicykloide (Th. II. S. 129.) hängt von der Quadratur der Hyperbel ab. Hermann glaubte, daß ſie abſolut rectificabel ſey. Comm. vet. Ac. Petr. T. I. p. 215. Er hatte ſich übereilt. Joh. Bernoulli zeigte den Fehler in einer Abhandlung über dieſe Epicykloide, Opp. T. III. p. 216. Euler hat in den Comm. nov. Petrop. die Bedingungen angegeben, welche die Rectification einer Curve auf der Kugelfläche vorausſetzt.

54. Beyſpiele von Rectificationen, wo die Ordinaten aus einem Puncte ausgehen, in den Artikeln: Conchoide und Spirale.

Allgemeine Annäherungsmethode.

55. Lambert hat in dem zweyten Theile ſeiner Beyträge zur Mathematik eine Annäherungsformel für die Länge eines Bogens angegeben. Es ſey AM (Fig. 23.) ein Bogen einer Curve, an welcher in A und M die berührenden AT, MT gezogen ſind. Auf AT, der verlängerten, nehme man die Abſciſſen, und ziehe MP darauf ſenkrecht, ziehe auch die Chorde AM, ſo iſt nahe der Bogen $AM = \frac{1}{4}(AT + TM + 2AM)$

Es iſt nämlich, wenn $AP = x$, $PM = y$ geſetzt wird, die Chorde $AM = \sqrt{(xx + yy)}$; die Subtan=

tangente PT $= \frac{y\partial x}{\partial y}$; das Stück AT $= x - \frac{y\partial x}{\partial y}$; die berührende TM $= y\sqrt{\left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 1\right)}$; und der Bogen AM $= \int \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$. Dieſe Werthe entwickele man nach dem binomiſchen Lehrſatze. Dann nehme man für die Curve die allgemeine Gleichung, $y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 +$ etc., wo die Glitder, wie $A + Bx$, nicht vorhanden ſind, weil $y = 0$ für $x = 0$ iſt, und weil die Abſciſſenlinie zugleich eine berührende iſt. Denn dadurch iſt der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = 0$ auch $= 0$. Aus dieſer Gleichung wird der Werth des Bogens AM hergeleitet. Vergleicht man dieſen mit den Werthen von AT, TM, AM (der Chorde), ſo ergiebt ſich die angegebene Formel. Nur iſt noch nöthig, aus der gegebenen Gleichung zwiſchen andern Coordinaten die Werthe von AT, MT und AM herzuleiten.

56. Ein Bogen einer krummen Linie läßt ſich auch mit einem Bogen eines Kreiſes vergleichen. Euler hat dieſes gezeigt, in einer Abhandlung de reductione linearum curvarum ad arcus circulares. Comm. Nov. Ac. Petrop. T. II. Es ſey (Fig. 24.) AB eine krumme Linie, MN ein Bogen derſelben, an welchen in M und N die berührenden MT, NT gezogen ſind, und die Normalen MP, NP, welche ſich in P ſchneiden. Man ziehe noch die Chorde MN, ſo iſt Bogen MN $>$ Chorde MN und $<$ MT + TN. Es ſey MP $= p$, PN $= q$, der Winkel MPN, die Amplitude des Bogens MN, $= v$, ſo iſt

$$MN = \sqrt{(p^2 + q^2 - 2pq \cos v)}$$

Q

$$= \sqrt{\left((p^2+q^2)\left(\sin\frac{1}{2}v^2 + \cos\frac{1}{2}v^2\right) - 2pq\left(\cos\frac{1}{2}v^2 - \sin\frac{1}{2}v^2\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\left((p+q)^2 \sin\frac{1}{2}v^2 + (p-q)^2 \cos\frac{1}{2}v^2\right)},$$

alſo $MN > (p+q)\sin\frac{1}{2}v$, folglich um ſo mehr Bogen $MN > (p+q)\sin\frac{1}{2}v$. Ferner iſt

$(p+q)\sin\frac{1}{2}v = MN\cos\frac{1}{2}(PNM - PMN)$ $= MN\cos\frac{1}{2}(TMN - TNM)$, wegen der rechten Winkel bey M und N, $= (MT + TN)\sin\frac{1}{2}MTN$ $= (MT + TN)\cos\frac{1}{2}v$, alſo $MT + TN =$ $(p+q)\tang\frac{1}{2}v$, und Bogen $MN < (p+q)\,tg\frac{1}{2}v$. Daher iſt für mäßige Winkel der Bogen MN nahe $= \frac{1}{2}v(p+q)$, das iſt, einem Kreisbogen, der innerhalb des Winkels v mit dem Halbmeſſer $\frac{1}{2}(p+q)$ beſchrieben iſt. Euler führt dieſes viel weiter aus, und macht Anwendungen davon auf die Ellipſe, für deren Umfang Joh. Bernoulli ein Paar Gränzen angegeben hatte, (Oper. T. I. p. 447), auf die Parabel und die Cykloide. Mayer hat dieſe Annäherungsmethode an die Länge eines Bogens einer krummen Linie in

ſeiner practiſchen Geometrie Th. V. §. 58 zur Anwendung etwas bequemer dargeſtellt. Man bedarf aber ihrer in der That ſo wenig, als der Lambertſchen, da man durch die mechaniſchen Quadraturen unmittelbarer und kürzer eben das finden kann, was man durch jene Annäherungsmethode erhält. So findet man z. B., indem man das Integral $\int d\varphi\, \sqrt{(1 - e^2 \sin\varphi^2)}$, welches den Bogen einer Ellipſe darſtellt, als die Area einer Curve, deren Abſciſſe $x = \varphi$, Ordinate $y = \sqrt{(1 - e^2 \sin\varphi^2)}$ betrachtet, daß, wenn man den Quadranten oder rechten Winkel $\frac{\pi}{2}$ in $2n$ gleiche Theile theilt, und alsdann die Ordinaten $y^{(0)}$ und $y^{(2n)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... $y^{(2n-1)}$, welche den Werthen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$, ferner den gefundenen Theilen entſprechen, berechnet, der elliptiſche Quadrant zwiſchen den Gränzen

$$\frac{1}{2n}\pi\,(y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + \ldots + y^{2(n-1)})$$

und

$$\frac{1}{2n}\pi\left(\frac{1}{2}y^{(0)} + y^{(2)} + y^{(4)} + \ldots + \frac{1}{2}y^{(2n)}\right)$$

unter denen jene die größere, dieſe die kleinere iſt, enthalten ſey, welches das Theorem von Joh. Bernoulli iſt.

Formen rectificabler Curven.

57. So wie man Formen für quadrirbare Curven geſucht hat, ſo hat man auch Formen für rectificable Curven geſucht. Die Sache iſt wegen der Irrationalität des Elements einer krummen Linie ungleich ſchwerer. Man muß unbeſtimmte Functionen einer dritten veränderlichen Größe einführen, durch welche die Coordinaten, x, y, der geſuchten Linie ausgedruckt werden. Aus den beiden Werthen von x und y läßt ſich

die eingeführte Größe wegſchaffen, wodurch eine Gleichung zwiſchen x und y erhalten wird.

58. Euler hat zuerſt allgemeine Formeln für die Rectiſication angegeben, eine, worin zwey unbeſtimmte Differentialfunctionen einer dritten veränderlichen Größe enthalten ſind, und eine noch allgemeinere, die aus dreyen beſteht, in den ältern Petersburger Commentarien, T. V. a. a. 1730. 31. Die Analyſis hat er nicht beygefügt.

59. Die Coordinaten der rectificabeln Linie seyn x, y, der zugehörige Bogen, s, ſo iſt $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Man ſetze $\partial y = p\partial x$, ſo iſt $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + p^2)}$. wobey angenommen werde, daß ∂s und ∂x gleichnamig ſeyn, oder daß der Bogen mit den poſitiven Abſciſſen zugleich zunehme. Der allgemeine Ausdruck für die Ordinate iſt $y = \int p\partial x$, oder $y = px - \int x\partial p$, (Th. II. S. 783.). Eben ſo iſt

$$s = x\sqrt{(1 + p^2)} - \int \frac{xp\partial p}{\sqrt{(1 + p^2)}}.$$

Die beiden Integralformeln ſehe man als Functionen einer dritten veränderlichen Größe u an, und ſetze

$$\int x\partial p = P; \int \frac{xp\partial p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = Q; \text{ ſo iſt}$$

$$x = \frac{\partial P}{\partial p}; \; y = px - P; \; s = x\sqrt{(1+p^2)} - Q,$$

wo die Conſtante noch zu beſtimmen iſt, damit s für einen gewiſſen Werth der Abſciſſe anfange.

Da $x\partial p = \partial P$, und $\frac{xp\partial p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = \partial Q$ iſt, ſo iſt $p\partial P = \partial Q \sqrt{(1 + p^2)}$, folglich $p = \frac{\partial Q}{\sqrt{(\partial P^2 - \partial Q^2)}}$. Nimmt man nun für P und

Q zwey Functionen von u an, ſo wird p durch u gegeben, folglich auch ∂p, und daraus erſtlich x durch dieſelbe u, ferner auch y durch die Gleichung $y = px - P$. Aus den Werthen von x und y wird die Größe u weggeſchafft, ſo ergiebt ſich die Gleichung zwiſchen x und y, und daraus die Formel für den Bogen s, oder auch mittelbar aus der Gleichung, $s = x\sqrt{(1 + p^2)} - Q$.

In dieſem allgemeinen Schema der Rechnung ſind alle Größen als poſitive angenommen.

60. Exempel I. Es ſey $P = u$; $Q = \frac{u^2}{2a}$; ſo iſt $\partial P = \partial u$; $\partial Q = \frac{u\partial u}{a}$; $p = \frac{u}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}$; $\partial p = a^2 (a^2 - u^2)^{-\frac{3}{2}} \partial u$; $x = \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$; $y = -\frac{u^3}{a^2}$. Die Gleichung für die rectificable Curve iſt nun, $a^4x^2 = (a^2 - (a^2y)^{\frac{2}{3}})^3$, oder $ax^2 = (a - a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}})^3$, oder $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Dieſes iſt die Gleichung für die in (45.) ſchon rectificirte Linie. Es folgt daraus, mittelſt der Differentialformel, $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, der Bogen $s = \frac{3}{2}(ax^2)^{\frac{1}{3}} + C$; oder $s = \text{Const.} - \frac{3}{2}(ay^2)^{\frac{1}{3}}$.

Die Formel, $s = x\sqrt{(1 + p^2)} - Q$, giebt den veränderlichen Theil eben ſo. Es iſt $1 + p^2 = \frac{a^2}{a^2 - u^2}$, alſo $s = \frac{a^2 - u^2}{a} - \frac{u^2}{2a} = a - \frac{3u^2}{2a}$.

Da $u^2 = a^2 - (a^4 x^2)^{\frac{1}{3}}$, ſo iſt $s = \frac{3}{2}(ax^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}a$. Oder, da $u = -(a^2 y)^{\frac{1}{3}}$, und $u^2 = (a^4 y^2)^{\frac{1}{3}}$ iſt, ſo iſt $s = a - \frac{3}{2}(ay^2)^{\frac{1}{3}}$. In beiden Werthen ſind noch die Conſtanten zu beſtimmen.

Man bemerke, daß die eingeführte Hülfsgröße u einen negativen Werth hat, damit y poſitiv und p negativ ſeyn könne, letzteres, weil die Veränderungen von x und y entgegengeſetzter Beſchaffenheit ſind.

61. Exempel II. Es ſey $P = \frac{u^2}{2a}$; $Q = u$; ſo iſt $\partial P = \frac{u\partial u}{a}$; $\partial Q = \partial u$; $p = \frac{a}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}$;

$$\partial p = - \frac{au\partial u}{(u^2 - a^2)^{3:2}}.$$

Hieraus wird $x = - \frac{(u^2 - a^2)^{3:2}}{a^2}$. Da dieſer Werth negativ iſt, die Abſciſſen einer Curve aber immer poſitiv genommen werden mögen, ſo gebe man der Wurzelgröße p das Vorzeichen —, nehme alſo

$$p = - \frac{a}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}; \quad \partial p = + \frac{au\partial u}{(u^2 - a^2)^{2:3}};$$

daher

$$x = \frac{(u^2 - a^2)^{3:2}}{a^2}; \quad y = - \frac{u^2 - a^2}{a} - \frac{u^2}{2a} = - \frac{3u^2}{2a} + a.$$

Daraus iſt

$$(a^4 x^2)^{\frac{1}{3}} + a^2 = u^2, \text{ und } \frac{2a}{3}(a - y) = u^2,$$

ſo daß die Gleichung für die rectificable Curve iſt

$(ax^2)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}(a + 2y)$, oder $27\,ax^2 = -(a + 2y)^3$. Es muß alſo y negativ und abſolut genommen größer als $\frac{1}{2}$ a ſeyn. Die krumme Linie iſt die Neiliſche Parabel, (ſ. Parabeln höherer Ordnungen.). Sie liegt mit beiden Zweigen auf der Seite der negativen y, und die Spitze hat den Abſtand $-\frac{1}{2}$ a von der Abſciſſenlinie in dem Anfangspuncte der Abſciſſen.

Aus der Gleichung für die Curve folgt vermittelſt der Differentialformeln, $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$, oder $\partial s = -\partial y \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$, der Bogen

$$s = \sqrt{\frac{(a + (ax^2)^{\frac{1}{3}})^3}{a}} + \text{Const. oder}$$

$$s = \sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{(a - y)^3}{a}} + \text{Const.}$$

Denn es iſt $a^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{1}{3}}\,\partial x = -\partial y$, alſo

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{a^{2:3}}{x^{2:3}}, \text{ und } \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{x^{2;3}}{a^{2:3}} = -\frac{(a + 2y)}{3a}.$$

Alſo iſt erſtlich $\partial s = x^{-\frac{1}{3}}\,(a^{2:3} + x^{2:3})^{\frac{1}{2}}\,\partial x$, daher

$$s = (a^{2:3} + x^{2:3})^{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{\frac{(a + (ax^2)^{\frac{1}{3}})^3}{a}} + C,$$

Zweytens $\partial s = -\partial y \sqrt{\frac{2a - 2y}{3a}}$; daraus

$$s = \sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{(a-y)^3}{a}} + C.$$

Die Formel $s = x\sqrt{(1+p^2)} - Q$ anzuwenden, bemerke man, daß, da p das Vorzeichen geändert hat, es Q auch ändern muß. Dadurch iſt;

$$s = + \frac{(u^2 - a^2)\,u}{a^2} + u = \frac{u^3}{a^2},$$ das iſt,

$$s = \frac{\sqrt{(a^2 + a(ax^2)^{1:3})^3}}{a^2} = \frac{\sqrt{(a + (ax^2)^{1:3})^3}}{\sqrt{a}},$$

wie vorher.

Hätte man angenommen $P = -\frac{u^2}{2a}$, und $Q = u$, ſo wird die Gleichung für die Curve, $27ax^2 = (2y - a)^3$. Setzt man $P = b - \frac{u^2}{2a}$, ſo iſt die Gleichung, $27ax^2 = (2y + 2b - a)^3$.

62. In den Nov. Act. Petrop. T. III. giebt Euler zur Erfindung rectificabler Curven folgende Formeln an:

$$x = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi - v \cos \varphi$$

$$y = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi + v \sin \varphi$$

$$s = \int v \partial \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

wo man für v eine ſolche Function von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, für welche das Integral $\int v \partial \varphi$ den Bogen φ nicht enthält, die aber ſonſt beliebig iſt, zu nehmen hat. Dieſe Formeln ſind, bis auf die Vorzeichen von x dieſelben, welche Lagrange in dem Calcul des Fonctions. Leç. XIX. zu eben dem Zwecke findet.

Setzt man z. B. $v = a \sin \varphi \cos \varphi$, ſo wird

$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = a(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$, alſo

$$x = a\sin\varphi(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) - a\sin\varphi\cos\varphi^2 = -a\sin\varphi^3,$$
$$y = a\cos\varphi(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) + a\sin\varphi^2\cos\varphi = a\cos\varphi^3,$$

woraus zwiſchen x und y die Gleichung $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ hervorgeht. Der Bogen s wird $= a\cos\varphi^2 - \frac{1}{2}a\sin\varphi^2 = a - \frac{3}{2}a\sin\varphi^2 = a - \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \text{Const.} = -\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$, wenn s und x zugleich verſchwinden. Der negative Werth des Bogens zeigt bloß, daß er nach der entgegengeſetzten Richtung von der, nach welcher die poſitiven x genommen werden, gerechnet iſt. Nimmt man die negativen x zu poſitiven, ſo wird auch s poſitiv. Alles wie in (50).

Vergleichungen irrectificabler Curven.

63. Eine Curve, die nicht rectificabel iſt, mag dennoch ſo beſchaffen ſeyn, daß darauf Bogen genommen werden können, deren Unterſchied einer geraden Linie gleich iſt, oder deren Verhältniß einem gegebenen gleich iſt. Die Unterſuchung über die Formen ſolcher krummen Linien gehört zu den feinſten in der analytiſchen Geometrie. Es iſt eine Gattung von unbeſtimmter Analytik in der Rechnung des Unendlichen, worin der Gang der Beweiſe von dem gewöhnlichen verſchieden iſt, Johann Bernoulli fand, daß die gemeine Parabel beide dieſer Beſchaffenheiten hat. Opp. T. I. p. 242. Von der erſtern zeigt er es nur an, die andern erweiſet er durch eine künſtliche geometriſche Verbindung der Parabel mit der gleichſeitigen Hyperbel. Seine Methode iſt alſo eine ganz eingeſchränkte.

Auch behauptet er, daß die Differential-Methode hier nicht helfen könne. Die Parabel gewährt den leichteſten Fall, weil der Bogen eine algebraiſche und logarithmiſche Function der Abſciſſe iſt. Auch entdeckte er, daß an der Parabel, deren Gleichung iſt $a^2x = y^3$, ſich Bogen angeben laſſen, deren Unterſchied eine algebraiſche Function iſt. Dieſes gründet ſich darauf, daß mit jeder paraboliſchen Linie eine andere dieſer Gattung verbunden werden kann, ſo daß zwey Bogen von dem gemeinſchaftlichen Scheitel an eine rectificable Summe ausmachen, die gemeine mit der cubiſch-biquadratiſchen deren Gleichung iſt $ax^3 = y^4$ (Opp. T. I. p. 249). Die Coordinaten der einen Linie ſeyn x, y, der andern $t = \frac{x\partial y^3}{\partial x^3}$, und $u = \frac{3x\partial y^2}{2\partial x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial y^2}{\partial x}$, wo die Integration vorausgeſetzt wird, ſo iſt die Summe der zugehörigen Bogen $= \frac{x(\partial x^2 + \partial y^2)^{3:2}}{\partial x^3}$. In dem Falle, daß an einer gegen die Abſciſſenlinie concaven Curve $3x\partial^2 y$ größer als $\partial x \partial y$ iſt, giebt jene Formel den Unterſchied der beiden Bogen.

64. L'Hopital hat die Aufgabe von den vergleichbaren paraboliſchen Bogen durch eine geometriſche Analyſis mittelſt hyperboliſcher Flächenräume aufgelöſet. Sect. coniques. p. 382.

65. Tſchirnhauſen behauptete in den Actis Erud. Nov. 1695., daß er eine allgemeine Methode entdeckt hätte, auf jeder Curve zu jedem Bogen einen andern anzugeben, der zu jenem ein gegebenes Verhältniß habe. Den Beweis hat er aber nicht liefern können.

66. Hermann legte in den Actis Erud. 1719 eine Aufgabe vor, welche damahls den Geometern viele Beſchäftigung gab, nämlich eine krumme Linie

zu finden, deren Länge durch eine Formel dargeſtellt würde, welche die Quadratur einer gegebenen Linie enthielte, nebſt einer oder mehrern algebraiſchen Functionen. Nicolaus Bernoulli löſete die Aufgabe nur mit gewiſſen Einſchränkungen auf, A. Er. 1720. Hermann gab ſeine Aufſöſung daſelbſt 1723 und Joh. Bernoulli theilte die ſeinige daſelbſt 1724 mit. Dieſe waren aber noch ſehr indirect. Euler war der erſte, der zu einer directen Auflöſung den Weg zeigte, in den neuen Petersb. Commentarien, T. V. in der Abhandlung de methodo Diophanteae analoga in Analysi Infinitorum.

67. Als Fagnani im Jahr 1718 gefunden hatte, daß auch auf der Ellipſe und Hyperbel ſich Bogen angeben laſſen, deren Unterſchied eine algebraiſche Function iſt, ſo ſuchte Euler eine bequemere Auflöſung und Conſtruction der Aufgabe, ſolche Bogen zu finden. Comm. novi Petrop. T. VI. Für die Lemniſcata fand er allgemeinere Vergleichungen der Bogen als Fagnani entdeckt hatte, (ſ. Lemniſcata). Dieſes veranlaßte ihn, Vergleichungen ähnlicher Integralformeln anzuſtellen, zuerſt dieſer, $\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^4)}}$, woraus er die Integration allgemeinerer Gleichungen herleitete. Von jener iſt die Integralgleichung, $xx + yy + ccxxyy = cc + 2\,xy\sqrt{(1-c^4)}$. Eine Probe von Integrirungen dieſer Art iſt in dem Artikel, Integralgleichung, 47., mitgetheilt. Die Unterſuchung ſcheint eine Zeitlang eine Lieblingsbeſchäftigung von Euler geweſen zu ſeyn, und erforderte auch einen ſolchen Meiſter in ſchicklichen Transformationen.

66. Da die Methode, deren Fagnani ſich bedient hatte, auf Subſtitutionen beruhte, welche gleichſam aufs Gerathewohl unternommen waren, und die vorher angeführte, von Euler angewandte, auch von dieſer Be-

ſchaffenheit, aber weniger eingeſchränkt war, ſo nahm dieſer ſcharfſinnige Analyſt einen andern Weg, der demjenigen ähnlich iſt, auf welchem man manche Integrale findet, nämlich durch die Vergleichung der vorgegebenen Differentiale mit denen, die aus den Relationen endlicher Größen gefunden ſind. Er hatte dieſes Verfahren ſchon bey der Integration der gleich vorher angeführten Differentialgleichung gebraucht. Drey Abhandlungen über dieſe Materie ſind in den Comm. nov. Petr. T. VII. enthalten. In der erſten (der Stelle nach der zweyten, p. 83.) zeigt Euler, daß zwey ähnliche transſcendente Integrale von der Form $\int \frac{\partial x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A + Cx^2)}}$ einen gewiſſen algebraiſchen Unterſchied haben, und macht davon die Anwendung, auf die Vergleichung von Bogen eines Kreiſes und der Parabel, um den Geiſt dieſer Methode zu zeigen. Auch wird nach dieſer directen Methode eine von Huygens ſchon aufgelöſete Aufgabe behandelt, einen Kreis anzugeben, deſſen Area der Summe der Räume der Oberflächen eines gedruckten Sphäroids und eines hyperboliſchen Konoids gleich iſt. Sie wird auf Segmente des Sphäroids erweitert.

69. In der zweyten Abhandlung (p. 3.) zeigt Euler, wie der algebraiſche Unterſchied zweyer ähnlichen Integrale von der Form $\int \frac{\partial x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 \; \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}}$ beſchaffen iſt. Es verſchwindet derſelbe, wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ beide = 0 ſind. Die Conſtante iſt hier eine Größe eben der Art wie die Integrale. Euler macht davon die Anwendung auf die Ellipſe, um auf derſelben von irgend einem Puncte einen Bogen abzuſchneiden, der von einem gegebenen Bogen oder deſſen Vielfachen um eine geometriſche Größe verſchieden ſey, und einen Bogen anzugeben, der zu einem gegebenen Bogen ein

beſtimmtes Verhältniß habe. Dieſes muß ſich auch auf die Hyperbel anwenden laſſen.

70. In einer dritten Abhandlang daſelbſt p. 128. giebt Euler die geometriſche Conſtruction zweyer Aufgaben, die er in den Act. Erud. 1754 vorgelegt hatte, erſtlich, irgend eine Hälfte des elliptiſchen Umfanges ſo zu theilen, daß der Unterſchied der Theile geometriſch darſtellbar ſey, zweytens, auf einem elliptiſchen Quadranten zwiſchen den Scheiteln der Axen einen Bogen anzugeben, der die Hälfte des Quadranten ſey. Dazu ſetzt er die noch ſchwerere Aufgabe, auf einer Ellipſe einen Bogen zu beſtimmen, welcher der dritte Theil des ganzen Umfanges iſt. Die erſte Aufgabe hat Boſſút aufgelöſet, in den Mém. présentés, T. III. allein auf eine indirecte Art durch eine Art von Verſuch. Man ſehe auch deſſen Calcul intégral, P. I. Ch. 10.

71. In dem XII. Bande der neuen Petersburger Commentarien machte Euler die Unterſuchung noch allgemeiner. Er zeigte, daß auf Curven, deren Bogen durch die Formel,

$$\int \frac{\mathfrak{A}\partial z}{\sqrt{(A + 2Bz + Cz^2 + 2D^3z^3 + Ez^4)}},$$

ausgedrückt werden, von irgend einem Puncte ein Bogen abgeſchnitten werden kann, der einem gegebenen Bogen gleich iſt; und daß auf Curven, deren Bogen den Werth,

$$\int \frac{\partial z(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^4)}{\sqrt{(A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^5 + Ez^4)}}$$

haben, zu jedem gegebenen Bogen von irgend einem Puncte aus ein Bogen gefunden werden kann, der von jenem, oder einem Vielfachen deſſelben, um eine geometriſch angebbare Größe unterſchieden iſt.

72. Euler verfolgte dieſe Unterſuchung immer

weiter. In den Actis Acad. Petrop. T. V. P. II. vergleicht er die Größen, welche in der Integralformel,

$$\int \frac{Z\partial z}{\sqrt{(1 + mz^2 + nz^4)}}$$ enthalten ſind, wo Z irgend eine rationale Function von z^2 bedeutet. In demſelben Bande lieferte der unerſchöpfliche Mann eine ausführliche Entwickelung der Vergleichungen, welche ſich zwiſchen den Bogen der Kegelſchnitte anſtellen laſſen. Dieſe bezieht ſich auf die Theorie, die in dem Euleriſchen Werk über die Integralrechnung, T. I. p. 421 — 493 vorgetragen iſt. In dem IV. Theile der neuen Ausgabe dieſes Werks iſt aus Eulers handſchriftlichem Nachlaſſe noch eine hieher gehörige Abhandlung eingerückt. Man ſehe auch das Supplement am Ende des dritten Theils deſſelben Werks.

73. Legendre hat in den ſchon angeführten Exérciçes de calcul intégral die Vergleichung der Bogen der Lemniſcata, der Ellipſe und Hyperbel bequemer gemacht, überhaupt den Tranſcendenten, welche in der Formel

$$\int \frac{P\partial x}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}},$$ wo P eine beliebige rationale Function von x iſt, enthalten ſind, vermittelſt Einführung von Angulargrößen eine ihre Vergleichung erleichternde Form gegeben. Er macht drey Claſſen derſelben. Die erſte begreift diejenigen, welche durch die Formel $\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin\varphi^2)}}$ dargeſtellt werden. Zu ihr gehören die Bogen der Lemniſcata. Die zweyte, deren Form iſt $\int \partial\varphi \sqrt{(1 - c^2 \sin\varphi)}$, begreift die elliptiſchen Bogen. Die dritte Claſſe begreift die Tranſcendenten von der Form

$$\int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\sqrt{(1 - c^2 \sin\varphi^2)}}.$$ Nach der

zweyten Claſſe legt Legendre ihnen allen den Namen elliptiſche Transſcendenten bey.

74. Euler hat noch verſchiedene andere Unterſuchungen über die Rectification der krummen Linien geliefert, welche zugleich der Integralrechnung zugehören. Dieſe ſind:

Zwey algebraiſche Linien zu finden, deren keine rectificabel iſt, von welchen aber zwey Bogen, die zu derſelben Abſciſſe gehören, ein algebraiſches Aggregat geben, wozu man noch die Bedingung ſetzen mag, daß die Rectification von einer gegebenen Quadratur, $\int Z\partial z$, abhangen ſolle. Comm. vet. Petrop. T. VIII. Comment. nov. Tom. V.

Eine Curve zu finden, die auf einer ſtetigen Folge von Ellipſen gleiche Bogen abſchneide. Die Ellipſen haben entweder eine Axe und einen Scheitel auf der andern gemeinſchaftlich; oder ſie haben einen gemeinſchaftlichen Mittelpunct und Scheitel. Comm. vet. Petrop. T. VIII.

Die Form der Curven zu finden, an welchen die Bogen von gleicher Weite (Amplitudo) gleich groß ſind. Comm. novi Petrop. T. XII.

Zwey algebraiſche Curven zu finden, deren Bogen unbeſtimmter Weiſe ſich gleich ſind. Nova Acta Petrop. T. IV.

Die algebraiſchen Curven zu finden, deren Länge durch paraboliſche oder elliptiſche Bogen gemeſſen werden kann. Nova Acta Petrop. T. V.

Hierzu kommen noch Unterſuchungen über rectificable Curven auf krummen Flächen: auf einer Kugel, in Comm. n. Petrop. T. XV. auf einem rechtwinklichten Kegel, Acta Petrop. T. V. P. I., auf irgend einer ſphäroidiſchen Oberfläche. Nova Acta Petrop. T. III.

75. Da die Vergleichung irrectificabler Bogen eine ſo ſehr bearbeitete Aufgabe iſt, ſo werden ein paar Beyſpiele nicht fehlen dürfen. An der Parabel iſt die Sache leicht, wie vorher bemerkt iſt, wiewohl Joh. Bernoulli eine ſehr umſtändliche Conſtruction und Rechnung dazu gebraucht, und ſich noch wundert, daß die Rechnung nicht verwickelter geworden ſey.

76. Es ſey an der Parabel <AMN (Fig. 11.) PM = y, QN = z, ſo iſt (36). der Bogen

$$MN = \frac{z}{2a}\sqrt{(aa + 4zz)} - \frac{y}{2a}\sqrt{(aa + 4yy)} + \frac{1}{4} a \log \frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y}.$$

Ein paar andere gegebene Ordinaten ſeyn p, q, ſo iſt der zwiſchen ihnen befindliche Bogen

$$= \frac{q}{2a}\sqrt{(aa + 4qq)} - \frac{p}{2a}\sqrt{(aa + 4pp)} + \frac{1}{4} a \log \frac{\sqrt{(aa + 4qq)} + 2q}{\sqrt{(aa + 4pp)} + 2p},$$

Setzt man die beiden logarithmiſchen Größen einander gleich, ſo iſt der Unterſchied der beiden paraboliſchen Bogen eine algebraiſche Function der Ordinaten p, q, y, z. Dieſes wird erhalten, wenn

$$\frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y} = \frac{\sqrt{(aa + 4qq)} + 2q}{\sqrt{(aa + 4pp)} + 2p}$$

gemacht wird, wodurch zu jeder Ordinate y die zugehörige z gefunden werden kann.

77. Man kann auch den beiden Bogen irgend ein Verhältniß n : 1 geben. Zur Abkürzung ſey der zweyte, durch p, q gegebene Bogen $= f + \frac{1}{4} a \log k$ ſo iſt

$$\frac{z}{2a}\sqrt{(aa + 4zz)} - \frac{y}{2a}\sqrt{(aa + 4yy)}$$

$$+ \frac{1}{4} a \log. \frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z)}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y}$$

$$= nf + \frac{1}{4} na \log. k.$$

Setzt man den algebraiſchen Theil auf beiden Seiten der Gleichung gleich groß, und den logarithmiſchen gleichfalls, ſo erhält man zwey Gleichungen für y und z, woraus dieſe unbekannten Größen beſtimmt werden.

Die Gleichheit der beiden logarithmiſchen Größen giebt, wenn man ſtatt der Logarithmen ihre zugehörigen Zahlen nimmt,

$$\frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y} = k^n,$$

da $n \log k = \log k^n$ iſt.

78. Die Vergleichung der elliptiſchen Bogen iſt ſchwieriger, weil für dieſe keine algebraiſche Werthe ſtatt finden. Man muß hier Subſtitutionen verſuchen, durch welche die Differentiale zweyer Bogen ein integrirbares Aggregrat geben.

Es ſey die halbe große Axe $= 1$, die Excentricität $= e$, die Abſciſſe aus dem Mittelpuncte $= x$, der zugehörige Bogen $= s$, ſo iſt (8.)

$$\partial s = \partial x \sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}}, \text{ oder}$$

$$\partial s = \frac{(1 - e^2x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1 - (1 + e^2)\,x^2 + e^2 x^4)}}.$$

Man ſetze $1 - e^2x^2 = u^2$, ſo iſt durch gehörige Verwandlungen für x und ∂x,

$$\partial s = - \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{((2 - e^2)\,u^2 - u^4 - (1 - e^2))}}.$$

Man ſuche eine Ergänzung zu dieſem Differential, damit das Aggregat integrirbar ſey. Es iſt das Differential von $\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}$

$$= \frac{((2-e^2)u-2u^3)\partial u}{\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}},$$

und das Differential von

$$\frac{\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}{u}$$

$$= \frac{(1-e^2-u^4)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e))}}.$$

Es erhellt nun, daß die geſuchte Ergänzung iſt

$$+\frac{(1-e^2)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}.$$

Dieſes Differential hat auch dieſelbe Form, wie das für ∂s. Man hat nur ſtatt u^2 zu ſetzen $\frac{1-e^2}{u^2}$, alſo $-\frac{\partial u\sqrt{(1-e^2)}}{u^2}$ ſtatt ∂u, ſo verwandelt ſich jenes Differential in dieſe Ergänzung.

Man nehme nun eine Abſciſſe y ſo, daß $1-e^2y^2 = \frac{1-e^2}{u^2}$, und ſetze den dazu gehörigen Bogen $=$ s', ſo iſt

$$\partial s' = \frac{(1-e^2)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}.$$

Die Summe der beiden Differentiale iſt

$$\partial s + \partial s' = \frac{(1-e^2-u^4)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}},$$

und das Integral

$$s + s' = \text{Const.} + \frac{\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}{u}.$$

Es iſt $x^2 = \frac{1 - u^2}{e^2}$; und $y^2 = \frac{u^2 - 1 + e^2}{e^2 u^2}$;

daher $x^2 y^2 = \frac{(2 - e^2) u^2 - u^4 - (1 - e^2)}{e^4 u^2}$.

Alſo iſt $s + s' = \text{Const.} + e^2 xy$. Nimmt man $x = 0$, ſo iſt $s = 0$, und $u = 1$; daher $y = 1$, und s' = dem elliptiſchen Quadranten. Dieſen bezeichne man durch Q, ſo iſt $s + s' = Q + e^2 yx$, oder $s - (Q - s') = e^2 xy$. Hier ſind s und $Q - s'$ elliptiſche Bogen, deren jener an dem Scheitel der kleineren Axe, dieſer an dem Scheitel der größeren anfängt.

Die hier gegebene Auflöſung iſt der in Boſſüts Integralrechnung, Th. I. §. 499. ähnlich; doch iſt bey der gegenwärtigen der Weg gezeigt, auf welchem man zu derſelben gelangen möge.

Henry hat gefunden, daß der Punct, an welchem die bis an beide Axen verlängerte Berührungslinie ſo groß iſt, als die halbe Summe der Axen, den elliptiſchen Quadranten ſo theilt, daß der Unterſchied der beiden Stücke dem halben Unterſchiede der Axen gleich iſt. Mon. Corr. B. XXVIII. S. 260. An jenem Puncte iſt nämlich, wie ſich ſogleich ergiebt, $x = y$, daher $u^2 = b$, und $x^2 = y^2 = \frac{1 - b}{e^2}$, mithin $s - (Q - s') = e^2 \cdot \frac{1 - b}{e^2} = 1 - b$. Man ſehe auch die Zeitſchrift für Aſtron. B. III. 98 ff.

79. Die in (48.) angeführte krumme Linie ſey BMC (Fig. 25.), die der Länge nach gegebene gerade Linie zwiſchen den Schenkeln des rechten Winkels A ſey DE, und berühre die Curve in M, zu welchem Puncte die Coordinaten ſeyn AP, PM. Es ſey DE $= a$, AP $= x$; PM $= y$, der Bogen BM $= s$. Da PE die Subtangente auf AC iſt, in der-

ſelben Richtung wie die Abſciſſe, ſo iſt PE $= - \frac{y\partial x}{\partial y}$ und ME $= \sqrt{(PM^2 + PE^2)} = - y\sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)} = - \frac{y\partial s}{\partial y}$, da $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$ iſt. Man ziehe MQ ſenkrecht auf AB, ſo iſt QD $= - \frac{x\partial y}{\partial x}$, und MD $= x\sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = + \frac{x\partial s}{\partial x}$. Folglich iſt $a = \frac{x\partial s}{\partial x} - \frac{y\partial s}{\partial y}$. Das Negationszeichen verwandelt in dieſer Rechnung die negativen Differentialquotienten in abſolute.

Die gefundene Gleichung werde differentiirt, wobey das Differential des Bogens, ∂s, unveränderlich genommen werde, ſo iſt

$$0 = \frac{\partial x^2 - x\partial^2 x}{\partial x^2} - \frac{\partial y^2 - y\partial^2 y}{\partial y^2},$$

das iſt, $0 = \frac{y\partial^2 y}{\partial y^2} - \frac{x\partial^2 x}{\partial x^2}$.

Da ∂s unveränderlich genommen iſt, ſo iſt $\partial.(\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, und $0 = \partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y$. Dadurch iſt $0 = x\partial y^3 + y\partial x^3$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} = - \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Das Integral dieſer Gleichung iſt $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Denn die Gleichung $x^m + y^m = c^m$ differentiirt giebt $mx^{m-1}\partial x + my^{m-1}\partial y = 0$, das iſt $\frac{\partial y}{\partial x}$

$= -\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1-m}$. Die Vergleichung mit der gegebenen Gleichung zeigt, daß $1 - m = \frac{1}{3}$, alſo $m = \frac{2}{3}$ iſt. Die Conſtante c iſt a. Denn wenn der eine Endpunct der Linie DE in A fällt, ſo liegt der andere in B oder in C, ſo daß AB und AC = DE ſind.

Auch ohne ein Differential conſtant zu ſetzen, kann man die Rechnung auf folgende Art anſtellen. Es ſey AE = t, AD = u, ſo iſt $t^2 + u^2 = a^2$. Daher $t\partial t + u\partial u = 0$, und $\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{u}{t}$. Nun iſt $t = x - \frac{y\partial x}{\partial y}$, und $u = y - \frac{x\partial y}{\partial x}$, wo das Negationszeichen die zugehörigen Größen additiv macht.

Daraus iſt, nach einer leichten Reduction,

$$\partial t = \frac{y\partial x\partial^2 y - y\partial y\partial^2 y}{\partial y^2},$$

$$\partial u = \frac{x\partial y\partial^2 x - x\partial x\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Alſo iſt $-\frac{\partial t}{\partial u}$ oder $\frac{u}{t} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial y^2}$. Man ſetze $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, ſo iſt $t = x - \frac{y}{p}$; $u = y - px$, und $\frac{p(y - px)}{px - y} = \frac{y}{ppx}$, das iſt $-p = \frac{y}{ppx}$, oder $-p^3 = \frac{y}{x}$, und $\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ wie vorher.

Joh. Bernoulli handelt von dieſer krummen Linie in einem Aufſatze über die Brennlinie, Opp. T. I. p. 57., und in den Lect. Hosp. T. III. p. 447. Seine Methoden ſind von der hier angewandten ganz verſchieden.

80. Die Rectification gedoppelt krummer Linien hat große Schwierigkeit. Auf einem rechtwinklichten Kegel, deſſen Seite ein rationales Verhältniß zu dem Durchmeſſer der Grundfläche hat, laſſen ſich unzählig viele krumme Linien geometriſch beſchreiben, die ſich rectificiren laſſen. Dieſes zeigt Euler in den Actis Petrop. T. V. P. I. p. 60.

Recurrens series, ſ. rücklaufende Reihe.

Reduction iſt überhaupt die Verwandlung einer Größe in eine andere, oder eine Vertauſchung. In der gemeinen Arithmetik geſchieht ſie bey der Verwandlung einer ganzen Zahl in einen Bruch, eines Bruches in einen andern gleichgültigen; bey der Verwandlung der Glieder eines Verhältniſſes in andere, bey der Umtauſchung kleinerer Einheiten in größere, oder umgekehrt, als bey Münzſorten und Gewichten.

Reduction einer Gleichung oder eines analytiſchen Ausdrucks iſt, wenn dieſer auf die einfachſte Form gebracht wird, durch Aufheben der gleichen Größen mit entgegengeſetzten Vorzeichen, durch Weglaſſung des gemeinſchaftlichen Factors in dem Zähler und Nenner eines Quotienten, durch Abſonderung eines Factors, oder auch durch Entwickelung eines Products, u. d. g.

Eine Figur in eine ähnliche, gewöhnlich kleinere, verwandeln, heißt auch ſie reduciren. Wegen des Gebrauchs des Proportionalzirkels zu dieſem Zwecke heißt dieſer auch ein Reductionszirkel, compas de proportion: insbeſondere nach der Byrgiſchen Einrichtung.

Ein Integral auf ein anderes reduciren, heißt, jenes durch dieſes angeben. So wird ein nicht algebraiſches oft auf die Quadratur des Kreiſes oder der Hyperbel gebracht.

In der angewandten Geometrie wird ein Win-

kel, deſſen Schenkel nicht horizontal ſind, auf einen mit horizontalen Schenkeln, in den verticalen Ebenen durch jene reducirt. Ein Winkel, deſſen Scheitel auſſerhalb eines angewieſenen Punctes hat genommen werden müſſen, wird in denjenigen verwandelt, der an dieſem Puncte würde gefunden ſeyn. In der Aſtronomie kommen ſehr häufig Reductionen des Ortes eines Beobachters auf einen andern vor, als von der Sonne auf die Erde, und umgekehrt; von dem Mittelpuncte der Erde auf ihre Oberfläche und von dieſer auf jenen; daher dann der Ort des beobachteten Weltkörpers ebenfalls eine Reduction leidet. Die Länge eines Planeten in ſeiner Bahn wird auf die zugehörige Länge längs der Ekliptik reducirt.

Redundans hyperbola begreift in Newtons Enumeratione linearum tertii ordinis alle diejenigen Curven, welche drey geradlinichte Aſymptoten, von welchen keine parallel ſind, haben, ſ. krumme Linien der zweyten Claſſe.

Reeſiſche Rechnungsregel, ſ. Verhältniſſe.

Regel, arithmetiſche, iſt jede Vorſchrift, aus gegebenen Zahlen die unbekannte herzuleiten. Insbeſondere giebt man ſie einigen, die ſich durch ihre Wichtigkeit oder größere Feinheit auszeichnen.

Von dieſen beſonders benannten Regeln ſind einige in einzelnen Artikeln dieſes Werks abgehandelt, als die Alligationsregel, oder die Regel der Beſchickung, die Regel der Geſellſchaftsrechnung, die Kettenregel. Die Regel de Tri, die Regel Multiplex (Conjointe), de Quinque, die Reeſiſche und die Baſedowiſche Regel, kommen in dem Artikel, Verhältniß, vor. Die Regel Coß bedeutet bey den ältern Arithmetikern die Algebra. Der gegenwärtige Artikel iſt für die Regel Cöci und Regula Falſi beſtimmt.

Die Regel Cöci.

1. Die Regel Cöci oder Zekis, auch Blindrechnung, Regula virginum, Regula potatorum genannt, betrifft eine Aufgabe aus der unbeſtimmten Analytik, nämlich eine gegebene Zahl in drey oder mehr Theile ſo zu theilen, daß, wenn jeder dieſer Theile mit einer gegebenen Zahl multiplicirt wird, die Summe der Producte eine gegebene Zahl ſey.

2. Aufgaben dieſer Art würden unendlich viele Auflöſungen zulaſſen, wenn man für die geſuchten Theile auch gebrochne und negative Werthe geſtattete. Man ſchränkt ſie aber auf poſitive ganze Zahlen ein. Dadurch wird auch die Anzahl der Antworten eingeſchränkt. Zur vollſtändigen Auflöſung wird noch erfordert, daß die Anzahl aller Antworten beſtimmt werde. In den Rechenbüchern gehören dieſe Aufgaben zu den künſtlichern.

3. Wenn den geſuchten Größen, mit Ausſchließung zweyer, beſtimmte Werthe beygelegt ſind, ſo wird die Aufgabe eine beſtimmte, von derſelben Art, wie bey der Alligationsregel vorgekommen iſt, wenn zwey Materien, deren Werthe für eine gewiſſe Einheit derſelben gegeben ſind, ſo verbunden werden ſollen, daß der Werth der Einheit in der Verbindung ein gegebener ſey. Wir wollen dieſen Fall in Beziehung auf die gegenwärtige Aufgabe zuerſt vornehmen.

4. Die gegebene Zahl ſey $= a$; die zwey geſuchten Theile y, z; die gegebenen Multiplicatoren, m, n, die Summe der Producte $= b$, ſo iſt

I. $y + z = a$; II. $my + nz = b$. Die erſtere Gleichung werde mit n multiplicirt, ſo iſt III. $ny + nz = na$. Dieſe von II. abgezogen, giebt IV. $(m - n)\,y = b - na$. Es wird hierbey angenommen, daß n kleiner als m iſt, da es gleichgültig iſt, welcher der beiden Theile durch z bezeichnet

werde. Damit y eine ganze Zahl ſey, muß m — n ein Factor von b — na ſeyn.

Z. B. Die Zahl 100 in zwey Theile zu theilen, daß der eine mit 7, der andere mit 4 multiplicirt die Summe 430 gebe. Hier iſt $y = \frac{430-400}{3} = 10$; der andere Theil alſo = 90.

5. Es ſey nun I. $x + y + z = a$; II. $mx + ny + pz = b$, und die Zahlen m, n, p, folgen der Größe nach auf einander, von der größten m an. Man multiplicire I. mit p und ziehe die Gleichung darauf von II. ab, ſo iſt

III. $(m - p)\, x + (n - p)\, y = b - pa$.

Multiplicirt man I mit n, und zieht die Gleichung darauf von II. ab, ſo wird

IV. $(m - n)\, x - (n - p)\, z = b - na$.

Hier kann man x auf mehrerley Art annehmen, nur muß ſowohl $b - pa - (m - p)\, x$, als $(m - n)x - b + na$ ſich durch $n - p$ theilen laſſen, damit y und z ganze Zahlen werden. Auch muß dabey $(m-p)x$ kleiner ſeyn, als $b - pa$, und $(m - n)\, x$ größer als $b - na$, ſo daß dieſe Größen der Quantität nach abnehmend ſo auf einander folgen:
$b - pa$; $(m - p)\, x$; $(m - n)\, x$; $b - na$.
Dieſes dient die Gränzen für x zu beſtimmen.

6. Exempel. Man will aus 14 löthigem, 11 löthigem und 9 löthigem Silber eine Maſſe 12 löthiges 30 Mark ſchwer machen, wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

Die Gleichungen ſind hier

I. $x + y + z = 30$ (Mark)

II. $14x + 11y + 9z = 12.30$ (Loth fein).

Es iſt $b - pa = 360 - 9.30 = 90$, und $b - na = 360 - 11.30 = 30$; alſo iſt $(m-p)x$ oder 5x nicht größer als 90, und $(m - n)\, x$ oder

3x nicht kleiner als 30, das iſt, x iſt nicht größer als 18, und nicht kleiner als 10. Ferner muß 90 — 5x ſowohl als 3x — 30 ſich durch 2 theilen laſſen, folglich muß x eine gerade Zahl ſeyn, alſo die Werthe 10, 12, 14, 16, 18 erhalten. Nun beſtimmen ſich die Werthe von y und z aus den beiden Gleichungen, III. $5x + 2y = 90$; IV. $3x - 2z = 30$. Die zuſammengehörigen Werthe ſind

x	10, 12, 14, 16, 18.
y	20, 15, 10, 5, 0.
z	0, 3, 6, 9, 12.

7. Es werden vier Größen geſucht, ſo daß

$$\text{I. } u + x + y + z = a;$$
$$\text{II. } mu + nx + py + qz = b$$

ſey, wo die Factoren m, n, p, q, nach der Größe abnehmend auf einander folgen.

Man leite aus dieſen Gleichungen wie vorher folgende her:

$$\text{III. } (m - q)u + (n - q)x + (p - q)y = b - qa;$$
$$\text{IV. } (m - p)u + (n - p)x - (p - q)z = b - pa:$$

Die Werthe von u und x können auf mehrerley Art, jede für ſich angenommen werden, nur müſſen dabey ſich beide Gleichungen durch $p - q$ theilen laſſen, auch fallen die beiden Summen, $(m - q)u + (n - q)x$ und $(m - p)u + (n - p)x$ zwiſchen die Größen $b - qa$ und $b - pa$, wenn letzteres poſitiv iſt, wie es jenes immer ſeyn muß.

8. Exempel. Es ſey

$$\text{I. } u + x + y + z = 100,$$
und $$\text{II. } 20u + 10x + 4y + z = 200.$$
Daraus iſt $$\text{III. } 19u + 9x + 3y = 100.$$
$$\text{IV. } 16u + 6x - 3z = -200, \text{ oder}$$
$$\text{III. } 100 - 19u - 9x = 3y,$$
$$\text{IV. } 200 + 16u + 6x = 3z.$$

Es muß alſo $100 - 19u$ durch 3 theilbar ſeyn, und

$200 + 16u$ auch. Die letztere Formel ergiebt, nach Abſonderung des darin enthaltenen größten Vielfachen von 3, nämlich $198 + 15u$, daß $2 + u$ ein Vielfaches von 3 iſt, das iſt $u = 3t - 2$, oder wenn man $t + 1$ ſtatt t ſetzt, $u = 3t + 1$. Durch dieſe Form von u wird auch die Formel, $100 - 19u$, ein Vielfaches von 3. Oder man ſetze $100 - 19u = 3t$, ſo iſt auch $99 + 1 - 21u + 2u = 3t$, und $2u + 1 = 3t$, wenn man beiderſeits dies Vielfache, $99 - 21u$, wegwirft. Man ſetze $2t + 1$ ſtatt t, ſo iſt $2u + 1 = 3(2t + 1)$, das iſt $2u = 6t + 2$, oder $u = 3t + 1$.

Nun erhält man

V. $57t + 9x + 3y = 81$.
VI. $48t + 6x - 3z = -216$, oder
V. $19t + 3x + y = 27$, und
VI. $z - 16t - 2x = 72$.

Hier kann t nur die beiden Werthe 0 und + 1 erhalten. In dem erſtern Falle kann man für x alle ganze Zahlen von 1 bis 9 nebſt 0 ſetzen; in dem andern nur 0, 1, 2. Aus den gewählten Werthen von x ergeben ſich die von y und z. In allem giebt es 13 Auflöſungen dieſer Aufgabe.

9. Die beiden Exempel ſind aus Eulers Algebra, II. Th. S. 174. ff. genommen. Die Behandlung iſt abgeändert. Das zweyte Exempel ſteht auch in Clausbergs Rechenkunſt, IV. S. 1345, ohne allgemeine Rechnung. Er zeigt die Auflöſungen der hieher gehörigen Aufgaben durch Exempel in beſtimmten Zahlen, wobey er aber zugleich den Grund des Verfahrens einſehen läßt. — Man ſehe auch von dieſer, wie von der folgenden Regel Falſi, Käſtners Fortſetzung der Rechenkunſt, S. 530 ff. 499 ff. Karſtens Lehrbegriff der Mathematik zweyter Theil. XVI. Abſchnitt der weitern Ausführung der Rechenkunſt.

10. Die Rechenmeiſter kleiden dieſe Exempel ſo

ein, daß ſie zur Beluſtigung dienen. Es wird z. B. aufgegeben, wie viel Ochſen, Kühe, Kälber und Schafe unter 100 gekauften Stück Vieh geweſen ſind, wenn der Preis eines Stücks jeder Sorte gegeben wird. Von ſolchen Exempeln, mögen einige Benennungen dieſer Regel herrühren. Sie heißt Regel Cöci entweder, weil die Rechner, welche darauf fielen, die Auflöſung durch Verſuche und Herumtappen ſuchten, oder von dem unbekannten Worte, Zekis, das in Cöci verwandelt iſt.

Die Regel Falſi.

11. Die Regel Falſi iſt eine Methode, eine Rechnungs-Aufgabe durch die Annahme einer willkührlichen Größe ſtatt der wahren aufzulöſen, dadurch daß man das Facit mit dem, was herauskommen ſollte, vergleicht, und aus dem Unterſchiede die angenommene Zahl berichtigt.

12. Man hat dieſe Methode in frühern Zeiten benutzt, weil man entweder die algebraiſche nicht kannte, oder ſie dem Lehrling erſparen wollte. Wer nur mit Gleichungen vom erſten Grade umgehen kann, braucht die Regel Falſi nicht. Sie läßt ſich nicht anbringen, wo das geſuchte oder etwas davon abhangendes nicht durch eine Formel, welche bloß Factoren und Diviſoren enthält, dargeſtellt wird.

13. Exempel. Drey Perſonen, A, B, C, ſollen 1000 Rthlr. dergeſtallt theilen, daß B $1\frac{1}{2}$ mahl ſo viel als A, und C $\frac{1}{5}$ mahl ſo viel als A und B zuſammen bekomme, nebſt 40 Rthlr. beſonders. — Man nimmt hier irgend eine Zahl Thaler an, die A erhalten ſoll, gleichviel welche, als 4, ſo erhält B 6, und C bekommt 2 mit 40. Dieſes macht 52 ſtatt 1000. Damit man die Regel Falſi anbringen könne, muß man die 40 von 1000 wegnehmen, ſo wird die Summe = 12, ſtatt 960. Nun ſetze man nach der

Regel de Tri an, ſtatt 12 ſollen kommen 960, was muß ſtatt 4 in der Portion des A kommen? Facit 320. Nun bekommt B 480; C 160 mit den zurückgelegten 40, und die Summe dieſer drey Poſten iſt 1000.

14. Die Algebra giebt die Auflöſung ohne Verſuche. Die Portion des A ſey = x, ſo iſt die des B = $\frac{3}{2}$ x, des C = $\frac{1}{5}\left(x + \frac{3}{2}x\right) + 40$. Alle drey zuſammen geben die Gleichung, $\frac{30}{10}x + 40 = 1000$, oder $3x = 960$. Man ſieht aus dieſem Beyſpiele oder allgemeiner aus der Gleichung, $\frac{mx}{n} + a = b$, wie man durch einen unrichtigen Werth von x mittelſt der Abweichung von dem Werthe $b - a$ des Bruches den wahren Werth finden kann. Die Abweichung von $b - a$ verhält ſich wie die Abweichung von x. Die algebraiſche Rechnung giebt kein beſtimmtes Facit; ſie ſtellt bloß den Zuſammenhang der Größen dar, dagegen die Zahlenrechnung zwar dieſelbe Form beobachtet, aber nicht gerade eine gegebene Größe trifft.

15. Das behandelte Exempel gehört zu der einfachen Regel Falſi. Man hat auch eine doppelte Regel, wo man zwey Anſätze macht, und aus dem Unterſchiede der Reſultate von dem gegebenen in Vergleichung mit dem Unterſchiede der angenommenen Größen das richtige herleitet.

16. Exempel. Eine gewiſſe Zahl werde mit 2 multiplicirt, zu dem Producte 60 addirt, die Summe durch 11 dividirt, von dem Quotienten 15 ſubtrahirt, der Reſt mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, worauf 100 herauskommt, was war die genommene Zahl?

Man nehme 80 für ſie an, ſo kommen nach dem angezeigten Verfahren, $11\frac{1}{9}$; nimmt man 135, ſo kommen $33\frac{1}{3}$, ſtatt 100. Man ſage nun, wie der Unterſchied $33\frac{1}{3} - 11\frac{1}{9}$ zu $100 - 11\frac{1}{9}$, ſo $135 - 80$ zu dem Unterſchiede der wahren Zahl von 80. Dieſer Unterſchied iſt 220, alſo die wahre Zahl $220 + 80 = 300$.

Allgemein iſt die Aufgabe, aus der Gleichung, $\left(\frac{mx + a}{b} - c\right) d = e$, die Zahl x zu finden. Wenn man ſtatt der x ein paar andere Zahlen t und u ſetzt, ſo kommen f und g ſtatt e. Nun iſt $g - f = \frac{m(u - t)}{b} d$, und $e - f = \frac{m(x - t)}{b} d$. Folglich iſt $g - f : e - f = u - t : x - t$, welches die angewandte Proportion iſt.

17. Exempel. Aus 10 löthigem (A) und 15 löthigem Silber (B) ſoll ein Werk von 30 Mark 13 löthigen gemacht werden. Wie viel von jedem? — Nach der Regel Falſi ſetze man, von dem Silber A 5 Mark, ſo hat man von B zu nehmen 25 Mark. Dieſes giebt 50 + 375 oder 425 Loth fein. Aber 30 Mark zu 13 Loth ſind nur 390 Mark fein. Man nehme von A 9 Mark, alſo von B 21 Mark, ſo erhält man 405 Loth fein. Hier hat die Vermehrung des Silbers A eine Verminderung des feinen Silbers in der ganzen Maſſe hervorgebracht, wie es begreiflich iſt. Man ſage nun, wie 425 — 405 zu 425 — 390, ſo 9 — 5 zu dem Unterſchiede der richtigen Zahl und der angenommenen 5. Dieſer iſt 7, alſo muß man von A 12, von B 18 Mark nehmen. Weil weniger fein Silber herauskommen ſoll, ſo muß der Unterſchied 7 zu der Menge 5 des ſchlechten Silbers addirt werden.

18. Die Algebra giebt das geſuchte ſehr leicht, ſ. Gleichung, 25. Die Regel Falſi in dieſem Falle zu erweiſen, ſetze man m, n, r, ſtatt 10, 15, 13, und a ſtatt 30. Die geſuchte Menge von A ſey x, ſo iſt I. $mx + n(a - x) = ra = b$ Loth fein. Man ſetze ſtatt x ſowohl t als u, wodurch ſtatt b nun entſtehen c und d Loth fein, und es iſt II. $mt + n(a-t) = c$; III. $mu + n(a - u) = d$. Hieraus iſt IV. $c - d = (n - m)(u - t)$, und V. $c - b = (n - m)(x - t)$. Daraus iſt $c - d : c - b = u - t : x - t$.

19. In der Analyſis wird die positio falsi oder vielmehr positio prope veri, häufig angewandt, wo die directe Rechnung entweder nicht wohl möglich oder doch beſchwerlicher iſt. Höhere Gleichungen werden aufgelöſet dadurch, daß man für die Wurzel erſt einen nahe kommenden Werth ſucht, dann dieſen in die Gleichung ſetzt, und aus der Abweichung des Werths derſelben von 0 (wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht ſind) eine Verbeſſerung des angenommenen Werthes der Wurzel herleitet, ſ. Gleichung, 231 ff. Th. II. S. 488 ff. Auf eben die Art kann aus einer unbeſtimmten Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen die eine durch die andere in Geſtalt einer Reihe dargeſtellt werden. So verfährt Newton in der Method. flux. et serierum infin. Die Gleichung, $A \tan \varphi + C \sin \varphi = B$ (Kreis, 112) führt auf eine Gleichung vom vierten Grade; ſie wird aber bequemer durch Annäherung aufgelöſet, indem man zuerſt für φ eine Annahme macht, und dieſe folgweiſe verbeſſert. S. Käſtners geom. Sammlung. I. S. 42. In der Aſtronomie läßt ſich bey der Berechnung einer Sonnen- und Mondsfinſterniß für eine gegebene Zeit der Abſtand der Mittelpuncte beider Weltkörper directe berechnen, aber umgekehrt aus dem Abſtande die Zeit zu finden, muß man einige Zeitpuncte annehmen, und aus den zugehörigen Abſtänden der Mittelpuncte

die geſuchte Zeit für den gegebenen Abſtand herleiten. Euler in ſeiner Theoria Planetarum et Cometarum nimmt für eine gegebene Zeit den Abſtand eines Kometen von der Erde durch Schätzung an, berechnet daraus die Elemente der Bahn, und aus dieſen für eine entferntere Zeit wieder den geocentriſchen Ort nach Länge und Breite. Die Vergleichung mit der Beobachtung giebt zu erkennen, wie jene Annahme zu verbeſſern ſeyn möge. Newton verfährt auf eine ähnliche Art, de mundi Systemate, in fine Princip. L. III. prop. 41.

Reguläre Figur, ſ. Vieleck.

Reihe (Series) iſt erſtlich eine Folge von Größen, welche nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze gebildet werden; zweytens eine nach irgend einem Geſetze entwickelte Folge der Theile einer Größe, welche eine Function einer andern iſt, nach deren Potenzen gewöhnlich die Glieder der Reihe fortſchreiten. Die in einer Reihe auf einander folgenden Größen oder Theile heißen die **Glieder** (Termini) derſelben.

Die Glieder einer Reihe der **erſten Claſſe** ſind geſonderte, vollſtändige Größen, gleich den Ordinaten an eine Linie. Die Stellenzahlen derſelben ſind den Abſciſſen zu vergleichen. Dieſe nennt man auch die Zeiger (indices). Daher können die Reihen dieſer Claſſe interpolirt werden, indem zwiſchen je zweyen immer andere gedacht werden können, die nach demſelben Geſetze, zufolge der Stellenzahl oder des Zeigers, gebildet werden. Hingegen in den Reihen der **zweyten** Claſſe findet keine Interpolation ſtatt. Die Reihe wird fortgeſetzt, das iſt, es werden zu den berechneten Gliedern mehrere zugefügt, bis entweder die Reihe vollſtändig geworden iſt (abbricht), oder bis der Werth der Function hinlänglich genau gefunden iſt.

Die

Die Reihen der erſten Claſſe heißen oft und ſchicklich Progreſſionen.

1. Die einfachſte Reihe iſt die arithmetiſche der erſten Ordnung, in welcher die Unterſchiede zweyer nächſten Glieder, nach derſelben Richtung genommen, gleich groß ſind, als in nachſtehender,

$a; 2a-b; 3a-2b, 4a-3b, \ldots na-(n-1), b, \ldots$

welche rückwärts fortgeſetzt iſt,

$b, 2b-a, 3b-2a, 4b-3a, \ldots nb-(n-1)a, \ldots$

Die Glieder dieſer Reihe ſind die Ordinaten der einfachſten Linie, der geraden, wenn die Stellenzahl n der Abſciſſe proportional, oder der Quotient iſt, den die Abſciſſe, durch eine gewiſſe lineariſche Einheit dividirt, giebt. Entgegengeſetzte Werthe der Glieder zeigen entgegengeſetzte Lage oder Richtung der Ordinaten an. S. Linie, gerade.

2. Potenzen, deren Wurzeln die Glieder einer einfachen arithmetiſchen Reihe ſind, bilden eine arithmetiſche Reihe einer höhern Ordnung. Dieſe Reihen werden zu der Claſſe der arithmetiſchen gerechnet, weil die zweyten, dritten oder folgenden Unterſchiede der Glieder, dem Exponenten der Potenz gemäß, beſtändige Werthe erhalten. So die Reihen,

$(a+b)^2, (a+2b)^2, (a+3b)^2 \ldots (a+nb)^2 \ldots$

$(a+b)^2, (a+2b)^3, (a+3b)^3 \ldots (a+nb)^3 \ldots$

Für jene ſind die zweyten Unterſchiede, nämlich $2b^2$, für dieſe die dritten, nämlich $6b^3$, beſtändig. Siehe Potenz, 27. ff.

3. Nimmt man ſtatt der gleichen Factoren bey den Potenzen, ungleiche Factoren, ſo bilden die Producte aus denſelben ebenfalls eine arithmetiſche Reihe, deren Ordnung durch die Anzahl der Factoren beſtimmt wird. Eine Reihe der zweyten Ordnung iſt dieſe:

$(a+b)(c+d); (a+2b)(c+2d); (a+3b)(c+3d); \ldots (a+nb)(c+nd) \ldots$

eine der dritten Ordnung,

$(a+b)(c+d)(e+f)$; $(a+2b)(c+2d)(e+2f)$; .... $(a+nb)(c+nd)(e+nf)$... u. ſ. w.

Die Glieder dieſer Reihen werden durch die Ordinaten paraboliſcher Curven dargeſtellt, die von der zweyten Ordnung durch Ordinaten an eine gemeine Parabel. Die Stellenzahl n des Gliedes iſt der Abſciſſe proportional. Die Gleichung einer paraboliſchen Curve iſt $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \lambda x^m$. Die Vergleichung mit der Form des Gliedes giebt die Werthe der Coefficienten. S. Parabeln höherer Art.

4. Eine reciproke arithmetiſche Reihe beſteht aus Brüchen, deren Zähler eine beſtändige Größe iſt, die Nenner eine einfache arithmetiſche Reihe bilden. Die Form des nten Gliedes iſt $\frac{c}{na-(n-1)b}$.

Das Anfangsglied, A, für $n = 0$, iſt $\frac{c}{b}$; das nächſtfolgende, B für $n = 1$, iſt $\frac{c}{a}$. Nimmt man $c = ab$, ſo iſt $A = a$; $B = b$, und das allgemeine Glied der Reihe iſt $P = \frac{ab}{na-(n-1)b}$; das nächſtfolgende $Q = \frac{ab}{(n+1)a-nb}$.

Es iſt $P - Q = \frac{a-b}{ab} PQ$, oder $a - b : P - Q = ab : PQ$.

Je drey auf einander folgende Glieder der reciproken arithmetiſchen Reihe ſind in einer ſtetigen harmoniſchen Proportion. Es ſeyn dieſe, P, Q, R, ſo iſt

$$a - b : P - Q = ab : PQ,$$
$$a - b : Q - R = ab : QR.$$

Daraus iſt

$$P - Q : Q - R = P : R.$$

eine ſtetige harmoniſche Proportion. S. dieſen Artikel.

Dieſe Proportion giebt die beiden,

$$2P - Q : Q = P : R,$$
$$2R - Q : Q = R : P;$$

und jede dieſer die Proportion,

$$P + R : R = 2P : Q,$$

oder $$R + P : P = 2R : Q.$$

5. Ein Glied einer reciproken arithmetiſchen Reihe werde durch $\frac{a}{a - bx}$ ausgedrückt, wo x die Stellenzahl des Gliedes iſt. Dieſer Quotient entwickelt giebt die geometriſche Reihe,

$$1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4} + \text{etc.}$$

Der entgegengeſetzte Werth des Gliedes, nämlich $\frac{a}{bx - a}$, werde auch durch die Diviſion, auf gleiche Art wie jener, entwickelt, ſo ergiebt ſich die geometriſche Reihe,

$$\frac{a}{bx} + \frac{a^2}{b^2x^2} + \frac{a^3}{b^3x^3} + \frac{a^4}{b^4x^4} + \text{etc.}$$

Es iſt die erſtere rückwärts fortgeſetzt. Beide Reihen zuſammen genommen, ins Unendliche gedacht, heben ſich, wie ſich die Quotienten, woraus ſie entſtanden ſind, einander aufheben; freylich nicht vermöge entgegengeſetzter gleicher Quantität.

6. Der Quotient und die entwickelte Reihe iſt nur ein einzelner Fall, der einem allgemeinen untergeordnet iſt. So wie in einer geometriſchen Reihe jedes Glied aus dem vorhergehenden durch die Multiplication mit derſelben Größe entſteht, ſo kann auch jedes Glied einer Reihe aus zwey, drey oder mehrern vorhergehenden Gliedern, durch die Multiplication jedes

mit einem beſtändigen Factor zuſammengeſetzt werden. Es ſey ein Glied S, die vorhergehenden R, Q, P, u. ſ. f. Nun ſey jedes $S = \alpha R + \beta Q$, oder $S = \alpha R + \beta Q + \gamma P$, wo α, β, γ die beſtändigen Factoren ſind. Dieſe Reihen, welche rücklaufende (recurrentes) heißen, entſtehen durch Entwickelung des Bruches $\frac{a + bx + cx^2 \ldots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots}$. Davon in dem Artikel, rücklaufende Reihen.

Eine ſehr zuſammengeſetzte, aber doch völlig regelmäßige Bildung einer Reihe von Größen, aus allen vorhergehenden Gliedern, zeigt die Reihe der Bernoulliſchen Zahlen; ſ. Th. I. S. 258.

7. Die Glieder einer Reihe können auch transſcendente Functionen der Stellenzahl ſeyn. Dieſe Stellen können durch Winkel angegeben werden, die in arithmetiſcher Progreſſion oder etwa einer andern genommen werden, und die Glieder der Reihe ſind ihre Sinus oder Tangenten oder ſonſt eine Function dieſer Winkel. Dergleichen ſind in dem Artikel, Einſchalten, 36 — 39 angegeben. Eine logarithmiſch-transſcendente iſt noch in folgendem Ausdruck enthalten:

$$y = p + q \cdot 10^{(m+x):n}.$$

Eine dieſer Art kommt in Lamberts Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers S. 66. vor. Dergleichen Reihen werden bey praktiſchen Unterſuchungen angewandt, wo aus den durch Beobachtung gefundenen Werthen einer Größe, welche von einer andern abhängt, der Werth derſelben allgemein angegeben werden ſoll, und die einfachen Formeln (3.) nicht Genüge leiſten.

8. Die **zweyte** ausgebreitetere **Claſſe** der Reihen enthält diejenigen, welche von dem Anfangsgliede an die entwickelte Darſtellung der Function einer veränderlichen Größe ſind, nach deren Potenzen die Glieder der Reihe geordnet werden. Dieſe Glieder ſind nun

Theile eines Ganzen, deren Stellen die dritte veränderliche Größe bey dieſer Entwickelung ausmachen. Die Functionalgröße und die Function ſelbſt ſind wie Abſciſſen und Ordinaten an einer krummen Linie zu betrachten. Die Functionalgröße, nach deren Potenzen die Reihe fortſchreitet, mag man bequem die Progreſſionalgröße nennen. Anſtatt der Fortſchreitung nach den Potenzen einer veränderlichen Größe wird auch oft eine Fortſchreitung nach den Vielfachen eines veränderlichen Winkels genommen, wenn bey geometriſchen Unterſuchungen Winkel und Abſtände von einem Puncte zu einander geordnet werden.

9. Dieſe Reihen dienen einen genäherten Werth einer Größe anzugeben, den man ſonſt entweder gar nicht erhalten kann, oder nicht anders als unter einer zu verwickelten Geſtalt findet, wiewohl zu dieſem Zwecke oft noch gewiſſe Vorbereitungen erfordert werden, wofern die Annäherung ſchnell genug geſchehen ſoll. Manchmahl gewähren Reihen gar keine Annäherung. Um dieſer Anwendung willen iſt die Theorie der Reihen von den neuern Mathematikern fleißig bearbeitet worden. Außerdem laſſen ſich über Reihen, als Formen einer Größe überhaupt, merkwürdige Unterſuchungen anſtellen, in Abſicht auf die Entwickelung ihrer Glieder, die allgemeine Form derſelben, die Summe der Glieder und die Vergleichungen verſchiedener Reihen unter einander.

10. Die Analyſis bietet gleich beym Eingange zwey merkwürdige Entwickelungen dar, der Potenz einer zwey- oder mehrtheiligen Größe und eines Bruches. Die unbeſtimmte Potenz des Binomium $a+x$ wird durch eine Reihe dargeſtellt, in welcher die Progreſſionalgröße x iſt, und die Coefficienten aus der Größe a und der Stelle eines Gliedes gebildet werden. Die Function der Stelle iſt veränderlich, aber nach einem beſtimmten Geſetze. Die Reihe der Coefficienten in derſelben Stelle bey veränderten Exponen-

ten des Binonium machen eine Reihe der erſten Claſſe und zwar eine arithmetiſche einer gewiſſen Ordnung aus, wo die Function der Stellenzahl dieſelbe bleibt.

11. Die Reihen, welche aus der Entwickelung eines Bruches entſtehen, deſſen Zähler und Nenner nach den Potenzen einer veränderlichen oder unbeſtimmten Größe geordnet ſind, das iſt, die rücklaufenden, können auch als Ganze angeſehen werden, die eine Function der veränderlichen Progreſſionalgröße ſind. Die Glieder der Reihe laſſen ſich aber auch, wie oben (5.) geſchehen iſt, als abgeſonderte Größen betrachten, die nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze gebildet werden.

12. Wenn eine veränderliche Größe y eine ungeſonderte Function (functio implicita) einer andern x iſt, ſo entſtehen durch die Entwickelung derſelben mehrere Reihen für die verſchiedenen neben einander beſtehenden Fortſchreitungen der y, wie in dem Artikel, Function, 41. gezeigt iſt. Dieſe Reihen ſtellen die Ordinaten an den verſchiedenen Zweigen einer Curve vor. Sie ſind oft nur für kleine Portionen der krummen Linie brauchbar, dienen aber hier beſonders die Eigenheiten einer Curve an einzelnen Stellen anzugeben.

13. Wenn eine Größe y durch eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe gegeben wird, ſo kann es erforderlich ſeyn, umgekehrt x durch y auszudrücken. Dieſes iſt, was man die **Umkehrung einer Reihe** nennt.

14. Hieher gehört auch der Fall, wenn die Wurzeln einer algebraiſchen Gleichung durch eine Reihe ausgedrückt werden ſollen, die nach den Potenzen einer unter den gegebenen Größen fortſchreitet. Dieſes hat inzwiſchen manchmahl Schwierigkeit in Rückſicht der Annäherung zu dem Werthe einer jeden Wurzel.

15. Die Integrationen, welche auf transſcendente Größen führen, geben mancherley Reihen, von wel-

chen insbeſondere die cyklometriſchen und logarithmiſchen wichtige Beyſpiele ſind. Die cyklometriſchen vorzüglich laſſen jede eine Eigenheit in der Bildung der Coefficienten zu der Progreſſionalgröße bemerken, ſ. Cyklometrie.

16. Die Veränderung einer Function y von einer Größe x durch die Veränderung von x darzuſtellen, dient eine Reihe, welche nach den Potenzen der Veränderung von x geordnet iſt, mit Coefficienten, die aus den Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, und höherer Ordnungen entſtehen, welches der Taylorſche Lehrſatz angiebt.

17. Eine jede Function von x aus der Gleichung, $y = x - z\varphi x$ durch dieſelbe Function von y mit ähnlichen Functionen von y wie φx von x iſt, nach den Potenzen von z geordnet, darzuſtellen, geſchieht durch eine Reihe, welche la Grange angegeben hat, und die nach dieſem Analyſten zu benennen iſt, ſ. la Grange's Lehrſatz.

18. Als eine beſondere Art von Reihen kann man die Formen anſehen, welche eine Größe durch ein Product von unendlich vielen Factoren darſtellen, wie den $\sin \frac{m\pi}{2n}$ und $\cos \frac{m\pi}{2n}$ in Cyklometrie, 28, daher auch die $\tang \frac{m\pi}{2n}$.

Die Kettenbrüche oder continuirlichen Brüche machen auch eine eigenartige Reihe durch die fortgeſetzten, in einander geſchobenen Quotienten aus.

19. Die Glieder einer Reihe der zweyten Claſſe können wieder aus Reihenausdrücken zuſammengeſetzt seyn. Ein ſolcher Fall iſt bey der unbeſtimmten Rectification der Ellipſe und Hyperbel.

20. Es ſey z eine Function von x und y,

wie die Ordinaten z an eine Fläche eine Function der Coordinaten x, y in der Grundfläche durch die Axen derſelben ſind. Die aus der Gleichung zwiſchen den x, y, z entwickelte Function z hat die Form,

$$\begin{aligned} z = A &+ A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + \text{etc.} \\ &+ By + B'xy + B''x^2y + B'''x^3y + \text{etc.} \\ &+ Cy^2 + C'xy^2 + C''x^2y^2 + \text{etc.} \\ &+ Dy^3 + D'xy^3 + \text{etc.} \\ &+ Ey^4 + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

21. Bey den Reihen der zweyten Claſſe kommt es auf zwey Momente an, erſtlich auf die *Fortſchreitung der Exponenten* zu den Potenzen der Progreſſionalgröße, zweytens auf das *Geſetz der Coefficienten.*

22. Die Exponenten der Progreſſionalgröße nimmt man in einer arithmetiſchen Progreſſion. Denn wenn auch bey einer ſolchen Fortſchreitung einige Glieder ausfallen, ſo muß der Coefficient der zugehörigen Potenz gleich Null gefunden werden. Die Progreſſion der Exponenten wird zufolge der Beſchaffenheit der Function beſtimmt. Sie enthält die *Geſtalt* oder *Form* der Reihe, ſ. Function.

23. Wenn die Exponenten der veränderlichen Größe nach der angenommenen Folge der Glieder zunehmen, ſo heißt die Reihe eine *ſteigende*, wenn ſie abnehmen, eine *fallende.* Negativ zunehmende Exponenten geben eine fallende Reihe; negativ abnehmende eine ſteigende. Denn die relative Vergrößerung einer negativen Größe geſchieht durchs Addiren einer poſitiven Größe, die relative Verminderung durchs Addiren einer negativen Größe oder Subtraction einer poſitiven. Nach der abſoluten Größe der Exponenten läßt ſich nicht beſtimmen, ob eine Reihe eine ſteigende oder fallende ſey.

24. Die ſteigenden Reihen ſind zur Darſtellung

des genäherten Werthes einer Function erforderlich, wenn die Progreſſionalgröße kleiner iſt als die Einheit; die fallenden, wenn ſie größer als die Einheit iſt. Wenn keine Einheit feſtgeſetzt iſt, ſo muß man zur Progreſſionalgröße den Quotienten der Functionalgröße durch eine gegebene nehmen. Das Verhältniß beider zeigt nun, ob die Progreſſionalgröße ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch iſt.

25. Der *allgemeine Coefficient* der Progreſſionalgröße beſtimmt vornämlich das Geſetz der Fortſchreitung der Glieder in einer Reihe. Mit der zugehörigen Potenz der Progreſſionalgröße verbunden macht er das *allgemeine Glied* (terminus generalis) der Reihe aus. Dieſes iſt der analytiſche Ausdruck eines unbeſtimmten Gliedes durch die unbeſtimmte Zahl ſeiner Stelle, oder überhaupt durch das zugehörige Glied einer arithmetiſchen Reihe.

26. Z. B. In der Reihe, die durch die Entwickelung des Quotienten $\frac{a}{\alpha - \beta x}$ entſteht, iſt das allgemeine Glied $= \frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}} x^n$, wo n die Stelle des Gliedes nach dem Anfangsgliede $\frac{a}{\alpha}$ iſt, welches für n $= 0$ gilt. In der Reihe für einen Kreisbogen φ, deſſen Sinus $= x$ iſt, iſt das allgemeine Glied

$$= \frac{2m-3 \,.\, 2m-5 \ldots 3 \,.\, 1}{2m-2 \,.\, 2m-4 \ldots 4 \,.\, 2} \,.\, \frac{1}{2m-1} \, x^{2m-1},$$

wo m die Stelle des unbeſtimmten Gliedes vom Anfange an bezeichnet. Cyklometrie, 1.

27. Iſt das allgemeine Glied bekannt, ſo iſt dadurch die Größe, welche durch die Reihe dargeſtellt wird, in der That gegeben, wenn ſie auch für manche Werthe der Progreſſionalgröße nur ſehr unvollſtändig

durch wirkliche Berechnung gefunden werden könnte. Denn es kommt im Allgemeinen auf die Form der Größe, nicht auf ihr numeriſches Verhältniß zu einer gegebenen an. Die Reihe für den Kreisbogen φ durch die Tangente t, nämlich $\varphi = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 +$ etc., iſt zwar nicht brauchbar zur Berechnung des Bogens aus ſeiner Tangente, wenn dieſe größer als 1, oder φ größer als 45° iſt. Inzwiſchen wird die Form des Bogens in dem letztern Falle eben ſo gut und richtig dargeſtellt, als wenn t ein kleiner Bruch iſt. Der Bogen iſt in beiden Fällen der Unterſchied zweyer Reihen, die in dem einen Falle beide endlich, in dem andern beide unendlich groß, doch mit einem endlichen Unterſchiede ſind. So iſt der natürliche Logarithme x einer Zahl $1 + y$ die Reihe $y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{5} y^5 -$ etc. und allgemein richtig, wenn man ſie ſich als vollſtändig gedenkt, wiewohl ſie zur Berechnung nur dann brauchbar iſt, wenn y ein wahrer Bruch iſt, das iſt, wenn die Zahl zwiſchen 1 und 2 fällt.

28. Wenn das allgemeine Glied ſich nicht angeben läßt, ſo iſt die Kenntniß von der Beſchaffenheit der Reihe, und der Function, die durch ſie angegeben werden ſoll, mangelhaft, und bloß auf die wirklich berechneten Glieder eingeſchränkt, wobey man nicht beurtheilen kann, wie genau ſie den Werth der Reihe liefern.

29. Wie das allgemeine Glied gefunden werde, darüber läßt ſich im Allgemeinen keine Vorſchrift geben. Vorzügliche Beyſpiele liefern der binomiſche und

polynomiſche Lehrſatz, die cyklometriſchen und logarithmiſchen Reihen, die Bernoulliſchen Zahlen.

30. Wenn die arithmetiſche Summe einer Anzahl von Gliedern einer unendlichen Reihe von dem vollſtändigen Werthe derſelben immer weniger verſchieden wird, je größer die Anzahl der Glieder genommen wird, ſo heißt die Reihe eine convergirende oder eine ſich nähernde. Iſt für eine kleine Anzahl von Gliedern der Unterſchied von dem Totalwerthe verhältnißmäßig klein, ſo convergirt die Reihe ſchnell, in dem entgegengeſetzten Falle langſam. Die Convergenz oder Annäherung hängt nicht von der Kleinheit der Glieder ab. Die harmoniſche Reihe, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ etc. convergirt nicht, wenn gleich die Glieder immer kleiner werden. Denn ihre Summe iſt unendlich groß. Die Reihe, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ etc. oder die Reihe, $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} +$ etc. nähert ſich dem Totalwerthe (dem halben Quadranten eines Kreiſes mit dem Halbmeſſer = 1) ſehr langſam. So auch die Reihe, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ etc. oder dieſe, $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} +$ etc. welche die natürliche Logarithme von 2 iſt. Man hat berechnet, daß tauſend Millionen Glieder nöthig ſind, um durch dieſe Reihe den log. 2 bis auf die neunte Decimalſtelle richtig zu finden.

31. Wenn die Summe irgend einer Anzahl von Gliedern einer Reihe ſich von dem Totalwerthe immer mehr entfernt, je größer die Anzahl der Glieder wird, ſo divergirt die Reihe. Dieſes geſchieht, wenn die Glieder nach ihrer Folge, von irgend einem Gliede an, immer größer werden. Z. B. die Reihe für den Kreisbogen, deſſen Tangente $= t$, und Halbmeſſer $= 1$ iſt, nämlich $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 -$ etc. wenn t größer als 1 iſt. Die Werthe dieſer Reihe ſind abwechſelnd poſitiv und negativ, und dabey abſolut zunehmend. Z. B. für $t = 2$ iſt der Bogen $= 1{,}107$. .) So auch die Reihe für den natürlichen Logarithmen einer Zahl $1 + y$, nämlich $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 -$ etc. wenn die Zahl größer als 2 iſt. Die Reihe, $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 +$ etc. iſt für jeden Werth von x, der größer als 1 iſt, divergirend, und entfernt ſich immer mehr von dem Totalwerthe $\frac{1}{(1+x)^2}$. Für $x = 1$ iſt ein Stück dieſer Reihe, $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc. abwechſelnd poſitiv und negativ, und dabey zunehmend. Der Totalwerth iſt $= \frac{1}{4}$. Die hypergeometriſche Reihe $1 - 2 + 6 - 24 + 120 -$ etc. gehört gleichfalls hieher. Die Glieder von Anfang an genommen geben die Werthe, $1, - 1, + 5, - 19, + 101$, etc. der Totalwerth iſt $= 0{,}4036524$..

32[a]. Eine Reihe kann auch anfangs convergiren, zuletzt aber divergirend werden. Dies iſt der Fall mit folgender Reihe

$$\frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2.T^4} - \frac{1.3.5}{2^3.T^6} + \frac{1.3.5.7}{2^4.T^8} - \text{etc.}\right)$$

welche den Werth des Integrals $\int dt.e^{-t^2}$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt, von $t = T$ bis $t = \infty$ genommen, angiebt. Für $T = 2$ nämlich iſt das 12te Glied des eingeklammerten Factors, $\frac{1.3.5 \ldots\ldots 21}{2^{11}.T^{22}}, = \frac{13749310575}{8589934592}$, alſo ſchon > 1. Deſſen ungeachtet können die erſten convergirenden Glieder der Reihe ſicher gebraucht werden, den Werth des Integrals zu berechnen. Die übrigen Glieder der Reihe nämlich, welche vernachläſſigt werden, laſſen ſich auf ein beſtimmtes Integral bringen, deſſen Werth mit dem des letzten in Rechnung gebrachten Gliedes verglichen nur klein iſt. Reihen dieſer Art können ganz ſchicklich halbconvergirende heißen.

32[b]. Es giebt auch Reihen, die weder convergiren, noch divergiren, ſondern innerhalb gewiſſer Gränzen von dem eigentlichen Werthe wechſelsweiſe in Plus und Minus unterſchieden bleiben, dergleichen iſt dieſe, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. welche aus dem Quotienten $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 -$ etc. entſteht, wenn darin $x = 1$ geſetzt wird. Dieſe Reihe kann zur numeriſchen Rechnung nur angewandt werden, wenn x kleiner als 1 iſt, da man bey demjenigen Gliede ſtehen bleibt, welches nicht größer iſt als der Bruch, den man nach dem nöthigen Grade der Genauigkeit weglaſſen kann. Sonſt aber muß die Ergänzung beygefügt werden. Dieſe iſt, nach dem Gliede $\pm x^n$, der Reſt dividirt durch $1 + x$, alſo $\mp \frac{x^{n+1}}{1+x}$, und für $x = 1$ iſt ſie

$= + \frac{1}{2}$. Wird dieſe zu der Reihe $+ 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \pm 1$ hinzugefügt, ſo iſt die Summe $= \frac{1}{2}$. Sonſt wäre ſie entweder 0 oder + 1, bliebe alſo eigentlich unbeſtimmt, da man weder mit + 1 noch mit — 1 abbrechen darf.

33. Bey der Entwickelung der Wurzeln einer algebraiſchen Gleichung durch Reihenausdrücke, kommen auch dergleichen ſchwankende Reihenſummen vor, wie man ſie nennen mag. Die Reihen der Sinus und Coſinus, deren Winkel in arithmetiſcher Fortſchreitung ſind, ſind auch von dieſer Art, ſ. Goniometrie, 72 ff.

34. Man muß daher in der Lehre von den Reihen den Begriff einer Summe erweitern, und darunter, bey den Reihen der zweyten Claſſe, diejenige Function verſtehen, aus deren Entwickelung eine Reihe hervorgeht. Dieſe mag man bey divergirenden Reihen die analytiſche nennen, um ſie von der arithmetiſchen Summe, welche die gemeine iſt, zu unterſcheiden. Ein merkwürdiges Beyſpiel geben die Summen der Potenzen ganzer Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen (Potenz, 49. u. folgg.)

35. Die Erklärung der Frage, wie die Reihe, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \frac{1}{2}$ ſeyn müſſe, hat einige Mathematiker beſchäftigt. Guido Grandi glaubte, daß aus unzählig vielen $1 - 1 = 0$ etwas endliches entſtehen könne, und ſuchte darin eine Erklärung der Schöpfung aus Nichts. Leibnitz, nach welchem dieſe Reihe auch die Leibnitziſche genannt wird, hat darüber einen langen Brief an Chriſtian Wolf geſchrieben. Acta Erud. Suppl. T. V. a. a. 1713. Er löſet das Räthſel auf eine witzige Art.

Die Reihe iſt für eine gerade Anzahl Glieder = 0, für eine ungerade = + 1. Von einer unendlichen Anzahl Glieder könne man weder ſagen, daß ſie gerade, noch daß ſie ungerade ſey. Daher geſchehe mit bewundernswerther Feinheit (ingenio) der Natur, bey dem Übergange von dem Endlichen zum Unendlichen, auch ein Übergang von dem Disjunctiven zu einem Beſtimmten in der Mitte zwiſchen beiden Disjunctiven liegenden. Da nun bey zwey gleich wahrſcheinlichen Fällen das arithmetiſche Mittel für die Wahrſcheinlichkeit zu nehmen iſt, ſo beobachte auch hier die Natur die Regel der Gerechtigkeit und gebe das Mittel zwiſchen 0 und + 1, das iſt $\frac{1}{2}$. Dieſe Schlußart, ſetzt L. hinzu, ſey zwar mehr metaphyſiſch als mathematiſch, aber doch gründlich.

36. Wenn zu einer Reihe der erſten Claſſe eine andere Reihe geordnet wird, deren Glieder jedes die Summe von ſo vielen Gliedern der erſtern Reihe iſt, als die Zahl dieſes Gliedes anzeigt, und zwar durch eine Function des Zeigers oder der Stellenzahl des Gliedes, ſo heißt dieſe Reihe die ſummirende Reihe (series summatrix) und ein unbeſtimmtes Glied derſelben das ſummatoriſche Glied (terminus summatorius). Dieſes Glied iſt ein analytiſcher Ausdruck, deſſen Werth dem Aggregate von ſo vielen Gliedern der vorgegebenen Reihe als ſeine Stellenzahl anzeigt, gleich iſt. Beyſpiele geben die arithmetiſchen Reihen höherer Ordnungen, als deren Glieder die Summen von Gliedern der nächſt niedrigern ſind (Th. I. S. 201. ff.); auch die Brüche, deren Zähler unveränderlich iſt, und deren Nenner ein Product von Factoren in arithmetiſcher Progreſſion iſt. Differenzenrechnung, 59 ff.

37. Archimedes hat die Summen arithmetiſcher Reihen und einer Reihe von Quadraten der na-

türlichen Zahlen bey geometriſchen Sätzen gebraucht, ſ. Exhauſtions-Methode, Th. II. S. 164. 165, (wo nur am erſtern Orte noch zuzuſetzen iſt, daß die Unterſchiede dem kleinſten der Glieder gleich ſeyn.) Bey der zweyten Methode die Parabel zu quadriren, gebraucht er die Summirung einer geometriſchen Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$.

Cavaleri fand, wie ſich die Summen der nten Potenzen aller parallelen Linien in einem Rechtecke und aller Ordinaten in dem Dreyeck, das die Hälfte deſſelben iſt, verhalten, nämlich wie n + 1 : 1. Dieſes machte er in den exercitationibus geometricis, Bonon. 1647 bekannt. Für die Cuben und Biquadrate bewies er dieſes Verhältniß, für höhere Potenzen ſchloß er es aus der Analogie. Montucla hist. des Mathém. T. II. p. 40. 41.

Wallis erweiterte dieſe Summirung unendlicher Reihen auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Die Beweiſe ſind nicht evident. Für die Summen endlicher Reihen der erſten bis ſechſten Potenzen findet er durch Induction Formeln. Arithmetica Infinitorum, edita a. 1655. ſ. Th. I. S. 214 ff.

Faulhaber hat aber viel früher, im Anfange des 17ten Jahrhunderts, einen allgemeinen Ausdruck (coſſiſche Quantität nennt er es) für die Summen der fünften und ſechſten Potenzen der natürlichen Zahlen angegeben. Käſtners Geſchichte der Mathematik, Bd. III. S. 123.

Die erſten Proben der Darſtellung einer transſcendenten Größe durch eine unendliche Reihe von Theilen werden Brounckers und Mercators Reihen ſeyn. Von der letztern ſ. Logarithmen, 139 — 142. Darauf folgten die cyklometriſchen Reihen von Leibnitz, Gregory und Newton.

New-

Newton zeigte in ſeinen analytiſchen Schriften, wie die Reihen zur Darſtellung einer Größe aus einer endlichen Gleichung, und zu Integrationen angewandt werden; ſ. Differentialrechnung, Th. I. S. 831. ff.

Die Summirung der Progreſſionen von Brüchen, deren Zähler und Nenner nach einem gewiſſen Geſetze gebildet werden, beſchäftigte einige der angeſehenſten Mathematiker. Leibnitz zeigte in den Actis Erud. 1682 an, daß die unendlichen Reihen

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\text{etc.}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}=\frac{1}{4}.$$

Die Nenner ſind von der Form $m^2 - 1$. In der Folge gab Leibnitz auch von einigen Reihen mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder die Summe an.

Jakob Bernoulli ward hiedurch vermuthlich veranlaßt, dieſe Unterſuchung ausführlicher vorzunehmen, in zwey akademiſchen Abhandlungen: Positiones arithmeticae de seriebus infinitis, earumque summa, Basil. 1689. 92. Hier erweiſet er auch die Summen jener Leibnitziſchen Reihen. Die Fortſchreitungen im Zähler und im Nenner ſind arithmetiſche, geometriſche, die figurirten Zahlen, die von der Form $m^2 - 1$. Auch findet er den merkwürdigen Satz: in einer Reihe von Brüchen, deren Zähler ſich alle gleich ſind, und die Nenner die nten Potenzen der natürlichen Zahlen (ſie ſelbſt einbegriffen), verhält ſich die Summe aller Glieder in den ungeraden Stellen zu der Summe aller in den geraden, $2^n - 1 : 1$; alſo für die Zahlen ſelbſt wie 1 : 1, für die Quadrate wie 3 : 1, für die Würfel wie 7 : 1; für die Biqua-

drate wie 15 : 1. — Auf jene zwey Diſſertationen ſind noch drey gefolgt, worin gezeigt wird, wie die Quadraturen und Rectificationen krummer Linien durch Reihenausdrücke bewerkſtelligt werden. Hier auch von der Darſtellung einer irrationalen Größe durch eine Reihe und von dem Gebrauche der unbeſtimmten Coefficienten die Relation einer veränderlichen Größe zu einer andern auszudrücken.

Joh. Bernoulli hat ſich auch mit dieſem Gegenſtande beſchäftigt. Seine Aufſätze darüber ſtehen in dem vierten Theile ſeiner Werke, der die noch nicht gedruckten Aufſätze enthält. Hier findet ſich auch (Nr. 152) der ſchöne Satz über die Summe der geraden reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen.

Die Beſchäftigung mit der Lehre von der Berechnung wahrſcheinlicher Fälle gab Gelegenheit die arithmetiſchen Reihen höherer Ordnungen, wovon die figurirten Zahlen eine beſondere Gattung ſind, genauer zu unterſuchen. Newton hatte die allgemeinen Formeln zum Gebrauch beym Einſchalten ſchon angegeben (Th. I. S. 216). Montmort, von dem ein ausführliches Werk über die Glücksſpiele (Essai d'Analyse sur les jeux de Hazards, 2de édit. à Paris 1714) vorhanden iſt, gab darin pag. 64. eine allgemeine Formel, für die Summen ſolcher Reihen, von welcher er auch zeigt, wie durch dieſelbe die Potenzen der Glieder arithmetiſcher Reihen irgend einer Ordnung ſummirt werden können. Jakob Bernoulli hatte in der Arte conjectandi (Basileae, 1713) nur die Summen der figurirten Zahlen angegeben, und blos an einem Beyſpiele gezeigt, wie nach deren Vorbilde allgemeinere Reihen gemacht werden können. In den Philos. Transactions 1718. nr. 353 hat Montmort noch verſchiedene Summirungen gezeigt, unter andern von Producten, deren Factoren in arithmetiſcher Progreſſion ſind, als $a(a+n)(a+2n)+(a+n)(a+2n)(a+3n)+(a+2n)(a+3n)(a+4n)$

+ etc. Oder von Brüchen, deren Nenner dieſe Form haben, da die Zähler nach einem andern Geſetze beſtimmt werden, oder auch nach demſelben Geſetze wie die Nenner.

Durch die Lehre von der Berechnung der Wahrſcheinlichkeit ward Moivre auf die rücklaufenden Reihen geleitet, deren Theorie er in der Schrift, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini 1730, vortrug.

Ein noch gegenwärtig ſehr geſchätztes Werk iſt Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, auct. Iacobo Stirling. Londini, 1730. 154 pag. in 4. Es iſt darin nicht die Abſicht zu finden, welche Reihen ſummirbar ſind, ſondern durch ſchickliche Verwandlungen der Formen ſolche Reihen, die langſam convergiren, ſchnell convergiren zu machen. Eine mäßige Anzahl von Gliedern einer Reihe wird etwa nur unmittelbar zu berechnen ſeyn, worauf ſich für alle übrigen eine ſchnell convergirende Reihe ergiebt, in ſolchen Fällen nämlich, wobey ſich des Verfaſſers Methode anwenden läßt. In dem Artikel, Summirung der Reihen, wird dieſes Verfahren beſchrieben werden.

Der zweyte Theil von Eulers Institt. Calculi differentialis enthält viele und vortreffliche Unterſuchungen über die Theorie der Reihen, ihre Transformation, Entwickelung und Summirung.

Das ausführlichſte Werk über die Reihen iſt Traité des différences et des séries, par Lacroix, sec. ed. à Paris 1819., welches zu des Verfaſſers Werk über die Differential- und Integralrechnung gehört. Es enthält ſehr allgemeine Unterſuchungen, die zum Theil aus einer ſehr tiefſinnigen Abhandlung von la Place über die Reihen, Mém. de l'Acad. des Sc. 1779, p. 207 — 309 genommen ſind.

Einzelne Abhandlungen über die Reihen findet man in Murchards Literatur der mathem. Wiſſenſchaften Th. II. S. 262 — 273 verzeichnet. Freylich nicht vollſtändig, wie gewöhnlich.

Maclaurin giebt in ſeinem Werke über die Fluxionen, Ch. X. Bemerkungen über die Summen der Progreſſionen, betreffend ihre Gränzen, ihre Beſchaffenheit und die Mittel ſich ihnen ſchnell zu nähern.

Landen liefert in ſeinen Mathematical Lucubrations, London 1755 einige allgemeine Lehrſätze, die zur Summirung der Reihen, es ſey vollſtändiger oder genäherter, dienen. So auch Thomas Simpſon in ſeinen Miscellaneous tracts, London, 1757. Hutton hat ſich auch mit dieſem Gegenſtande beſchäftigt, in den Tracts on mathematical and phyloſophical subjects, London, 1812. Seine Methode, aus der berechneten Summe einer Anzahl Glieder in einer ſehr langſam convergirenden Reihe ſich dem wahren Werthe der Reihe bald zu nähern, iſt ſinnreich und einfach.

Lorgna's Methode zur Summirung der Reihen (Specimen de seriebus convergentibus. Veronae, 1775) beſteht in Zurückführung derſelben auf ein beſtimmtes Integral. Die erſte Idee, die Summirung der Reihen auf die Integration einer Differentialformel oder Differentialgleichung zurück zu führen, haben Leibnitz und Joh. Bernoulli gehabt. (Commerc. epistol. Tom. I. p. 213). Euler handelt davon in ſeiner Integralrechnung. Th. 2. Kap. 11.

Pfaff (Verſuch einer neuen Summationsmethode, Berlin, 1788.) ſummirt mehrere Gattungen unendlicher Reihen dadurch, daß ihre Glieder ſelbſt wieder in unendliche Reihen aufgelöſet werden. Dieſe Methode erſtreckt ſich ſehr weit.

Relation iſt die Art, wie eine Größe von andern abhängt. Die Coordinaten an einer krummen Linie haben eine gewiſſe Relation gegen einander, zufolge der Beſchaffenheit der Curve. Dieſe Relation wird hier, wie überhaupt, durch eine Gleichung ausgedrückt.

Das Verhältniß zweyer Größen, es ſey das geometriſche oder das arithmetiſche, iſt die einfachſte Gattung einer Relation.

Relativ iſt, was mit einer Beziehung auf eine andere Größe gedacht wird, in Gegenſetz des Abſoluten. So iſt eine negative Größe etwas relatives, weil dabey Rückſicht auf eine andere, zwar ähnliche, Verbindung der Größen genommen wird, worin dieſe Größe aber in einer andern Beziehung gegen die andern Größen geſetzt iſt. Relativ zunehmen oder abnehmen iſt bey einer negativen Größe abſolut abnehmen oder zunehmen. — Relative Bewegung iſt die Bewegung nach einer Richtung, die von der wirklichen Richtung verſchieden iſt.

Reptorius motus iſt die ſich parallele Bewegung einer krummen Linie längs einer andern Curve, wobey jene dieſe immerfort berührt, indem die Axe jener ſich parallel bleibt. Dadurch wird von einem gegebenen Puncte der bewegten Curve, oder auch von einem Puncte ihrer Axe eine neue Curve beſchrieben. Die Schleifung der bewegten Curve kann entweder ſo geſchehen, daß beide ihre convexen Seiten einander zuwenden, oder daß die convexe Seite der bewegten die concave der andern berührt. Die erzeugte Curve hat die Eigenſchaft, daß jeder Bogen derſelben ſo groß iſt als die Summe oder der Unterſchied der Bogen, welche auf den beiden Curven, der unbewegten und der verſchobenen zu einander und zu dem erzeugten Bogen gehören. Die Summe iſt es, wenn der convexe Bogen

auf dem converen hingleitet, der Unterſchied, wenn dieſes auf der concaven Seite geſchieht.

Joh. Bernoulli hat dieſe Erzeugungsart einer krummen Linie erdacht, die aber nicht weiter benutzt iſt. Operum T. I. Nr. 74.

Reſidual-Analyſis iſt eine beſondere Form der Fluxionen- oder Differentialrechnung, welche Landen in einer Schrift: The residual Analysis, a new branch of the analytic art, London, 1764, vorgeſchlagen hat. Da ich die Schrift nicht zur Hand habe, ſo entlehne ich die folgende Nachricht und Beurtheilung aus Lagrange's Théorie des fonctions analytiques p. 5. Anſtatt der bis dahin von den Engliſchen Geometern unverbrüchlich befolgten Methode der Fluxionen wollte Landen eine blos analytiſche, welche der Differentialrechnung verwandt iſt, ſetzen, nur daß er anſtatt der unendlich kleinen oder ganz verſchwindenden Differenzen der veränderlichen Größen zuerſt verſchiedene Werthe dieſer Größen anſetzt, darauf dieſelben gleich nimmt, nachdem der Factor, der durch dieſe Gleichſtellung Null werden mußte, durch die Diviſion weggeſchafft iſt. Dadurch, ſagt La Grange, werden freylich die unendlich kleinen und verſchwindenden Größen vermieden; allein die Verfahrungsart und die Anwendung der Rechnung ſind unbequem und unnatürlich. Was die Differentialrechnung in Abſicht auf die Strenge der Gründe gewinnen ſoll, verliert ſie wieder in Rückſicht weſentlicher Vorzüge, der Einfachheit ihrer Methode und der Leichtigkeit ihrer Rechnungsart.

Residuum binomiale, ſ. Apotome.

Reſt (Residuum) iſt erſtlich der Überſchuß einer Größe über eine andere, die von jener weggenommen wird; zweytens der Überſchuß einer Größe über das möglich größte Vielfache einer andern, welche als

Diviſor mit jener als Dividenden verglichen wird. In allgemeinen Rechnungen kann ein Reſt auch negativ ſeyn.

Reſt in der erſtern Bedeutung heißt auch der Unterſchied oder Differenz.

Reſt, quadratiſcher, iſt der Überſchuß einer Quadratzahl über das möglich größte Vielfache irgend einer andern Zahl. Wenn dieſe andere Zahl eine Primzahl iſt, ſo kommen den quadratiſchen Reſten, welche aus der natürlichen Zahlenreihe entſtehen, merkwürdige Eigenſchaften zu. Euler hat dieſelben unterſucht in zwey Abhandlungen, welche in den Opuscul. analyt. T. I. enthalten ſind. In der erſten erweiſt er unter andern, daß wenn der Diviſor P eine Primzahl von der Form $4q + 1$ iſt, allemal -1 oder $P - 1$ unter den quadratiſchen Reſten vorkomme, daß aber dies nicht der Fall ſey, wenn der Diviſor die Form $4q + 3$ hat. In der andern Abhandlung zeigt er unter andern auf eine kürzere Art, als dies früher von ihm geſchehen war, daß, wenn p eine Primzahl von der Form $4m + 1$ iſt, es auf merley Art möglich ſey, zwey Quadratzahlen, deren Wurzeln nicht größer als 2m, anzugeben, ſo daß ihre Summe durch p theilbar ſey. Hieraus folgt dann vermittelſt des Satzes, daß die Summe zweyer Quadrate wiederum nur durch eine ſolche Summe theilbar iſt, der Satz, daß jede Primzahl von der Form $4m + 1$ die Summe zweyer Quadrate ſey. Gauß handelt von den quadratiſchen Reſten Disquis. arithm. Sect. IV.

Retrocessio, oder Retrogradatio, oder Retrogressio einer krummen Linie iſt nach Huttons Angabe daſſelbe, was Wendungspunct. Beſſer würde man einen Rückkehrpunct dadurch bezeichnen.

Reversio serierum, ſ. Umkehrung der Reihen.

Reverſionsproblem, ſ. eb. daſ.

Rhabdologia, ſ. Inſtrumentale Arithmetik, Th. II. S. 739. Als Nachtrag zu jenem Artikel mag noch angemerkt werden, daß auch Claude Perrault einen Abacus rhabdologicus angegeben hat, welcher in dem 4ten Th. ſeiner vermiſchten Werke beſchrieben iſt.

Rhetice oder Exegetice wird von Vieta der Inbegriff der Methoden genannt, die Wurzeln einer Gleichung zu finden.

Rhodonea iſt die Benennung gewiſſer krummen, in einem Kreiſe conſtruirten, Linien, die von ihrer Ähnlichkeit mit einer Roſe (ῥοδον) ſo genannt wird. Der Pater Guido Grandi, ein ſehr guter Geometer im Anfange des 18ten Jahrhunderts, übergab im Jahre 1723 der Königl. Geſellſchaft zu London eine Schrift über dieſe Curve, welche aus einer Reihe von Blättern oder aus mehreren, die ſich zum Theil decken, beſteht. Die Fläche jedes Blattes iſt die Hälfte des einſchließenden Kreisſectors. Auf ähnliche Art zeichnete Grandi auch Curven auf einer Kugelfläche, und nannte ſie Cleliae, zu Ehren der Gräfinn Clelia Borromei, welcher er dieſe geometriſchen Blumen widmet, weil ſie im Stande ſey, ihren Geruch zu empfinden und zu ſchätzen. Er hat über beyderley krumme Linien eine beſondere Schrift herausgegeben: Flores geometrici ex Rhodonearum et Cleliarum curvarum descriptione resultantes, Florentiae, 1728.

Rhomboides, ein Parallelogramm mit ſchiefen Winkeln und ungleichen Seiten.

Rhombus, ein Parallelogramm mit ſchiefen Winkeln und gleichen Seiten.

Ein körperlicher Rhombus iſt ein aus

zwey gleichſeitigen und gleichen Kegeln an den Grundflächen zuſammengeſetzter Körper. Archimedes gebraucht dieſe Benennung in der Schrift von Kugel und Cylinder. In dem 19ten Satze des 1ſten Buchs zeigt er, daß ein aus (zwey gleichen) gleichſchenkligen Kegeln zuſammengeſetzter Rhombus gleich iſt einem Kegel, deſſen Grundfläche der Oberfläche des einen jener Kegel, und deſſen Höhe dem von der Spitze des andern Kegels auf eine Seite des erſten gefällten Lothe gleich iſt.

Durch die Formeln unſerer rechnenden Geometrie iſt dieſes leicht erwieſen. Der Halbmeſſer der Grundfläche ſey $= a$, die Höhe jedes Kegels $= b$, ſo iſt der Inhalt eines der Kegel $= \frac{1}{3}\pi aab$; des Rhombus $= \frac{2}{3}\pi aab$. Es ſey φ der halbe Winkel an der Spitze des erzeugenden Dreyecks, ſo iſt die Seite des Kegels $= \frac{a}{\sin\varphi}$, die Oberfläche $= \pi a . \frac{a}{\sin\varphi}$; das Perpendikel von der Spitze des einen Kegels auf eine Seitenlinie des andern $= 2b\sin\varphi$. Nimmt man jene Oberfläche zur Grundfläche, dieſe ſenkrechte zur Höhe eines Kegels, ſo iſt deſſen Inhalt

$$= \frac{1}{3} . \frac{\pi aa}{\sin\varphi} . 2b\sin\varphi = \frac{2}{3}\pi aab.$$

Das griechiſche Stammwort bedeutet im Kreiſe herumdrehen, daher die Benennung Rhombus eigentlich auf den Doppelkegel paßt.

Rhombica linea, ſ. Loxodromie in der zweyten Abtheilung dieſes Werks.

Riccati's Gleichung iſt die Differentialgleichung, $\partial y + ay^2x^m\partial x = bx^n\partial x$. Der Conte Giacomo Riccati legte ſie in den *Actis Erud.*

Supplem. T. VIII. (1724) p. 73 den Analyſten in folgender Form vor: $x^m \partial q = \partial u + uu\partial x : q$. Der Exponent m iſt willkührlich. Nun iſt die Aufgabe, wenn $q = x^n$ geſetzt wird, diejenigen Werthe von n zu beſtimmen, bey welchen die Sonderung der veränderlichen Größen und die Conſtruction der Gleichung durch Quadraturen allein bewerkſtelligt werden mögen. Die Gleichung pflegt in der anfangs angegebenen Form vorgetragen zu werden. Euler hat ihr in ſeiner Integralrechnung, T. I. §. 436, die einfachere Form $\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$ gegeben. Dieſe wird erhalten, wenn in jener Gleichung $x^m \partial x = \partial t$ geſetzt wird. Montucla giebt ihr die allgemeinere, $ax^m y^p \partial x + by^2 x^n \partial x = \partial y$, (Hist. des Mathém. T. III. p. 177.), welche aber nicht mehr die Riccatiſche zu ſeyn ſcheint. Daniel Bernoulli fügte dem Aufſatze von Riccati, an deſſen Schluſſe die Aufgabe befindlich iſt, ſeine Auflöſung bey, aber in Chiffren. Er erwähnt dabey, daß ſein Vater, ſein Bruder und Neffe auch Auflöſungen gefunden hätten, mit denſelben Werthen für den Exponenten n. Goldbach lieferte auch eine in dem erſten Theile der Petersburger Commentarien. Von Johann Bernoulli befindet ſich eine Auflöſung der Gleichung, $as^m \partial s + bu^q s^p \partial s = \partial u$, in dem IV. Th. ſeiner Werke. Man ſehe auch den Traité du calcul intégral par Bougainville T. II. nr. 118 — 121, und die Integralrechnung von la Croix an mehrern Stellen; in dieſem Wörterbuche den Artikel, Integralgleichung, 15.

Ring, der Flächenraum zwiſchen zwey concentriſchen Kreiſen, ſ. Armilla. Ein cylindriſcher Ring iſt der Raum zwiſchen zwey gleich hohen Cylindern mit einer gemeinſchaftlichen Axe. Die beiden Halbmeſſer ſeyn a, und a + u, die Höhe = h, ſo iſt der cylindriſche, von ihren krummen Flächen eingeſchloſſene Raum $= \pi(a+u)^2 h - \pi aah = 2\pi hau + \pi huu$.

Ringförmiger Körper iſt ein Körper, der durch eingeſchloſſene Figur, als einen Kreis, eine Ellipſe, oder auch von dem Abſchnitte einer ſchicklichen Figur, durch die Umdrehung ihrer Ebene um eine in dieſer befindliche Axe erzeugt wird. Ein offener Ring iſt, wenn die Axe außerhalb der Figur liegt; ein geſchloſſener, wenn ſie die krumme Linie berührt. Geht ſie durch die Figur, ſo entſteht ein runder Körper.

1. Kepler hat ſich zuerſt mit dieſer Art der Entſtehung eines geometriſchen Körpers beſchäftigt, in dem Anhange zu der Nova Stereometria doliorum. Lincii 1615, beſonders mit der Meſſung der Körper, die durch die Umdrehung eines Kreiſes oder einer Ellipſe um eine Chorde entſtehen, dabey auch mit ſolchen, die von einem Abſchnitte dieſer Figuren hervorgebracht werden. Die erſtern vergleicht er, einiger Ähnlichkeit wegen, mit Äpfeln, Quitten, Pflaumen, Melonen, Kürbiſſen. Seine Methode den Inhalt zu berechnen iſt ſinnreich, und iſt eine Analyſis des Unendlichen. Cavaleri nahm die Meſſung nach ſeiner Methode des Untheilbaren vor. Der Jeſuit Tacquet verfaßte ein ſtarkes Werk, Cylindracea et Annularia betitelt, welches 142 Folioſeiten einnimmt. In dem erſten Theile deſſelben handelt er von den hufförmigen Abſchnitten eines ſenkrechten Cylinders, ihrem Inhalt und der Vergleichung ihrer krummen Oberfläche, in dem zweyten von den Körpern, die durch Herumführung eines Kreiſes und eines Kegelſchnittes entſtehen.

Für unſere Integralrechnung iſt die Unterſuchung, zu welchen jene Geometer eine kunſtreiche Zurüſtung gebrauchten, leicht. Sie liefert einige artige Vergleichungen, weswegen ich etwas davon beybringen werde, auch als Ergänzung des Artikels, Cubirung.

2. Es ſey BAB (Fig. 26.) die Axe, um wel-

che ſich die Ebene eines aus C beſchriebenen Kreiſes drehet. Der Durchmeſſer deſſelben DD ſey der Axe parallel, und der Durchmeſſer EF auf dieſelbe ſenkrecht. Dieſer Kreis beſchreibt durch die Herumführung um BAB einen körperlichen Ring, deſſen äußerer Halbmeſſer AE, innerer AF iſt. Eine mit DD parallele Chorde MM beſchreibt eine cylindriſche Oberfläche; der zwiſchen zwey ſolchen, von MM und mm beſchriebenen Flächen enthaltene körperliche Raum iſt die Zunahme des von dem Kreisabſchnitte DMMD beſchriebenen Raumes. Für dieſe Zunahme iſt nun ein von der Größe des Abſtandes Pp der Chorden unabhängiger Ausdruck zu ſuchen.

3. Der Halbmeſſer des Kreiſes ſey $CE = a$, der Abſtand des Mittelpunctes C von der Axe BAB ſey $AC = b$; $CP = x$; $PM = y$; $Pp = \Delta x$; $PM - pm = \Delta y$; der von dem Segmente DM beſchriebene Körper ſey $= Z$, der von $Dm = Z + \Delta Z$. Es iſt $\Delta Z < 4\pi y\,(b + x)\,\Delta x + 2\pi y \Delta x^2$, und $\Delta Z > 4\pi\,(y - \Delta y)\,(b + x)\,\Delta x + 2\pi\,(y - \Delta y)\,\Delta x^2$. Daraus folgt die von der Größe der Differenzen Δx, Δy, ΔZ, unabhängige Differentialgleichung, $\partial Z = 4\pi y\,(b + x)\,\partial x$.

Es iſt

$$\int y\partial x = \int \partial x \sqrt{(aa - xx)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$$

$$+ \frac{1}{2} aa \int \frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$$

$$+ \frac{1}{2} aa \text{ Ang.sin } \frac{x}{a}.$$ Integralformel, 57. 49. Ferner iſt $\int x\partial x \sqrt{(aa - xx)} = -\frac{1}{3}(aa - xx)^{\frac{3}{2}}$, daſ. 59. II. Folglich iſt

$$Z = 2\pi bx\sqrt{(aa - xx)} + 2\pi a\, ab\, \text{Ang.}\sin\frac{x}{a}$$
$$- \frac{4}{3}\pi(aa - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\pi a^3,$$

wo $\frac{4}{3}\pi a^3$ die erforderliche Conſtante iſt.

Oder

$$Z = 2\pi bxy + 2\pi aab\,\text{Ang.}\sin\frac{x}{a} + \frac{4}{3}(a^3 - y^3).$$

Der äußere von dem Halbkreiſe DED beſchriebene Körper iſt $= \pi^2 aab + \frac{4}{3}\pi a^3$.

4. Auf dem Halbmeſſer CF nehme man CQ = x, und ziehe durch Q die Chorde NQN ſenkrecht auf CF; der von dem Kreisabſchnitte DNND beſchriebene Körper ſey = Z′, ſo iſt $\partial Z' = 4\pi y\,(b - x)\,\partial x$, und

$$Z' = 2\pi bxy + 2\pi aab\,\text{Ang.}\sin\frac{x}{a}$$
$$- \frac{4}{3}\pi(a^3 - y^3).$$

Der innere von dem Halbkreiſe DFD beſchriebene Körper iſt $= \pi^2 aab - \frac{4}{3}\pi a^3$.

5. Der Unterſchied des äußern und innern Ringes iſt $\frac{8}{3}\pi a^3$, das Doppelte der mit dem Halbmeſſer a beſchriebenen Kugel.

6. Der ganze von dem Kreiſe beſchriebene körperliche Ring iſt $= 2\pi^2 aab$, ſo groß als ein Cylinder, deſſen Grundfläche der Kreis (πaa) und die Hö-

he der Umfang des mit dem Halbmeſſer b beſchriebenen Kreiſes ($2\pi b$) iſt.

7. Dieſes iſt ein Fall des Satzes, daß der Inhalt eines Körpers, der durch die Umdrehung einer Figur um eine Axe erzeugt wird, das Product aus der Figur in den Weg ihres Schwerpunctes iſt, ſ. Centrobaryca methodus.

8. Man mache CQ = CP, ſo iſt der von dem zwiſchen den parallelen MM, NN und den beiden Bogen MN enthaltenen Segmente beſchriebene cylindriſche Ring $= 2\pi b \left(2xy + 2aa \text{ Ang. sin} \frac{x}{a}\right) =$ $2\pi b \times$ Segm. MNNM. Dieſer Raum iſt ebenfalls das Product aus dem Inhalte der bewegten Fläche in den Weg ihres Schwerpunctes.

9. Man nehme anſtatt des Kreiſes eine Ellipſe, deren eine Axe DD, die andere EF iſt, und welche ſich wie m : n verhalten, ſo iſt $y = \frac{m}{n} \sqrt{(aa - xx)}$, (Ellipſe, 5.) und der Unterſchied des innern und äuſſern Ringes iſt $= \frac{8}{3} \cdot \frac{m}{n} \pi a^3$. Die Summe iſt $= \frac{m}{n} \cdot 2\pi^2 a^2 b$.

10. Es ſey EF die größere Axe, und DD die kleinere, ſo iſt das gedruckte Sphäroid, das durch die Umdrehung um DD beſchriebene $= \frac{4\pi}{3} \cdot CE^2 \cdot CD$, (Sphäroid), und die elliptiſche Fläche $= \pi \cdot CE\ CD$. Iſt EF die kleinere Axe, ſo iſt das ablange Sphäroid, das durch die Umdrehung um DD beſchriebene, $= \frac{4\pi}{3} \cdot CD \cdot CE^2$. Die elliptiſche Fläche iſt, wie

vorher $= \pi$. CD . CE. Es iſt alſo der Unterſchied des innern und äußern Ringes das Doppelte des Sphäroids, welches durch die Umdrehung um die mit der Axe der Herumführung BAB parallele Axe entſteht. Der elliptiſche Ring ſelbſt iſt die elliptiſche Fläche in dem Umfang des mit b beſchriebenen Kreiſes multiplicirt.

11. Die um die Axe BAB (Fig. 27.) herumgeführte Figur ſey eine Parabel EDF, deren Axe CD iſt. Der Parameter derſelben ſey $= a$, die Höhe des paraboliſchen Segments CD $= h$, die halbe Grundlinie CE $= g$, ſo iſt $ah = g^2$. Wie vorher ſey AC $= b$, PC $= x$, PM $= y$, ſo iſt $a(h - y) = xx$, daher $ay = ah - xx = g^2 - x^2$. Der von DCPM beſchriebene Ring ſey Z, ſo iſt $\partial Z =$

$$2\pi(b + x) y\partial x = \frac{2\pi}{a}(b + x)(g^2 - x^2)\partial x$$

$= \frac{2\pi}{a}(bg^2 - bx^2 + g^2x - x^3)\partial x$. Daher Z $=$

$\frac{2\pi}{a}\left(bg^2x - \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}g^2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)$, wo die Conſtante $= 0$ iſt.

Der von DCQN beſchriebene Körper iſt Z'

$$= \frac{2\pi}{a}\left(bg^2x - \frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}g^2x^2 + \frac{1}{4}x^4\right).$$

Der äußere von DCE beſchriebene Ring, $x = g$ geſetzt, iſt $= \frac{2\pi g^3}{a}\left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{4}g\right)$; der innere von DCF beſchriebene iſt $= \frac{2\pi g^3}{a}\left(\frac{2}{3}b - \frac{1}{4}g\right)$.

Der Unterſchied iſt $= \frac{\pi g^4}{a} = \pi g^2 h$; Die Summe

oder der ganze ringförmige Körper iſt $= \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{bg^3}{a}$

$= \frac{8\pi}{3} \cdot bgh = 2\pi b \cdot \frac{4}{3} gh.$

12. Das paraboliſche Konoid, deſſen Höhe DC, und die Grundfläche der mit dem Halbmeſſer CE beſchriebene Kreis iſt, iſt $= \frac{1}{2} \pi hg^2$, (Cubirung, I.). Die Fläche der Parabel iſt $= \frac{4}{3} gh$ (Parabel). Es iſt alſo der Unterſchied des innern und äußern Ringes auch hier doppelt ſo groß, als der von der Figur um die Axe DC beſchriebene Körper, und der ganze Ring gleich einem Cylinder über der beſchreibenden Figur mit der Höhe, ſo groß als der Umfang des von C beſchriebenen Kreiſes.

13. Die Axe einer Parabel MCM (Fig. 28.) ſey ſenkrecht auf die Axe der Herumführung; der Parameter ſey $= a$; der Abſtand des Scheitels von BAB $= b$; CP $= x$; PM $= y$; der von MCM beſchriebene Körper $= Z$, ſo iſt $\partial Z = 4\pi (b - x) y \partial x =$

$4\pi (b - x) a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \partial x = \frac{4\pi a (b - x)}{\sqrt{a}} x^{\frac{1}{2}} \partial x.$

Daraus iſt

$$Z = \frac{4\pi a}{\sqrt{a}} \left(\frac{2}{3} bx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{8\pi}{15} xy (5b - 3x).$$

14. Der Inhalt des Ringes, der von dem Kreisabſchnitte MEM (Fig. 26.) beſchrieben wird, iſt der Unterſchied des von den Halbkreiſen und den Abſchnitten DMMD beſchriebenen Ringes. Man kann denſelben aber auch unmittelbar finden, wie gleich vorher den paraboliſchen.

15.

15. Es ſey AE $=$ c, EP $=$ z, der von MEM beſchriebene Ring $=$ U, ſo iſt $\partial U = 4\pi(c-z)y\partial z$ $= 4\pi(c-z)\sqrt{(2az-zz)}\,.\,\partial z.$

$$= \frac{4\pi(2acz-(2a+c)z^2+z^3}{\sqrt{(2az-z^2)}}\,\partial z.$$ Das Integral wird aus Integralformel, 71. gefunden. Es iſt

$$U = 4\pi\left(\frac{1}{2}a^2(c-a)\,\text{Ang.sin}\frac{y}{a}-\frac{1}{2}a(c-a)y\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a+c\right)zy-\frac{1}{3}z^2y\right).$$

Die Conſtante $= 0$.

16. Die Axe der Herumführung gehe durch den Mittelpunct C, ſo iſt die ringförmige, von dem Segmente MEM beſchriebene Zone $V = \frac{4}{3}\pi zy(2a-z)$. Man ſetze $a-x$ ſtatt z, ſo iſt

$$V = \frac{4}{3}\pi y(a-x)(a+x)$$
$$= \frac{4}{3}\pi y(a^2-x^2) = \frac{4}{3}\pi y^3.$$

17. Die Chorde NN ſey die Axe der Herumführung oder der Drehung des größern Segments NEN, ſo entſteht ein runder Körper, der dicker als hoch iſt. Man ſetze CQ $=$ g, QN $=$ h, ſo iſt der von dem Halbkreiſe DED beſchriebene Körper $= \pi^2 aag + \frac{4}{3}\pi a^3$, nach (3.). Den von dem Segmente DNND beſchriebenen zu finden, ſetze man in (4.) in dem Werthe von Z′ ſtatt b hier g, und nehme das Integral von 0 bis bis $x = g$, wodurch $y =$ h wird, und es iſt dieſer Körper

$$= 2\pi g^2 h + 2\pi aag \text{ Ang. sin } \frac{g}{a}. - \frac{4}{3}\pi (a^3 - h^3).$$

Alſo iſt der Inhalt des von dem Segmente NEN beſchriebenen Körpers

$$= 2\pi aag \left(\frac{1}{2}\pi + \text{Ang. sin } \frac{g}{a}\right) + 2\pi g^2 h + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

18. Es iſt $\frac{1}{2}\pi + \text{Ang. sin } \frac{g}{a} = \text{Ang. ECN}$,

und

$$\frac{1}{2} aa \left(\frac{1}{2}\pi + \text{Ang. sin } \frac{g}{a}\right) = \text{Sect. ECN};$$

auch iſt $\frac{1}{2} gh = CQN$. Alſo iſt der Inhalt des von NEN beſchriebenen Körpers

$$= 2\pi g \times \text{Segm. NEN} + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

Hier iſt $\frac{4}{3}\pi h^3$ die von dem Segmente MEM, bey der Drehung des Kreiſes um den Durchmeſſer DD, beſchriebene, zur Kugel gehörige ringförmige Zone.

19. Man nehme DM = DN, ſo iſt der von dem Segmente MNNM, bey der Drehung um NN, beſchriebene cylinderförmige Körper

$$= 2\pi g \left(2gh + 2aa \text{ Ang. sin } \frac{g}{a}\right), \text{ aus (8.)}.$$

Zieht man dieſen von dem runden Körper ab, ſo bleibt der von MEM beſchriebene Ring,

$$V = 2\pi aag \left(\frac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin } \frac{g}{a}\right)$$

$$- 2\pi g^2 h + \frac{4}{3}\pi h^3$$

das iſt

$$V = 2\pi aag \,.\, \text{Ang}\,.\, \sin\frac{h}{a} - 2\pi g^2 h + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

$$= 2\pi g \left(aa\ \text{Ang}.\sin\frac{h}{a} - gh \right) + \frac{4}{3}\pi h^3$$

$$= 2\pi g \times \text{Segm. MEM} + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

Der Unterſchied der von dem Kreisſegmente MEM in der Kugel und in dem runden von NEM beſchriebenen Körper iſt $= 2\pi g \times$ Segm. MEN.

20. Man kann dieſen Werth des Ringes auch aus der Formel in (15.) herleiten, wenn darin $c = a + g$; $z = a - g$; $y = h$ geſetzt wird. Dadurch wird, nach gehöriger Reduction,

$$U = 4\pi \left(\frac{1}{2} a^2 g \,.\, \text{Ang}.\sin\frac{h}{a} + \frac{1}{3} a^2 h - \frac{5}{6} g^2 h\right).$$

Es iſt

$$\frac{1}{3} a^2 h - \frac{5}{6} g^2 h = \frac{1}{3} (a^2 - g^2) h - \frac{1}{2} g^2 h$$

$= \frac{1}{3} h^3 - \frac{1}{2} g^2 h.$ Alſo iſt U, oder hier

$$V = 2\pi g \left(aa \,.\, \text{Ang}.\sin\frac{h}{a} - gh \right) + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

21. Das Segment MEM drehe ſich um die Chorde MM ganz herum, es ſoll der Inhalt des dadurch entſtehenden zugeſpitzten runden Körpers gefunden werden.

In (15.) ſetze man $z = c$, wo c die Sagitta EP des Bogens MM und $y = h$ iſt, ſo wird der runde Körper

$$U = 4\pi \left(\frac{1}{2} a^2 (c - a) \text{ Ang.sin} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} a (c-a) h + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} a + c\right) ch - \frac{1}{3} c^2 h\right),$$

und nach gehöriger Reduction,

$$U = 4\pi \left(\frac{1}{2} a^2 h - \frac{1}{3} ach + \frac{1}{6} c^2 h - \frac{1}{2} a^2 (a - c) \text{ Ang sin} \frac{h}{a}\right).$$

Es iſt $h^2 = 2ac - cc$, alſo werden die drey erſten Glieder des Factors zu 4π dieſe, $\frac{1}{2} a^2 h - \frac{1}{6} h^3 = \frac{1}{2} (h^2 + g^2) h - \frac{1}{6} h^3 = \frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{2} g^2 h$. Da $g = a - c$ iſt, ſo iſt

$$U = \frac{4}{3} \pi h^3 - 2\pi g \left(a^2 \text{ Ang sin} \frac{h}{a} - gh\right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi h^3 - 2\pi g \times \text{Segm. MEM}.$$

22. Der Unterſchied der beiden runden Körper in (20. 21.) iſt $= 4\pi g \left(a^2 \text{ Ang.sin} \frac{h}{a} - gh\right)$ $= 4\pi g \times$ Segm. MEM.

23. Die Sätze (6, 19, 20.) ſind von Kepler; der Satz (5.) iſt von Tacquet. Den äußern und innern Ring vergleicht Tacquet mit einem Abſchnitte eines Cylinders über der Figur, welche den Ring beſchreibt. Keplers Verfahren, jene Sätze zu finden, iſt ſinnreich. Er errichtet über dem Kreiſe EDFD (Fig. 26.) einen ſenkrechten Cylinder, deſſen Höhe dem Umfange des Kreiſes, welchen QE bey der

Drehung beſchreibt, gleich iſt. In dieſem nimmt er einen hufförmigen Abſchnitt über dem Kreisabſchnitte NEN als Grundfläche und in der Höhe des Cylinders. Ein ſenkrechter Schnitt in dem Hufe durch irgend eine mit der Drehungsaxe parallele MM iſt gleich der von MM beſchriebenen cylindriſchen Fläche, und der hufförmige Körper iſt gleich dem runden von NEN erzeugten. Der ſenkrechte prismenartige Abſchnitt deſſelben über MNNM iſt gleich dem cylinderartigen von MNNM in dem runden Körper um NN beſchriebenen und der Abſchnitt über MEM iſt gleich dem ringförmigen Theile des runden Körpers, wenn die Bogen DM, DN gleich groß genommen werden. Dieſer Abſchnitt über MEM beſteht aus zwey Stücken, einem ſenkrechten cylinderförmigen über MEM, deſſen Höhe der Umfang des von QC beſchriebenen Kreiſes iſt, und einem, welches dem von MEM in der Kugel beſchriebenen Ringe gleich iſt, und eben ſo, wie jener, aus einem cylindriſchen Theile und einem hufförmigen beſteht.

24. Allgemein ſey EDF (Fig. 27.) irgend eine krumme Linie, welche durch eine Axe DC in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Wie vorher ſey $AC = a$, PC oder $CQ = x$, PM oder $QN = y$, der von DMPC durch die Drehung um BAB (mit DC parallelen) beſchriebene Körper $= Z$, der von DNQC beſchriebene $= Z'$, ſo iſt

$$\partial Z = 2\pi (b + x) y \partial x$$
$$\partial Z' = 2\pi (b - x) y \partial x$$

alſo

$$Z = 2\pi b \int y \partial x + 2\pi \int xy \partial x + C.$$
$$Z' = 2\pi b \int y \partial x - 2\pi \int xy \partial x - C'.$$

Wenn das $\int y \partial x$ keiner Conſtante bedarf, damit es für $x = 0$ auch 0 ſey, ſo ſind die beiden Conſtanten C, C' ſich gleich, und es iſt, wenn $x = CE = CF$ genommen wird,

$$Z + z' = 4\pi b \int y \partial x = 2\pi b \times 2 \int y \partial x$$

gleich dem Product aus der Fläche EDF in den Weg ihres Schwerpunctes. Erfordert das $\int y \partial x$ eine Conſtante, ſo darf man dieſe nur unter dem Ausdruck $\int y \partial x$ mit verſtehen, und die Conſtante C oder C′ ſich bloß auf $\int xy \partial x$ beziehen laſſen.

25. Taquet beſchäftigt ſich in dem zweyten Buche ſeiner Annularia mit der Beſtimmung der Oberfläche eines Ringes. Er bezeigt großes Vergnügen über das von ihm gefundene, und meint, es könnten die Analogien zwiſchen dem räumlichen Inhalte der Ringe und ihrer Oberfläche der von Archimedes für Kugel und Cylinder gefundenen Analogie zur Seite geſtellt werden.

26. Es ſey DEDF (Fig. 26.) ein Kreis, der um die mit dem Durchmeſſer DD parallele BAB herumgeführt wird. Man nehme auf dem Umfange zwey Puncte M, m, ziehe durch dieſelben die auf BB ſenkrechten MG, mg, ſo beſchreibt die Chorde des Bogens Mm eine koniſche Fläche. Es ſey CD $=$ a, AC $=$ b, der Abſtand des Punctes M von DC $=$ x $=$ CP, der Abſtand des Punctes m von DC $= x + \Delta x$, die Chorde zu Mm $= \Delta z$, als die Verlängerung der Seite z eines Kegels, welcher um die Axe BAB beſchrieben wird. Es iſt (ſ. Complanation) die koniſche, von der Chorde beſchriebene Fläche
$= 2\pi (b + x) \Delta z + \pi \Delta x . \Delta z$. Die von dem Bogen DM beſchriebene Fläche ſey $=$ S, ſo iſt
$\Delta S > 2\pi (b + x) \Delta z + \pi \Delta x . \Delta z$. Die Differentialgleichung iſt daher $\partial S = 2\pi (b + x) \partial z$. Der Bogen DM ſey $=$ s, ſo iſt in der Differentialgleichung $\partial z = \partial s$, und $\partial S = 2\pi (b + x) \partial s$. Nun iſt $\partial s = \frac{a \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$, (Differentialformel, 29.),

also iſt $\partial S = 2\pi (b + x) . \frac{a \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

Die Integration giebt

$$S = 2\pi ab . \text{Ang.sin} \frac{x}{a} - 2\pi a \sqrt{(aa - xx)} + 2\pi aa,$$

wo $2\pi aa$ die erforderliche Conſtante iſt.

Für den innern Ring iſt die Differentialgleichung,

$$\partial S' = 2\pi (b - x) . \frac{a\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}},$$

und daher

$$S' = 2\pi ab . \text{Ang.sin} \frac{x}{a} + 2\pi a \sqrt{(aa - xx)} - 2\pi aa.$$

27. Die Oberfläche des äußern Ringes iſt $= 2\pi^2 ab + 4\pi aa$; des innern $= 2\pi^2 ab - 4\pi aa$.

28. Die ganze Oberfläche iſt $= 4\pi^2 ab$, ſo groß als die krumme Oberfläche eines Cylinders, deſſen Halbmeſſer $= b$ und die Höhe der mit dem Halbmeſſer a beſchriebene Kreis EDF iſt.

29. Der Unterſchied der beiden Oberflächen iſt $= 8\pi aa$, achtmahl ſo groß als die Fläche des erzeugenden Kreiſes.

30. Nimmt man den Bogen DN = DM, ſo iſt die von MN beſchriebene Oberfläche

$= 4\pi ab . \text{Ang.sin} \frac{x}{a}$, ſo groß als die krumme Oberfläche eines Cylinders, deſſen Halbmeſſer = b und die Höhe der Bogen MN iſt.

31. Der Unterſchied der von den gleichen Bogen DM, DN beſchriebenen Oberflächen iſt $= 4\pi a (a - \sqrt{(aa - xx)})$. Die Chorde des Bogens DM ſey = c, ſo iſt $cc = 2a (a - \sqrt{(aa - xx)})$, (Kreis, 29), und die Fläche des über dem Durchmeſſer c beſchriebenen Kreiſes

$= \frac{1}{4} \pi cc = \frac{1}{2} \pi a (a - \sqrt{(aa - xx)})$. Jener Unterſchied iſt alſo achtmahl ſo groß als die Fläche dieſes Kreiſes.

Die Sätze, 28. 29. 31 hat Tacquet gefunden.

32. Eine praktiſche Anwendung kann man auf das Viſiren oder die Ausmeſſung der Fäſſer machen. Es ſey BAB (Fig. 28.) die Axe eines Faſſes, MM die Höhe deſſelben, MCM die Ausbauchung, ſo beſteht das Faß aus zwey Theilen, einem cylindriſchen, deſſen Halbmeſſer BM, Höhe MM iſt, und dem von MCM beſchriebenen ringförmigen Raume. Man wird meiſtens MCM für einen Kreisbogen nehmen können.

Zu vergleichen iſt eine Abhandlung von Käſtner über die Ausmeſſung bauchichter Körper in dem Leipziger Magazin für Mathematik, Jahrg. 1787. 1. St.

Rückkehrpunct oder Spitze (cuspis, sive punctum reflexus, *point de rebroussement*) iſt ein Doppelpunct an krummen Linien, in welchem zwey Zweige neben einer gemeinſchaftlichen berührenden zuſammenſtoßen, und jeder ſich daſelbſt endigen. Es ſind zweyerley Lagen hier möglich. Die beiden Zweige liegen entweder auf verſchiedenen Seiten der berührenden und kehren ſich die convexen Seiten zu, wie in Fig. 29; oder ſie liegen auf derſelben Seite, die convexe Seite des einen Zweiges gegen die concave des andern gekehrt, wie in Fig. 30. Die letztere Vereinigung zweyer Zweige nennt man auch einen Schnabel, rebroussement en bec.

1. An den Linien der zweyten Ordnung iſt kein Rückkehrpunct möglich. Denn da ein ſolcher Punct für zwey gilt, ſo würde eine gerade Linie durch denſelben und einen andern Punct die krumme Linie in drey Puncten ſchneiden, welches nicht möglich iſt. Aber an den Linien der dritten Ordnung kommen Rückkehr-

puncte vor, da dieſe Linien von einer geraden Linie in drey Puncten geſchnitten werden können. Sie entſtehen, wenn eine Ovale in einen Punct ſich zuſammenzieht, wie in Th. III. Tab. XIX. Fig. 59. 60., wobey die beiden berührenden in dem Durchſchnittspuncte in eine einzige gerade zuſammenfallen. Die beiden Zweige liegen hier auf verſchiedenen Seiten der berührenden. Denn die zweyte Lage der beiden Zweige, die eine Spitze machen, iſt nur an den Linien der vierten Ordnung und höherer möglich, weil eine gerade Linie, die durch den Rückkehrpunct und zwey Puncte auf den beiden Zweigen gezogen wird, die Curve noch ein- oder mehrmahl ſchneidet.

2. Es seyn AC, BC (Fig. 29.) zwey Zweige einer krummen Linie, deren übrige Zweige hier nicht in Betracht kommen, und CE ſey die gemeinſchaftliche berührende zwiſchen ihnen in dem Puncte C. Die Coordinaten an dem concaven Zweige ſeyn AP $=$ x, PM $=$ y, ſo iſt an dieſem das Differential $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ, welches an dem convexen Zweige poſitiv iſt (Concav u. Convex, 12.). Daher iſt in C, wo der Übergang von dem einen zu dem andern geſchieht, der Quotient $=0$. Der Übergang vom Negativen zum Poſitiven geſchieht hier nicht durch das Unendlichgroße, weil an der geraden Linie, durch welche der Übergang geſchieht, der Quotient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ iſt.

Auch iſt in dem Rückkehrpuncte der Halbmeſſer der Krümmung unendlich groß, als welcher für die entgegengeſetzten Zweige auch eine entgegengeſetzte Beſchaffenheit hat. Krümmungskreis, 3. In dem gegenwärtigen Falle kann der Übergang für denſelben vom Poſitiven zum Negativen nicht durch Null geſchehen, weil er für die gerade berührende unendlich groß iſt.

3. Man darf aber nicht umgekehrt ſchließen: wo der Quotient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ iſt, ſey ein Rückkehrpunct vorhanden. Denn dieſer Quotient wird auch für einen Wendungspunct Null, wo zwey Bogen einer krummen Linie auch auf verſchiedenen Seiten einer gemeinſchaftlichen berührenden liegen, aber von dem gemeinſchaftlichen Puncte aus nach entgegengeſetzten Richtungen.

4. Die berührende MT an einem Puncte M ſchneide die Abſciſſenlinie in T, ſo iſt die Subtangente $PT = \frac{y\partial x}{\partial y}$, ſ. Berührende Linie, 13, und $AT = \frac{y\partial x}{\partial y} - x$ Das Differential von AT iſt, wenn ∂x conſtant genommen wird, $\frac{\partial y^2 \partial x - y\partial x \partial^2 y}{\partial y^2} - \partial x = -\frac{y\partial x \partial^2 y}{\partial y^2}$, welches poſitiv iſt, und eine Zunahme anzeigt, weil $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ bey dem als concav angenommenen Bogen AM negativ iſt, daher auch $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$ dieſe Beſchaffenheit hat.

5. Die berührende CE in dem Rückkehrpuncte ſchneide die Abſciſſenlinie in E, ſo iſt das Differential von $AE = 0$, da hier $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ iſt. Der Abſtand des Durchſchnittspunctes der berührenden mit der Abſciſſenlinie von A nimmt immerfort zu, aber in E iſt die Zunahme dieſes Abſtandes ein Kleinſtes, ſo daß in dem Fortrücken des Durchſchnittspunctes ein Stillſtand erfolgt. Die beiden ſucceſſiven Elemente auf AC

und CB bey C fallen in eins. Der Ablenkungswinkel der berührenden iſt hier, in Vergleichung mit jedem andern, unendlich kleinen, Null.

6. Wenn die Abſciſſenlinie auf der berührenden CE ſelbſt genommen wird, ſo iſt kein Übergang vom Concaven zum Convexen vorhanden, inzwiſchen bleibt der Winkel der beiden Zweige in C = o, und der Halbmeſſer der Krümmung daſelbſt unendlich groß. Iſt CE mit der Axe der Ordinaten parallel, ſo iſt daſſelbe vorhanden.

7. Exempel. Die Gleichung für die ſemicubiſche Parabel iſt $ay^2 = x^3$ oder $y = a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Daraus $\partial y = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \partial x$, und

$$\partial^2 y = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial x^2}{a},\text{ oder}$$

$\partial^2 y = \frac{3}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial x^2}{a}$. Für jedes poſitive x hat y zwey gleiche entgegengeſetzte Werthe; für $x = o$ iſt der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x} = o$; und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ iſt unendlich groß. Man erkennt hieran eine Spitze, welche in dem Anfangspuncte der Abſciſſen liegt. Da $\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{a}}$ iſt, ſo nimmt y gegen x immer mehr ab, ſo wie x gegen a kleiner wird.

8. Exempel. Die Gleichung für die Ciſſoide iſt $\frac{x^3}{a - x} = y^2$, oder $y = x^{3:2}\,(a - x)^{-1:2}$. Daraus iſt $\partial y = \frac{1}{2}\,(3ax^{1:2} - 2x^{3:2})\,(a - x)^{-3:2}\,\partial x$,

und $\partial^2 y = \frac{3}{4} a^2 x^{-1:2} (a - x)^{-5:2} \partial x^2$, auf ähnliche Art, wie an jener Parabel. Um die Beſchaffenheit der Curve nahe bey der Spitze zu erkennen, ſuche man eine ſteigende Reihe für y durch x, wobey es nur nöthig iſt, die drey erſten Glieder zu beſtimmen. Es iſt

$$y = x^{3:2} (a - x)^{-1:2}, \text{ oder}$$

$$y = x \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ das iſt}$$

$$y = x \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \text{etc.}\right)$$

oder

$$y = a\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{7}{2}} + \text{etc.}\right)$$

9. Den Rückkehrpunct an einer krummen Linie, wenn ein ſolcher vorhanden iſt, zu finden, ſuche man aus der Gleichung zwiſchen x und y den Quotienten $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, wobey das Differential ∂x conſtant genommen werde, ſetze denſelben $= 0$, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen x und y, welche mit der gegebenen Gleichung zwiſchen denſelben verbunden, durch Elimination eine beſtimmte Gleichung ſowohl für x als für y giebt, welche die Coordinaten zu dem Rückkehrpuncte ſind. Es ſey $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{N}$, wo M und N Functionen von x und y ſind, ſo iſt entweder $M = 0$, oder N unendlich groß zu nehmen. Allein die Rechnung kann ſehr weitläufig werden.

10. An den Linien der dritten Ordnung kann der Rückkehrpunct ohne Hülfe der Differentialrechnung gefunden werden. Es ſey die Gleichung für eine ſolche: $y^3 + x^2 y - ay^2 - by - 2cx - d = 0$,

(Krumme Linien der zweyten Claſſe, 32 u. f.), ſo iſt

$$x = \frac{c}{y} \pm \frac{\sqrt{(c^2 + dy + by^2 + ay^3 - y^4)}}{y}.$$

Für jede Wurzel der Gleichung,

$$(Y)\ y^4 - ay^3 - by^2 - dy - c^2 = 0,$$

hat x nur einen einfachen Werth, oder wird, als Ordinate betrachtet, aus einer ſchneidenden eine berührende, wenn die Wurzel der Gleichung nur einfach iſt, wie Tab. XIX. Fig. 58. Iſt die Wurzel zweyfach, ſo gehen zwey Berührungspuncte in einen Durchſchnittspunct zuſammen, Fig. 59. Iſt die Wurzel dreyfach, ſo iſt ein Rückkehrpunct vorhanden, Fig. 60. Damit die Gleichung (Y) drey gleich große Wurzeln habe, müſſen die Formen der Coefficienten folgende ſeyn,

$$a = 3p - q;\quad b = 3p(q - p);$$
$$d = - p^2(3q - p);\quad c^2 = p^3q,$$

aus Gleichung, 83, wenn daſelbſt die drey Wurzeln, p, r, s, ſich gleich, und q negativ genommen werden. Für den Rückkehrpunct ſind die Coordinaten,

$$y = p;\ x = \frac{\sqrt{p^3q}}{p} = \sqrt{pq}.$$

Die Lage der berührenden in dem Rückkehrpuncte zu finden, ſuche man den Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, als der Tangente des Winkels, welchen die berührende mit der Abſciſſenlinie (der Axe der x) macht. Es iſt überhaupt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2c - 2xy}{3y^2 + x^2 - 2ay - b}.$$

Setzt man hier $y = p$, $x = \sqrt{pq}$, ſo werden Zähler und Nenner jeder $= 0$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, eben ſo wie bey einem Knoten oder Durchſchnittspuncte zweyer Zweige, (berührende Linie, 23 ff.). Um den Werth

des Quotienten zu finden, ſetze man $2c - 2xy = M$, und $3y^2 + x^2 - 2ay - b = N$, ſo daß $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{M}{N}$. Es iſt (Function, 50.) der Werth des Quotienten für dieſen Fall $= \frac{\partial M}{\partial N}$, wenn darin $x = \sqrt{pq}$; $y = p$ geſetzt werden. Nun iſt

$$\partial M = - 2y\partial x - 2x\partial y$$
$$\partial N = (6y - 2a)\,\partial y + 2x\partial x.$$

Da $\partial y : \partial x = M : N$ iſt, ſo iſt

$$\frac{\partial M}{\partial N} = - \frac{Ny + Mx}{(3y - a)\,M + Nx}.$$

Man ſetze hier nun $y = p$; $x = \sqrt{pq}$, auch $a = 3p - q$, ſo wird

$$\frac{M}{N} = - \frac{Np + M\sqrt{pq}}{Mq + N\sqrt{pq}}.$$

Daraus folgt

$$M^2q + 2MN\sqrt{pq} + N^2p = 0,$$

oder es iſt das Quadrat von $M\sqrt{q} + N\sqrt{p} = 0$, daher $\frac{M}{N} = - \sqrt{\frac{p}{q}}$ iſt, als der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ in dem Rückkehrpuncte.

Die Subtangente daſelbſt iſt $\frac{y\partial x}{\partial y} = - p\sqrt{\frac{q}{p}} = - \sqrt{pq}$. Das Negationszeichen zeigt an, daß die Subtangente von dem Grundpuncte der Ordinate, nach der Richtung der Abſciſſen zu nehmen iſt.

11. Zu entſcheiden, ob der Punct der Curve, an welchem $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ iſt, ein Rückkehrpunct oder ein Wendungspunct ſey, verlege man den Anfang der Abſciſſen in den Punct D (Fig. 29.), den Grundpunct der Ordinate zu jenem Puncte. Man ſuche nun eine

ſteigende Reihe für die Ordinate y durch die neue Abſciſſe von t, ſo ergiebt ſich aus dieſer, ob zu entgegengeſetzten unbeſtimmt kleinen Abſciſſen t mögliche y gehören, oder nicht, zunächſt des zu unterſuchenden Puncts. Iſt das letzte, ſo iſt derſelbe ein Rückkehrpunct, in dem erſteren Falle ein Wendungspunct.

12. Die Ordinaten u ſey aus einem Puncte gezogen, und machen mit einer gegebenen geraden den Winkel φ. Bey dieſer Form der Gleichung für eine krumme Linie den Rückkehrpunct zu finden, ſetze man den Halbmeſſer der Krümmung, zufolge (2.) unendlich groß, ſo erhält man einen Differentialquotienten für dieſen Punct, und daraus eine Gleichung zwiſchen u und φ, welche mit der gegebenen verbunden, den Werth von u und von φ für den Punct liefert.

13. Wenn φ gleichförmig zunimmt, ſo iſt der Halbmeſſer der Krümmung (Krümmungskreis, 52.)

$$r = \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial s^2}{2\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 - u\partial^2 u}.$$

Setzt man dieſen unendlich groß, ſo iſt

$$2\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 - u\partial^2 u = 0,$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi} = u + \frac{2\partial u^2}{u\partial\varphi^2}.$$

Nimmt man $u\partial\varphi$ conſtant, das iſt, den mit u als Halbmeſſer beſchriebenen, zu dem Winkel $\partial\varphi$ gehörigen Bogen, ſo iſt $\partial^2\varphi = -\frac{\partial u \partial\varphi}{u}$, und in der allgemeinen Formel für den Krümmungs-Halbmeſſer (a. a. O. 51.) iſt der Nenner

$$= (\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 - u\partial^2 u)\,\partial\varphi,$$

und für einen unendlich großen Halbmeſſer der Krümmung

$$\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 - u\partial^2 u = 0.$$

Dieſe Gleichung giebt L'Hopital in ſeiner Analyse des infin. petits, p. 62. Die Differentiirung der ge-

gebenen Gleichung richtet ſich auch nach dieſer Annahme.

In Käſtners Analyſis des Unendlichen §. 520. I. iſt die Gleichung ſo vorgetragen, daß noch kein Differential conſtant genommen iſt. Es ſind daſelbſt, S. 604. Z. 8 u. 9, zwey Druckfehler zu verbeſſern. Um daraus die obigen Gleichungen herzuleiten, muß ſtatt $\frac{\partial x}{r}$ geſetzt werden $\partial\varphi$, und $\frac{\partial u}{r\partial\varphi}$ ſtatt p.

14. Bey der zweyten Art des Rückkehrpunctes (Fig. 30.) liegen die beiden Zweige AC, CB, welche in ihm zuſammen kommen, an derſelben Seite der gemeinſchaftlichen in C berührenden CE. Hier iſt kein Übergang vom Concaven zum Converen; der Halbmeſſer der Krümmung kann hier alſo endlich ſeyn. Die berührende CE iſt die äußerſte der berührenden an beiden Zweigen, und daher iſt der Abſtand ihres Durchſchnittspunctes E mit der Are der Abſciſſen von A oder einem andern beſtimmten Puncte auf derſelben, zwar größer als bey andern berührenden, aber doch nicht ein Größtes, in dem Verſtande, daß das Differential von AE Null wäre. Denn wenn der Abſtand $\frac{y\partial x}{\partial y} - x$ in dieſem Verſtande ein Größtes, alſo $\frac{y\partial x\partial^2 y}{\partial y^2} = 0$ wäre, ſo wäre der Halbmeſſer der Krümmung in C unendlich groß, welches nicht nothwendig iſt. Es ſind hier nur zwey verſchiedene Folgen von Abſtänden, die eine gemeinſchaftliche Gränze haben, eben ſo wie die Ordinaten an den beiden Zweigen AC, BC.

15. Der Halbmeſſer der Krümmung kann endlich, oder unendlich groß, oder unendlich klein ſeyn. Die gemeinſchaftliche berührende läßt dieſes unbeſtimmt.

16. Iſt der Halbmeſſer der Krümmung für beide

Zweige in C gleich groß, ſo iſt das Differential deſſelben $= 0$, und es läßt ſich zwiſchen den Bogen AC, BC durch C kein Kreis ziehen. Sind die Halbmeſſer der Krümmung ungleich, ſo läßt ſich zwiſchen dieſen Bogen durch C ein Kreis ziehen, der flächer als der Bogen AC in C iſt, und krümmer als BC. Eine ſolche Verbindung zweyer Bogen mag aber kein Rückkehren heißen, ſondern wird nur ein Durchſchneiden zweyer über C hinaus ſich erſtreckenden Bogen ſeyn.

17. Der Halbmeſſer der Krümmung in C für beide Zweige ſey $= r$, ſo iſt, wenn das Differential ∂x conſtant geſetzt wird, $r = -\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y}$ (Krümmungskreis, 8.), wo $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ iſt. Es iſt $\partial r = -\frac{3\,\partial s^2 . \partial^2 s}{\partial x . \partial^2 y} + \frac{\partial s^3 . \partial^3 y}{\partial x . (\partial^2 y)^2}$, und dieſes $= 0$ geſetzt, $\partial s . \partial^3 y = 3 \partial^2 s . \partial^2 y$. Ferner iſt $\partial^2 s = \partial y \partial^2 y\, (\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2}}$, oder $\partial^2 s = \frac{\partial y \partial^2 y}{\partial s}$, alſo iſt für den Rückkehrpunct der zweyten Art,

$$\partial s^2 . \partial^3 y = 3 \partial y\, (\partial^2 y)^2.$$

18. Die Unterſuchung des Rückkehrpuncts der zweyten Art macht einige Schwierigkeit. L'Hopital hat ihn zuerſt in Betracht gezogen, Analyse des infin. petits, nr. 109. Er zeigt daſelbſt, daß durch die Abwickelung einer Curve mit einem Wendungspuncte eine ſchnabelförmige Verbindung zweyer Zweige entſteht, woran der Halbmeſſer der Krümmung gleich groß iſt.

19. Der Abbé de Gua behauptete in der Schrift, Usage de l'Analyse de Descartes pour decouvrir les propriétés des lignes géométriques, daß es keinen Rückkehrpunct der zweyten Art gebe, ſondern daß die beiden Zweige, die in einem ſol-

chen Puncte zuſammenkommen, noch jenſeits deſſelben ſich verlängern laſſen, daß alſo der Punct wirklich ein Durchſchnittspunct zweyer Zweige ſey. Sein Beweis für dieſe Behauptung war ſcheinbar. Doch zeigte Euler das Fehlſame darin. Mém. de l'Acad. de Berlin, a 1749. p. 203.

20. Einige der einfachſten Curven, die einen Rückkehrpunct der zweyten Art haben, ſind:

$$y = \alpha xx \pm \beta xx \sqrt{x}.$$

$$y = \alpha x^3 \pm \beta x^3 \sqrt{x}.$$

$$y = \alpha x^{\frac{3}{4}} \pm \beta x^{\frac{3}{4}} \sqrt{x}.$$

In dieſen Gleichungen ſind für negative x keine Ordinaten möglich; aber für poſitive x zwey wegen der Zweydeutigkeit der Wurzelgröße. Das doppelte Vorzeichen fällt weg, wenn die Gleichung rational gemacht wird. Beide Zweige ſtoßen in dem Anfange der Abſciſſen zuſammen, und kommen daſelbſt mit einer paraboliſchen Linie überein. An der erſten Curve iſt in dem Anfange der Abſciſſen der Halbmeſſer der Krümmung endlich und $= \frac{1}{2\alpha}$; an der zweyten daſelbſt unendlich groß; an der dritten unendlich klein.

Die Gleichung $y = z^2 + \sqrt{z^5}$ führt d'Alembert (Mém. de l'Ac. de Berlin a. 1746, p. 186.) bey der Frage über die Form unmöglicher Factoren als Beyſpiel an, und bemerkt, daß die dadurch dargeſtellte Curve zwey convexe Zweige auf derſelben Seite ihrer Abſciſſenlinie hat. Auch führt er die Gleichung, $y = bz + z^2 \pm \sqrt{z^5}$ an, zufolge der die Curve auch zwey ſolche Zweige hat, die aber eine andere berührende als die Abſciſſenlinien haben. Er beruft ſich in der Encycl. method. darauf, daß er dieſe Art einer Spitze ſchon dargethan habe.

21. Euler hat a. a. O., die allgemeine Form der Gleichungen angegeben, bey welcher ein Rückkehrpunct der zweyten Art Statt haben kann; auch zeigt er, wie man denſelben finden könne, wo ein ſolcher vorhanden iſt.

22. In Cramers Analyse des lignes courbes enthält das letzte Capitel, welches von den verſchiedenen vielfachen Puncten an den krummen Linien bis zur ſechſten Ordnung handelt, viele Beyſpiele von Rückkehrpuncten beiderley Art, und ihren Verbindungen mit andern Zweigen. Durch einen Rückkehrpunct können auch andere Zweige einer Curve gehen. Wenn eine Ovale einen Wendungspunct hat, wodurch ſie eine Einbiegung zeigt, und dieſe Ovale durch eine Veränderung in den Coefficienten der Gleichung ſich in einem Doppel-Punct zuſammenzieht, ſo entſteht ein Rückgang mit einem Schnabel. Die Übergänge in den Geſtalten der krummen Linien durch die Veränderungen der Conſtanten in ihren Gleichungen ſind wirklich ſonderbar und merkwürdig.

Rithmomachia (ſt. Arithmomachia, oder ſtatt Rhythmomachia) Zahlenkampf, ein arithmetiſches Spiel, deſſen Erfindung den Pythagoräern zugeſchrieben wird. In einer Sammlung arithmetiſcher Schriften, wovon die zweyte Ausgabe bey Henricus Stephanus zu Paris 1514 herausgekommen iſt, iſt befindlich Rithmimachie ludus qui et pugna numerorum appellatur, von Jacobus Faber Stapulenſis, mit einer kurzen Beſchreibung des dazugehörigen Brettes mit Flächen (wie ein Schachbrett), nebſt den Steinen. S. Käſtners Geſchichte der Mathematik, Th. I, S. 88. ff.

Ein Italiener, Barozzi, hat auch dieſes Spiel beſchrieben. Der Titel iſt: Il nobiliſſimo et antiquiſſimo Giuoco Pythagoreo, nominato Rithmomachia, cioè battaglia de conſonantie de nume-

ri ritrovato per utilità et solazzo delli Studioſi. Et al preſente per Franceſco Barozzi Gentilhuomo Venetiano in lingua volgare in domo di Paraphraſi compoſto; in Venetia 1572. 24 Quartblätter.

Eine Überſetzung dieſer Schrift iſt dem Schach- oder Königſpiel von Guſtavo Seleno, (dem Braunſchweigiſch-Wolfenbüttelſchen Herzoge Auguſt) Leipzig, 1616. angehängt. Die Steine ſind in Form von Scheiben, Dreyecken und Vierecken, auf einer Seite weiß, auf der andern ſchwarz. Sie ſind mit gewiſſen Zahlen auf beiden Seiten bezeichnet. Die Spieler können ſich die Steine nach Maaßgabe der bezeichneten Zahlen auf verſchiedene Arten nehmen und durch Umkehren in eigene verwandeln; auch kann ein Stein durch Einſperren genommen werden. Der Sieg wird erhalten, wenn man in des Gegners Feld Steine bringt, deren Zahlen eine arithmetiſche, geometriſche oder harmoniſche Proportion ausmachen; ein größerer, wenn man vier Steine hineinſpielt, deren Zahlen Glieder zweyer dieſer Proportionen ſind; der größeſte, wenn ſie alle drey Proportionen liefern.

Murhard führt in ſeiner Litteratur der Mathematik an: Le trés-excellent et ancien jeu Pythagorique dict. Rithmomachi etc. pour obtenir vraye et prompte habitude en toute nombre et proportion, à Paris, 1576.

Von einer Schrift des Alterthums über ein ſolches Spiel weiß man nichts.

Röſſelſprung, ſ. Springer auf dem Schachbrete.

Rücklaufende oder wiederkehrende Reihe (series recurrens) iſt eine ſolche, worin jedes Glied das Aggregat der Producte einiger zunächſt vorhergehenden Glieder in beſtimmte Zahlen

in derſelben Ordnung genommen, iſt. Die beſtimmten Zahlen, mit ihren Vorzeichen verbunden, machen die Verhältniß- oder Beziehungs-Scale (Scala relationis, *échelle de relation*) aus. Die Anzahl der beſtimmten Factoren zeigt die **Ordnung** einer rücklaufenden Reihe an.

1. Eine geometriſche Reihe iſt eine rücklaufende Reihe, in welcher die Scale der Relation aus einem einzigen Gliede, dem Exponenten, mit dem Vorzeichen + oder — beſteht. Das erſte Glied iſt willkührlich.

2. Wenn die Scale der Relation aus zwey Gliedern beſteht, ſo können die zwey erſten Glieder der Reihe nach Gefallen angenommen, oder den Bedingungen der Frage zufolge beſtimmt werden. Hat die Scale m Glieder, ſo ſind die m erſten Glieder der Reihe, willkührlich oder durch gegebene Bedingungen beſtimmt. Z. B. die Scale ſey + 3, — 1, die beiden erſten Glieder ſetze man 1, 2, ſo iſt die Reihe:

1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, u. ſ. f.

Sind die beiden erſten Glieder 1, 3, ſo iſt die Reihe:

1, 3, 10, 27, 71, 186, 487, 1275 etc.

Eine ſehr irregulär ſcheinende Reihe kann ſolchergeſtalt nach einem ſehr einfachen Geſetze gebildet ſeyn.

3. Iſt die Scale der Relation + 2, — 1, ſo iſt die Reihe eine arithmetiſche der zweyten Ordnung; iſt die Scale + 3, — 3, + 1, ſo iſt die Reihe eine arithmetiſche der dritten Ordnung; iſt ſie + 4, — 6, + 4, — 1, ſo iſt die Reihe von der vierten Ordnung; iſt die Scale

$$+\,m;\ -\,\frac{m\,.\,m-1.}{1\,.\,2};\ +\,\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\ldots \pm m,\ \mp 1,$$

ſo iſt die Reihe eine arithmetiſche der mten Ordnung, ſ. arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen, 3. 4.

4. Alle rücklaufenden Reihen entſtehen durch die Diviſion einer rationalen Function von einer veränderlichen Größe durch eine andere Function dieſer Art, worin die höchſte Potenz der veränderlichen Größe wenigſtens einen Grad höher iſt, als in dem Dividendus. Die Coefficienten der veränderlichen Größe in dem Quotienten machen die rücklaufende Reihe aus. Dieſer Bruch heißt der erzeugende Bruch, Urbruch (*fraction génératrice.*).

5. Es ſey nämlich $\frac{a + bz}{1 - \alpha z + \beta z^2} =$
$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$ ſo iſt

$$\begin{aligned} a + bz = A &+ Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.} \\ &- A\alpha. - B\alpha. - C\alpha. - D\alpha. - \text{etc.} \\ &+ A\beta. + B\beta. + C\beta. + \text{etc.} \end{aligned}$$

wo die Puncte die Stelle der Potenzen von z vertreten.

Die Vergleichung der Coefficienten in beiden Theilen der Gleichung, giebt

$$\begin{aligned} &A = a; \\ &B - A\alpha = b; \\ &C - B\alpha + A\beta = 0; \\ &D - C\alpha + B\beta = 0; \\ &E - D\alpha + C\beta = 0; \end{aligned}$$

u. ſ. f.

alſo

$$\begin{aligned} A = a;\; B &= A\alpha + b \\ C = B\alpha - C\beta;\; D &= C\alpha - B\beta, \\ E = D\alpha - C\beta;\; F &= E\alpha - D\beta, \end{aligned}$$

u. ſ. f.

Die Scale der Relation iſt demnach $+ \alpha, - \beta$.

6. Es ſey $\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3} =$
$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$

ſo giebt die Multiplication des Quotienten mit dem Diviſor und die Vergleichung mit dem Dividendus die Werthe der Coefficienten,

$$\begin{aligned} A &= a; \\ B &= A\alpha + b; \\ C &= B\alpha - A\beta + c; \\ D &= C\alpha - B\beta + A\gamma; \\ E &= D\alpha - C\beta + B\gamma; \\ F &= E\alpha - D\beta + C\gamma; \end{aligned}$$

u. ſ. f.

Die Scale der Relation iſt $+\alpha, -\beta, +\gamma$.

7. Auf gleiche Art folgt aus dem Bruche $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$ die Scale der Relation $+\alpha, -\beta, +\gamma, -\delta$, und die Coefficienten der erſten vier Glieder des Quotienten, $A = a$; $B = A\alpha + b$; $C = B\alpha - A\beta + c$; $D = C\alpha - B\beta + A\gamma + d$. Der Fünfte iſt $E = D\alpha - C\beta + B\gamma - A\delta$, und nach dieſer Form auch die folgenden.

8 Die Scale der Relation mag auch eine unendliche Anzahl von Gliedern enthalten, wenn nämlich der Diviſor eine unendliche Reihe iſt.

9. Bey dieſer Entwickelung einer gebrochenen Function in eine Reihe hat jeder Coefficient eine involutoriſche Form, da er aus mehrern vorhergehenden, nicht ſelten aus allen zuſammengeſetzt wird, z. B. die Reihe für sec φ, in Cyklometrie, 22. Es iſt aber auch möglich, die Coefficienten unabhängig von einander, durch einen algebraiſchen Ausdruck anzugeben, mittelſt der Wurzeln derjenigen Gleichung, welche entſteht, wenn der Diviſor $= 0$ geſetzt wird. Man muß nämlich den Bruch in partielle Brüche, nach Function, 20 ff. zerlegen. Hat ein ſolcher Bruch die Form

$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}$, ſo giebt die Entwickelung eine geometriſche Reihe, deren allgemeines Glied ſich ſogleich ergiebt. Hat der partielle Bruch die Form $\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^m}$, ſo giebt der binomiſche Lehrſatz das allgemeine Glied durch die Stelle deſſelben an. Hat der partielle Bruch die Form $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{1 - pz + qz^2}$, wo der Nenner nicht zerlegbar iſt, ſo verfährt man entweder ſo, wie in dem Artikel, Function, 32, 33, angewieſen iſt, oder nach einer andern Art, die hier gewieſen werden wird.

10. Es ſey der zu entwickelnde Bruch $\frac{a + bz}{1 - \alpha z + \beta z^2} = Z$, und die Gleichung $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, oder $\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} z + z^2 = 0$, habe zwey mögliche, ungleiche Wurzeln, die durch $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ bezeichnet werden. Es iſt nun $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} . \frac{1}{q}$ (Gleichung 40), und $\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} + z^2 = \left(z - \frac{1}{p}\right) \left(z - \frac{1}{q}\right)$ eben daſ. 43. Multiplicirt man auf der einen Seite mit β, auf der andern mit pq, ſo iſt

$$1 - \alpha z + \beta z^2 = (pz - 1)(qz - 1),$$

oder

$$1 - \alpha z + \beta z^2 = (1 - pz)(1 - qz).$$

Nun läßt ſich die gebrochene Function Z, in zwey gebrochene zerlegen, $Z = \frac{\mathfrak{A}}{1-pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1-qz}$ wo,

$\mathfrak{A} = \frac{ap + b}{p - q}$, und $\mathfrak{B} = - \frac{aq + b}{p - q}$ iſt, Function,

21. Dadurch iſt

$$Z = \begin{matrix} \mathfrak{A}(1 + pz + p^2z^2 + \ldots + p^m z^m + \text{etc.}) \\ + \mathfrak{B}(1 + qz + q^2z^2 + \ldots + q^m z^m + \text{etc.}) \end{matrix}$$

Wie vorher ſey $Z = A + Bz + Cz^2 \; . \; . \; . \; . + Mz^m + \text{etc.}$ ſo iſt $M + \mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m$.

Das Product $(1 - pz)(1 - qz)$ entwickelt, iſt $= 1 - (p + q)z + pqz^2$, alſo iſt $p + q = \alpha$; $pq = \beta$, und daher iſt

$$p = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\right)};$$

$$q = \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\right)}$$

aus Gleichung, 38. Damit p und q mögliche Größen ſeyn, muß $\frac{1}{4}\alpha^2 > \beta$ oder $\alpha^2 > 4\beta$ ſeyn.

11. Der zu entwickelnde Bruch ſey

$\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^2} = Z$, und die Gleichung

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = 0, \text{ oder}$$

$\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\beta}{\gamma} z^2 - z^3 = 0$, habe die drey möglichen ungleichen Wurzeln, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$. Es iſt

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{r}, \text{ und}$$

$$z^3 - \frac{\beta}{\gamma} z^2 + \frac{\alpha}{\gamma} z - \frac{1}{\gamma}$$

$$= \left(z - \frac{1}{p}\right)\left(z - \frac{1}{q}\left(z - \frac{1}{r}\right),\right.$$

Gleichung, 60, 61. Multiplicirt man auf der einen Seite mit γ, auf der andern mit pqr, und vertauſcht zugleich die Vorzeichen, ſo iſt

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = (1 - pz)(1 - qz)(1 - rz).$$

Die gebrochene Function Z läßt ſich nun in die Brüche

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1 - qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1 - rz},$$

zerlegen, worin

$$\mathfrak{A} = \frac{ap^2 + bp + c}{(p - q)(p - r)}; \quad \mathfrak{B} = \frac{aq^2 + bq + c}{(q - p)(q - r)};$$

$\mathfrak{C} = \frac{ar^2 + bp + c}{(r - q)(r - p)}$ iſt. Daraus wird das allgemeine Glied in der entwickelten Function

$$Mz^m = (\mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m + \mathfrak{C}z^m)\, z^m.$$

12. Auf ähnliche Art wird eine gebrochene Function $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}}$, deren Nenner das Product aus n möglichen, ungleichen Factoren von der Form $(1 - pz)$ iſt, in n Brüche von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz}$ zerlegt, deren jeder zu dem allgemeinen Gliede Mz^m einen Terminus, wie $\mathfrak{A}p^m z^m$ liefert.

13. Der Nenner des zu entwickelnden Bruches habe zwey gleiche Factoren, jeden $= 1 - pz$, ſo entſtehen daraus die beiden partiellen Brüche $\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)}$ $+ \frac{\mathfrak{B}}{1 - pz^2}$, nach Function, 28. Die Zähler werden nebſt den Zählern der übrigen partiellen Brüche auf die a. a. O. gewieſene Art beſtimmt. Da ferner $(1 - pz)^{-2} = 1 + 2pz + 3p^2z^2 \ldots + (m + 1)p^m z^m$ $+$ etc. iſt, ſo entſteht aus dem erſten jener beiden

Brüche in dem allgemeinen Gliede Mz^m der Terminus $(m + 1)\, \mathfrak{A}p^m z^m$. Aus dem andern kommt zu dieſem der Terminus $\mathfrak{B}p^m z^m$, und der Coefficient von z^m wird $= (m + 1)\, \mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}p^m + \mathfrak{C}q^m$ + etc.

Man kann auch den partiellen Bruch, der aus dem Factor $(1 - pz)^2$ des Nenners entſpringt, ſetzen $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{(1 - pz)^2}$, welcher nun anſtatt jener beiden Brüche allein kommt. In dem allgemeinen Gliede Mz^m iſt nun der daraus entſtehende Terminus

$$= ((m + 1)\, \mathfrak{A}p^m + m\, \mathfrak{B}p^{m-1}) z^m.$$

14. Der Nenner der gebrochenen Function habe den cubiſchen Factor $(1 - pz)^3$, ſo entſtehen daraus drey partielle Brüche, $\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^3} + \frac{\mathfrak{B}}{(1 - pz)^2}$ $+ \frac{\mathfrak{C}}{1 - pz}$, und hieraus in dem Coefficienten M des Gliedes Mz^m aus der gebrochenen Function der Terminus

$$\frac{m + 1 \,.\, m + 2 \,.}{1 \,.\, 2}\, \mathfrak{A}p^m + (m + 1)\, \mathfrak{B}p^m + \mathfrak{C}p^m.$$

Oder man nimmt ſtatt jener drey partiellen Brüche den Bruch $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2}{(1 - pz)^3}$.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn noch höhere Potenzen eines einfachen Factors $1 - pz$ in dem Nenner der gebrochenen Function enthalten ſind.

15. Exempel. Das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche $\frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$ entſteht, oder der Reihe

$1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + 454z^5$ + etc. anzugeben.

Der Nenner iſt das Product $(1-2z)(1-3z)$, alſo iſt $p = 2$, $q = 3$; und $a = 1$; $b = -1$. Alſo iſt in (10), $\mathfrak{A} = -1$; $\mathfrak{B} = +2$, und das allgemeine Glied $= (-2^m + 2 \cdot 3^m)\, z^m$.

Die Scale der Relation iſt $+5; -6$.

16. Exempel. Das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche $\dfrac{1 - 5z + 8z^2}{1 - 8z + 21z^2 - 18z^3}$ oder der Reihe
$1 + 3z + 11z^2 + 43z^3 + 167z^4 + 631z^6$ + etc. zu finden.

Die Reihe ſelbſt wird nach den Formeln für die Coefficienten (6.) gefunden, da die Scale der Relation iſt $+8; -21; +18$. Der Nenner iſt gleich dem Producte $(1-3z)^2\,(1-2z)$. Man ſetze

$$\frac{1 - 5z + 8z^2}{(1-3z)^2\,(1-2z)} =$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-3z)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{1-3z} + \frac{\mathfrak{C}}{1-2z}.$$

Bringt man dieſe Brüche auf denſelben Nenner mit dem vorgegebenen, ſo wird dadurch
$\mathfrak{A}(1-2z) + \mathfrak{B}(1-3z)(1-2z) + \mathfrak{C}(1-3z)^2 = 1 - 5z + 8z^2$. Das giebt

I. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1$;
II. $-2\mathfrak{A} - 5\mathfrak{B} - 6\mathfrak{C} = -5$
III. $6\mathfrak{B} + 9\mathfrak{C} = 8$.

Durch die Elimination zweyer dieſer Größen findet man die dritte. Solchergeſtalt iſt

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{3};\ \ \mathfrak{B} = -\frac{5}{3};\ \ \mathfrak{C} = 2,$$

und das allgemeine Glied der Reihe iſt

$$= \left[\frac{1}{3} (2m - 3) \cdot 3^m + 2 \cdot 2^m \right] z^m.$$

Die zweyte Zerlegung der gebrochenen Function (13.) in die Brüche, $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{(1-pz)^2} + \frac{\mathfrak{C}}{1-qz}$, giebt für dieſes Exempel

$$\frac{1 - 5z + 8z^2}{(1 - 3z)^2 (1 - 2z)} = \frac{-1 + 5z}{(1 - 3z)^2} + \frac{2}{1 - 2z}.$$

17. Der Nenner der Function

$Z = \frac{a + bz}{1 - \alpha z + \beta z^2}$ habe keine mögliche Factoren, weil $\alpha^2 < 4\beta$ iſt, daher die Gleichung

$1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, oder $\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} z + z^2 = 0$,

keine mögliche Wurzeln hat. (Gleichung, 36 44.). Man ſetze $\frac{\alpha\alpha}{4\beta} = \cos\varphi^2$, wodurch $\frac{\alpha\alpha}{4\beta}$ ein eigentlicher Bruch wird, der Vorausſetzung gemäß; auch ſchreibe man f^2 für β, ſo daß $\alpha = 2f\cos\varphi$, und $1 - \alpha z + \beta z^2 = 1 - 2f\cos\varphi \cdot z + f^2z^2$ ſey. Dieſer Größe gebe man die Form eines Products, $(1 - pz)(1 - qz)$, obwohl die beiden p, q unmögliche Größen ſind, ſo iſt $p + q = 2f\cos\varphi$, und $pq = f^2$, beides mögliche Größen. Aber es iſt

$$p = f\cos\varphi + f\sin\varphi \cdot \sqrt{-1},$$
$$q = f\cos\varphi - f\sin\varphi \cdot \sqrt{-1}.$$

Die Function Z wird nun wie vorher (10.) in die beiden eingebildeten Brüche, $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1-qz}$ zerlegt und daher in zwey eingebildete geometriſche Reihen, deren allgemeines Glied iſt

$$Mz^m = (\mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m)\, z^m.$$

Jeder der beiden Theile iſt eine unmögliche Größe, die Summe aber iſt eine mögliche.

18. Denn es iſt aus Goniometrie, 100,

$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi + \sin m\varphi . \sqrt{-1}$.

Alſo

$$p^m = f^m (\cos m\varphi + \sin m\varphi . \sqrt{-});$$
$$q^m = f^m (\cos m\varphi - \sin m\varphi . \sqrt{-1}),$$

und daraus

$$M = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\, f^m \cos m\varphi$$
$$+ (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\, f^m \sin m\varphi . \sqrt{-1}.$$

Nun iſt oben (10.) gefunden:

$\mathfrak{A} = \dfrac{ap + b}{p - q}$; $\mathfrak{B} = -\dfrac{aq + b}{p - q}$, alſo iſt

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a$; und $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \dfrac{a(p+q) + 2b}{p - q}$

$= \dfrac{af\cos\varphi + b}{f\sin\varphi . \sqrt{-1}}$. Daher iſt

$$M = af^m \cos m\varphi + \frac{af\cos\varphi + b}{f\sin\varphi} . f^m \sin m\varphi.$$

Da

$\sin\varphi . \cos m\varphi + \cos\varphi . \sin m\varphi = \sin(m+1)\varphi$

iſt, (Goniometrie, 24.) ſo iſt

$$M = \frac{f^m}{\sin\varphi}\left(a\sin(m+1)\varphi + \frac{b}{f}\sin m\varphi\right).$$

Der Winkel φ iſt durch die Gleichung, $\dfrac{\alpha^2}{4\beta} = \cos\varphi^2$, gegeben.

19. Exempel. Der Bruch ſey $\dfrac{1 + 2z}{1 - z + z^2}$,

ſo iſt $a = 1$; $b = 2$; $\alpha = +1$; $\beta = +1$;

$f = 1$; $\cos\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$; alſo

$$M = \frac{1}{\sin \frac{1}{3}\pi}\left(\sin\frac{(m+1)\pi}{3} + 2\sin\frac{m\pi}{3}\right).$$

Die Sinus der Vielfachen von $\frac{1}{3}\pi$ ſind gleich einem der Sinus von $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}$, von welchen die beiden erſten dem sin 60°, der 4te und 5te = — sin 60°, die beiden übrigen = 0 ſind. Daher iſt

$$\frac{1+2z}{1-z+z^2} = 1 + 3z + 2z^2 - z^3 - 3z^4 - 2z^5 + z^6$$

+ etc. wo die Scale der Relation iſt + 1; — 1, wie es auch die Diviſion ergiebt.

20. Aus jedem Paare unmöglicher zuſammengehörigen Factoren, welche der Nenner einer gebrochenen rationalen Function enthält, entſteht bey der Zerlegung der Function ein Bruch von der Form

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{1 - 2f\cos\varphi . z + ffz^2},$$

welcher in eine Reihe verwandelt, ein allgemeines Glied, $M'z^m$, giebt, wo M' die in (18.) gefundene Form hat, und $M'z^m$ ein Theil des allgemeinen Gliedes Mz^m der Reihe iſt, in welche die vorgegebene gebrochene Function aufgelöſet wird.

Den Werth von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in jedem partiellen Bruche zu beſtimmen, verfahre man entweder nach Function, 33, oder, wenn dieſer zu beſchwerlich ſeyn ſollte, nach der von Euler in der Introd. in Anal. Inf. §. 201 ff. gewieſenen Methode, welche derjenigen in dem Artik. Function vorgetragenen analog iſt.

21. Es ſey nämlich

$$Z = \frac{P}{(1 - 2f\cos\varphi . z + f^2z^2)V},$$

wo P und V zwey ganze Functionen von z ſind, und der dreytheilige Factor auf die in (17.) gezeigte Art beſtimmt iſt. Der partielle Bruch, der aus dieſem Factor entſteht, ſey, wie vorher,

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{1 - 2f\cos\varphi \,.\, z + f^2z^2},$$ und $\frac{Y}{V}$ der ergänzende Bruch zu der Function Z. Es iſt nun

$$P = \mathfrak{A}V + \mathfrak{B}Vz + (1 - 2f\cos\varphi \,.\, z + f^2z^2)\, V$$

daher

$$\frac{P - \mathfrak{A}V - \mathfrak{B}Vz}{1 - 2f\cos\varphi \,.\, z + f^2z^2} = Y.$$

Da Y eine ganze Function iſt, ſo iſt der Zähler des Bruches durch den Nenner theilbar, oder enthält denſelben als Factor; wird alſo $= 0$, wenn dieſer $= 0$ iſt. Dieſes geſchieht, wenn für z eine der Wurzeln der Gleichung, $1 - 2f\cos\varphi \,.\, z + f^2z^2 = 0$ geſetzt wird. Dieſe ſind $\frac{1}{f}(\cos\varphi \underline{+} \sin\varphi \,.\, \sqrt{-1})$. Setzt man dieſe Werthe in die Function $P - \mathfrak{A}V - \mathfrak{B}Vz$, ſo entſteht eine Doppelgleichung, in welcher das mögliche dem möglichen, ſo wie das unmögliche dem unmöglichen gleich iſt. Durch dieſe zweyfache Gleichung werden nun die beiden unbekannten Größen, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, beſtimmt.

22. Bey dem hier gezeigten Verfahren, das allgemeine Glied einer rücklaufenden Reihe zu finden, iſt es hinderlich, daß die Zerfällung des Nenners in Factoren von der Auflöſung der Gleichungen abhängt, welche meiſtens nur irrationale und genäherte Werthe der Wurzeln liefert. La Grange hat eine merkwürdige und feine Methode angegeben, wobey es nicht nöthig iſt, die Werthe der Wurzeln, welche den Nenner auf Null bringen, zu wiſſen, ſondern in jedem Falle unabhängig von dieſen Werthen das allgemeine Glied der Reihe durch wiederhohlte Differentiirung einer gegebenen

nen Function findet. De la résolution des équations numériques, p. 215 ss. Daraus in Lacroix traité des différences et des séries, art. 1120. 1121. Inzwiſchen empfiehlt ſich die Euleriſche Darſtellung des allgemeinen Gliedes dadurch, daß man das Geſetz der Formation daran deutlicher wahrnimmt, und daß man es benöthigt iſt, um zwiſchen die Hauptglieder andere einzuſchalten.

23. Walmesley hat ſchon früher verſucht, das allgemeine Glied einer rücklaufenden Reihe zu finden ohne die Factoren des Nenners in dem Urbruche dazu nöthig zu haben, in den Mém. de l'Ac. de Berlin, 1758, allein ſeine Auflöſung erfordert eine gar zu weitläufige Rechnung, daß man ſich ihrer ſchwerlich wird bedienen mögen.

24. Arbogaſt hat in ſeinem Calcul des Dérivations, à Paris 1800. nr. 205. das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche

$$\frac{a+bx+cx^2+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.}}$$

entſteht, ganz kurz durch ſeine Bezeichnungsart dargeſtellt. Der Coefficient zu der Potenz x^m in der Reihe iſt $= \underset{c}{D}^m.(a\alpha^{-1})$, wo das c unter dem Derivationszeichen D das Product 1. 2. 3. . . . m bedeutet. Die Derivation iſt, wie der Punct anzeigt, eine zuſammengeſetzte, ſ. Derivations-Rechnung, 9. Allein es iſt hier eine doppelte Entwicklung nöthig. Die Diviſion wird als eine Multiplication mit der Function $(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.})^{-1}$ betrachtet. Nun müſſen erſtlich die Derivirten, welche aus dem einen Factor, dem Zähler, entſtehen, beſtimmt werden. Dieſes giebt den Coefficienten, der durch A_m bezeichnet werde,

$$A_m = a\underset{c}{D}^m.\alpha^{-1} + b\underset{c}{D}^{m-1}.\alpha^{-2} + c\underset{c}{D}^{m-2}.\alpha^{-3} + \text{etc.}$$

Die Derivirten aus der entwickelten Function $(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.})^{-1}$ werden aus den Formeln,

Derivations-Rechnung, 21. gefunden, wenn daſelbſt $\varphi\alpha = \alpha^{-1}$ geſetzt wird.

25. Es braucht aber dieſer, etwas verwirrenden, Rechnung nicht, da die bloße Diviſion, mittelſt der angenommenen Form des Quotienten, das Geſetz der Coefficienten deutlich genug zu erkennen giebt. Dieſes iſt in dem Artikel, Buchſtabenrechnung, 27. Th. I. S. 383. ſchon geſchehen. Vorzüglicher iſt der Ausdruck, der durch die combinatoriſche Analyſis (ſ. dieſe, 37. Th. I. S. 494) gefunden iſt. Daſelbſt ſind alle Glieder des Nenners nach dem erſten ſubtractiv. Sind ſie alle additiv, ſo werden die Combinationen von einer ungeraden Anzahl aus β, γ, δ, ε, etc. negativ. Zur bequemern Vergleichung mit Arbogaſts Derivations-Formel oder jeder andern ſetze ich die fünf erſten Coefficienten in der Reihe für $\dfrac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{1 + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}$ her. Die Reihe ſey $P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + Tx^4 +$ etc. ſo iſt

$P = a.$

$Q = -\,a\,\mathfrak{a}\,{}^1A + b.$

$R = -\,a\,(\mathfrak{a}\,{}^2A - \mathfrak{b}\,{}^2B) - b\,\mathfrak{a}\,{}^1A + c.$

$S = -\,a\,(\mathfrak{a}\,{}^3A - \mathfrak{b}\,{}^3B + \mathfrak{c}\,{}^3C) - b\,(\mathfrak{a}\,{}^2A - \mathfrak{b}\,{}^2B)$
$\quad - c\,\mathfrak{a}\,{}^1A + d.$

$T = -\,a\,(\mathfrak{a}\,{}^4A - \mathfrak{b}\,{}^4B + \mathfrak{c}\,{}^4C - \mathfrak{d}\,{}^4D)$
$\quad - b\,(\mathfrak{a}\,{}^3A - \mathfrak{b}\,{}^3B + \mathfrak{c}\,{}^3C)$
$\quad - c\,(\mathfrak{a}\,{}^2A - \mathfrak{b}\,{}^2B) - d\,\mathfrak{a}\,{}^1A + e.$

u. ſ. f.

Die lateiniſchen Buchſtaben bedeuten Combinationen der β, γ, δ, ε, etc., ſo vieler als die Stellenzahl des Buchſtabens Einer enthält, und ſolcher, deren Summe, zufolge des Zeigers,

$$\begin{matrix}\beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots\end{matrix}$$

die dem lateiniſchen Buchſtaben beygefügte Ziffer angiebt. Der deutſche kleine Buchſtab zeigt überhaupt an, daß jeder Combination die Verſetzungszahl ihrer Elemente beyzufügen iſt. S. combinatoriſche Analyſis, 28, 29.

So iſt

$$T = -a(\varepsilon - (2\beta\delta + \gamma^2) + 3\beta^2\gamma - \beta^4) - b(\delta - 2\beta\gamma + \beta^3) - c(\gamma - \beta^2) - d\beta + e.$$

Das Geſetz der Formation iſt ganz deutlich.

Wenn man zum erſten Gliede des Diviſors α behält, ſo werden a, b, c, d, etc. jede durch α dividirt, und ſtatt A, B, C, D, etc. werden $\frac{A}{\alpha}$, $\frac{B}{\alpha^2}$, $\frac{C}{\alpha^3}$, $\frac{D}{\alpha^4}$, etc. geſetzt.

Die Hindenburgiſche combinatoriſche Formel muß ſo wie Arbogaſts Derivationsformel durch zuſammengeſetzte Operationen gehen, allein bei der letztern hält es ſchwer, ſich von den zuſammengeſetzten Derivationen, die ſich auf mehrere Glieder einer Function beziehen, einen netten Begriff zu machen. Auch die entwickelte Derivationsformel (Derivations-Rechnung, 21.) gewährt keine helle Einſicht, wenn man nicht bemerkt, daß die Factoren zu den derivirten Größen die vollſtändigen Combinationen einer gewiſſen Gattung mit ihren Verſetzungszahlen ſind. Arbogaſt bemerkt dieſes nirgends in ſeinem ſonſt ſehr ſchätzbaren Werke. Daher muß er viele, theils ſehr zuſammengeſetzte Regeln für die Entwickelung ſeiner Derivationen geben, deren Grund man nicht anders als empiriſch einſieht, beſonders was die numeriſchen Factoren oder die Verſetzungszahlen betrifft. Es iſt ein Vortheil bey der Hindenburgiſchen Methode, daß die Combinationen unabhängig von ihren numeriſchen Factoren gebildet werden, welches bei Arbogaſt unzertrennlich iſt.

Uebrigens iſt die Arbogaſtiſche Methode ſehr bequem, wenn unbeſtimmte Functionen, wie $\varphi(a + bx + cx^2 + \text{etc.})$; $\psi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ oder noch mehrere mit einander multiplicirt, oder durch einander dividirt werden ſollen.

Die Hindenburgiſche Entwickelung gebrochner Functionen findet man in deſſen Systema permutationum, combinationum, cet. Lips. 1781. p. 78. ss. und noch allgemeiner in der zweyten Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen, Leipzig, 1780. Es iſt daſelbſt ein Bruch, deſſen Zähler und Nenner Potenzen eines Polynomium ſind, in den vielbefaſſenden combinatoriſchen Symbolen, auf zweyerley Art, abhängig und unabhängig, in eine Reihe gebracht. Die völlige Entwicklung giebt Euler in den Calc. differ. P. II. §. 207.

26. In dieſer Sammlung iſt auch eine Abhandlung von Trembley enthalten, worin gezeigt wird, wie man, ohne den Nenner einer gebrochnen Function in Factoren zu zerfällen, das allgemeine Glied der Reihe finden könne. Die Methode iſt von den vorher angeführten ganz verſchieden, und legt den Euleriſchen Ausdruck des allgemeinen Gliedes zum Grunde. Doch beruht ſie auf einer Induction. Bey Brüchen mit vier Gliedern im Nenner (bis zur dritten Potenz von x) wird das Geſetz ſchon ziemlich verwickelt, noch vielmehr bey Brüchen von höhern Nennern. Ich bemerke noch bey dieſen Formeln, daß die numeriſchen Coefficienten bey einer Reihe der zweyten Ordnung in der Entwickelung des sin $(n+1)\varphi$ und sinφ durch den sinφ und cosφ (Goniometrie, 84) vorkommen.

27. Moivre iſt der erſte, welcher die einfachen rücklaufenden Reihen (die bisher erklärten) genauer in Betracht gezogen hat. Vor ihm waren über einzelne Fälle ſolcher Reihe Bemerkungen gemacht worden, als von Dominicus Caſſini über die Reihe, in welcher jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden iſt, der aber doch weder ihre Summe, noch ihr allgemeines Glied anzugeben ſuchte. Moivre ward durch ſeine Beſchäftigung mit der Berechnung der Wahrſcheinlichkeit in Spielen, beſonders der Dauer derſelben bis zu einem gewiſſen Ereigniß, geleitet. Die erſte Aus-

gabe ſeiner Schrift, The Doctrine of chances erſchien 1716. In den Miſcellaneis analyticis, Londini, 1730, trug er die Theorie der rücklaufenden Reihen, welche von ihm auch ihre Benennung erhalten haben, ausführlich vor. Er zeigte, wie die Summe oder der erzeugende Bruch dieſer Reihen gefunden wird, und die Form des allgemeinen Gliedes durch die Zerfällung des Nenners jenes Bruches, der = o geſetzt wird, in binomiſche Factoren. Darüber hat ſich in der Folge Euler in ſeiner Introd. in Anal. Inf. ausführlich verbreitet.

28. Daniel Bernoulli machte von den rücklaufenden Reihen eine Anwendung auf die annähernde Auflöſung der Gleichungen, in den ältern Petersburger Commentarien, T. III. Davon unten.

29. La Grange hat ſich verſchiedentlich mit dieſen Reihen beſchäftigt, zuerſt in dem erſten Bande der Miſcellan. Taurinenſium, wo er die Erfindung des allgemeinen Gliedes auf die Integration einer geariſchen Gleichung mit endlichen Differenzen bringt, und dieſe Integration auch auf die Fälle ausdehnt, wo die Gleichung, welche die Relation zwiſchen den Gliedern der Reihe darſtellt, eine Function der veränderlichen Größe zum letzten Gliede hat. Ein beſonderer Fall, den Vincent Riccati in den Mém. préſentés, T. V. unterſucht hat, iſt, wenn dieſes letzte Glied, dieſe Zugabe, eine beſtändige Größe iſt.

In den Memoiren der Berliner Akademie für 1775 iſt eine tiefſinnige Abhandlung von dieſem großen Analyſten über die rücklaufenden Reihen, vorzüglich über die doppelten und dreyfachen, enthalten, nebſt Anwendungen auf die Glücksſpiele. In den Mém. de Paris für 1772 zeigt er in einer Abhandlung über die Art, wie man blos aus Beobachtungen Tafeln über den Lauf der Planeten verfertigen könne, zugleich, wie man eine vorgegebene Reihe prüfen könne, ob ſie eine rücklaufende ſey. Davon handelt er auch in einer Abhandlung über das Ein-

ſchalten in dem Aſtronomiſchen Jahrbuche der Berliner Akademie für 1783. Prony hat gleichfalls die Haupt-probleme über die rücklaufenden Reihen in dem Journal de l'Ecole polytechnique ausführlich behandelt.

30. La Place hat ſehr künſtliche Unterſuchungen über die Doppelreihen, die er recurro-recurrentes nennt, angeſtellt, in den Mém. présentés, T. VI et VII. Er behandelt ſie als einen beſondern Fall der Integrationen von Gleichungen mit endlichen partiellen Differenzen für mehrere veränderliche Größen. In den Mém. de l'Acad. pour 1779 hat er die Materie aufs neue vorgenommen, und in der Théorie analytique des probabilités (Paris 1814) ſolche auf eine noch allgemeinere Art vorgetragen.

31. Die vorher erwähnte Anwendung der rücklaufenden Reihen auf die Erfindung der Wurzeln einer Gleichung geſchieht folgendergeſtalt.

Es ſey der erzeugende Bruch $=$ $\frac{a + bz + cz^2 + \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}}$, und die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta x^2 - \gamma z^3 + \text{etc.} = 0$, ſeyn alle möglich und verſchieden, ſo iſt, wenn $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, etc. die Wurzeln derſelben ſind, der Coefficient zu z^m,

$$M = \mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m + \mathfrak{C}r^m + \text{etc.}$$

Der nächſtfolgende zu z^{m+1} iſt

$$N = \mathfrak{A}p^{m+1} + \mathfrak{B}q^{m+1} + \mathfrak{C}r^{m+1} + \text{etc.}$$

aus (12.). Es bedeute p die größte unter den Größen p, q, r, etc. alſo $\frac{1}{p}$ die kleinſte Wurzel der obigen Gleichung, ſo iſt p^m deſto größer gegen die gleichnamigen Poten-

zen von q, r, etc. je größer m iſt, ſo daß für ein unendlich großes m, gegen das erſte Glied $\mathfrak{A}p^m$ alle übrigen verſchwinden, und $\frac{M}{N} = \frac{1}{p}$ iſt. Das heißt, der Quotient zweyer auf einander folgenden Glieder $\frac{M}{N}$ der rücklaufenden Reihe nähert ſich immer mehr der kleinſten Wurzel der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.} = 0$, je weiter hin die Glieder genommen werden. Will man ihre größte Wurzel haben, ſo muß man $z = \frac{1}{x}$ ſetzen, und die Gleichung für x vermittelſt der Diviſion durch das gegebene Glied der Gleichung auf dieſelbe Form wie jene bringen.

32. Zu einer ſchnellen Annäherung wird erfordert, daß die größte reciproke Wurzel p beträchtlich größer als die übrigen ſey, damit auch für mäßig große m das erſte Glied $\mathfrak{A}p^m$ gegen die übrigen ſehr groß werde. — Wenn eine oder mehrere Wurzeln negativ ſind, ſo werden die Glieder der Reihe ſich ſehr ungleichförmig verändern, da die Potenzen der umgekehrten negativen Wurzeln wechſelsweiſe addirt und ſubtrahirt werden. — Wenn die Werthe zweyer nächſten Glieder entgegengeſetzte Vorzeichen haben, ſo iſt die geſuchte Wurzel negativ. In dieſem Falle iſt es dienlich, eine Subſtitution, $z = x - k$ zu machen, ſo daß alle Wurzeln der Gleichung poſitiv werden (oder alle Vorzeichen abwechſeln), und k zugleich der Wurzel $\frac{1}{p}$ ſchon möglichſt nahe komme. — Die Coefficienten a, b, c, etc. im Zähler bleiben unbeſtimmt, doch hängt die Annäherung zum Theil von ihnen ab, da die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. durch ſie beſtimmt werden.

33. Exempel. Die kleinſte Wurzel der Gleichung,

$1 - 6z + 8z^3 = 0$ zu finden. Die Wurzel derſelben ſind die Sinus dreyer Winkel, von deren dreyfachern der Sinus $= \frac{1}{2}$ iſt. (Goniometrie, 86).

Man bilde den Bruch $\frac{a + bz + cz^2}{1 - 6z * + 8z^3}$, und entwickele dieſen in eine Reihe. Da die Coefficienten a, b, c, willkürlich bleiben, ſo ſetze man ſie 0, 0, 1. Die Verhältniß-Scale iſt + 6; 0, — 8. Die Coefficienten von z in der entwickelten Reihe ſind nun:

0, 0, 1, 6, 36, 208, 1200, 6912, 39808, 229248, etc.

Die geſuchte kleinſte Wurzel iſt $= \frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791}$ $= 0,173651$. Da der Winkel, deſſen Sinus $= \frac{1}{2}$ iſt, 30° beträgt, ſo iſt die kleinſte Wurzel der vorgegebenen Gleichung $= 0,173648$, etwas weniger kleiner als der gefundene Werth.

34. Exempel. Die größte Wurzel der Gleichung, $1 - 6z * + 8z^3 = 0$, zu finden.

Man ſetze $z = \frac{1}{x}$, ſo wird die Gleichung $x^3 - 6x^2 * + 8 = 0$ oder $1 * - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{8} x^3$. Der erzeugende Bruch iſt $\frac{a + bx + cx^2}{1 * - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{8} x^3}$, und die Verhältnißſcale iſt $0, \frac{3}{4}, - \frac{1}{8}$. Nimmt man die drey erſten Glieder der Reihe 1, 1, 1, ſo iſt die Reihe

$1, 1, 1, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{11}{32}, \frac{25}{64}, \frac{23}{128}, \frac{64}{256}, \frac{44}{512}, \frac{169}{1024}, \frac{68}{2048}, \frac{463}{4096}, \frac{35}{8192}$, etc. Dieſe Glieder geben für

die Wurzel Werthe, die abwechſelnd größer und kleiner als 1 ſind. Die Reihe nähert ſich alſo gar nicht. In der That iſt die abſolut größte Wurzel der vorgegebenen Gleichung negativ, und $= - \sin 70° = - 0,9396926$. Goniometrie, 117.

Man muß die erſten Glieder der Reihe gleich ſo nehmen, daß ihre Quotienten der geſuchten Wurzel einigermaßen nahe kommen, zu welchem Ende man ſie auf irgend eine Art vorher erforſchen muß. Man nehme die drey erſten Glieder, $+1, -1, +1$, ſo wird die Reihe folgende: $+1, -1, +1, -\frac{7}{8}, +\frac{5}{8}$,

$$-\frac{25}{32}, +\frac{37}{64}, -\frac{85}{128}, +\frac{136}{256}, -\frac{292}{512}, +\frac{493}{1024},$$

etc.

Die beiden letzten Brüche geben für die größte Wurzel x den genäherten Werth $-\frac{584}{493}$, alſo für z den Werth $-\frac{493}{584} = -0,844..$, welches von dem wahren noch beträchtlich abweicht. Dieſes rührt theils von den erſten Gliedern der Reihe her, noch mehr daher, daß die mittlere Wurzel, nämlich $\sin 50°$, oder $0,766044..$ der geſuchten zu nahe, und zugleich entgegengeſetzt iſt.

Die Rechnung zu erleichtern, ſetze man $z = \frac{1}{2x}$, ſo wird die Gleichung dieſe, $0 = 1 - 3x^2 + x^3$, und die Verhältniß-Scale iſt $0, 3, -1$.. Man nehme die drey erſten Glieder, $+1, -2, +4$, um durch ihre Quotienten dem wahren Werthe der Wurzel x ſich zu nähern, und die Reihe wird

$+1, -2, +4, -7, +14, -25, +49,$
$-89, +172, -316, +605,$ — etc.

hier iſt $x = -\frac{316}{605}$, und $z = -\frac{605}{632} = -0,957$.

35. Man verwandle die Gleichung in eine andere, deren Wurzeln alle poſitiv ſind, dadurch daß man ſetzt $z = x - 1$. Da alle drey Werthe von z kleiner ſind als 1, ſo wird dadurch jede der Wurzeln x poſitiv. Die verwandelte Gleichung iſt $0 = -1 + 18x - 24x^2 + 8x^3$, oder $0 = 1 - 18x + 24x^2 - 8x^3$. Um dieſe noch einfacher zu machen, ſetze man $x = \frac{1}{2}y$, ſo iſt $0 = 1 - 9y + 6y^2 - y^3$. Die Verhältniß-Scale iſt $+9, -6, +1$. Die drey erſten Glieder der Reihe nehme man willkürlich an, 1, 1, 1, ſo iſt die Reihe der Coefficienten aus dem entwickelten Bruche

$$\frac{a + by + cy^2}{1 - 9y + 6y^2 - y^3} \text{ dieſe:}$$

1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861, etc.

$$\text{und } y \text{ nahe} = \frac{17593}{145861} = 0,\ 12061483;$$

$x = 0,\ 06030741$, alſo $z = -0,\ 93969259$, welches mit dem sin 70° in den Tafeln ganz übereinſtimmt.

Nimmt man die erſten drey Glieder 1, 8, 64, ſo wird die Reihe,

1, 8, 64, 529, 4385, 36355, etc. und es kommt ſchon der Bruch $\frac{4385}{36355}$ oder $\frac{877}{7271}$ der Wurzel ſehr nahe. Es iſt derſelbe $= 0,\ 1206161..$

36. Der Fall, wenn eine Gleichung zwey gleiche Wurzeln hat, macht Schwierigkeit. Der Coefficient von z^m iſt, wenn die Gleichung zwey gleiche Wurzeln, $\frac{1}{p}, \frac{1}{p}$, hat,

$$M = (m+1)\mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}p^m + \mathfrak{C}q^m + \text{etc.}$$

und der folgende

$$N = (m+2)\mathfrak{A}p^{m+1} + \mathfrak{B}p^{m+1} + \mathfrak{C}q^{m+1} + \text{etc.}$$

Iſt p größer als die andern reciproken Wurzeln q, r, etc.

ſo iſt zwar für ein unendliches m der Quotient $\frac{M}{N} = \frac{1}{p}$, allein die Annäherung zu dieſem Werthe geſchieht langſam, da mA beträchtlich größer als B werden muß. Iſt p eine mittlere Wurzel, ſo geſchieht die Annäherung immer langſam, wegen des Factors m zu A.

37. Euler ſelbſt giebt hier keine gehörige Auskunft, in der Introd. in Anal. Infin. Cap. XVII, wo die Anwendung der rücklaufenden Reihen auf die Auflöſung der Gleichungen ausführlich gezeigt wird. La Grange aber hat in der Resolution des équations numériques gewieſen, wie man ſich hier leicht helfen kann. Die Zähler der Brüche $\frac{A}{1-pz}$, $\frac{B}{1-qz}$, $\frac{C}{1-rz}$, müſſen alle gleich und $= 1$ genommen werden. Dadurch werden die Coefficienten a, b, c, etc. in dem Zähler des erzeugenden Bruches beſtimmt. Allein dieſe Brüche auf einerley Benennung gebracht, erhalten keinen quadratiſchen oder höhern potenzirten Nenner, wenn zwey oder mehrere der Größen p, q, r, etc. ſich gleich ſind. Es muß, wenn in dieſem Falle die Zerlegung in die einfachen Brüche Statt finden ſoll, der Zähler der gebrochenen Function mit dem Nenner derſelben einen oder mehrere Factoren gemein haben. Das iſt dann auch der Fall bey dem Zähler derſelben, wenn dieſer zufolge der Annahme, daß die Zähler der einfachen Brüche $= 1$ ſeyn, beſtimmt wird. Die potenzirten Factoren des Nenners werden durch die Diviſion des Zählers und Nenners mit dem gemeinſchaftlichen Factor auf einfache gebracht, und die Auflöſung in eine Reihe geſchieht wie in dem Falle, da die Factoren des Nenners alle verſchieden ſind. — Dieſe Bemerkungen hat La Grange beyzufügen nicht nöthig gefunden.

38. Es ſey $\frac{a + bz}{1 - \alpha z + \beta z^2} = \frac{1}{1 - pz}$

$+ \frac{1}{1 - qz}$, ſo daß $\alpha = p + q$, und $\beta = pq$ iſt. Werden die beiden einfachen Brüche auf einerley Nenner gebracht, ſo iſt $a = 2$; $b = -(p + q) = -\alpha$.

39. Es ſey $\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3} = \frac{1}{1 - pz} + \frac{1}{1 - qz} + \frac{1}{1 - rz}$, ſo daß $\alpha = p + q + r$; $\beta = pq + pr + qr$; $\gamma = pqr$ iſt. Die drey Brüche auf gleiche Nenner gebracht, geben $a = 3$; $b = -2(p + q + r)$; $c = pq + pr + qr$; das iſt $a = 3$; $b = -2\alpha$; $c = \beta$.

40. Es ſey $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} = \frac{1}{1 - pz} + \frac{1}{1 - qz} + \frac{1}{1 - rz} + \frac{1}{1 - sz}$, ſo iſt α gleich der Summe der p, q, r, s; β gleich der Summe ihrer Binionen; γ der Summe ihrer Ternionen, δ dem Product aller. Bringt man die einzelnen Brüche auf einen Nenner, ſo giebt die Vergleichung des Zählers mit demjenigen der gebrochnen Function, $a = 4$; $b = -3\alpha$; $c = +2\beta$; $d = -\gamma$.

41. Hieraus erhellt ſchon das Geſetz für die Coefficienten a, b, c, d, etc. hinlänglich. Man ſetze $z = \frac{1}{x}$, ſo werden die jetzt eingerichteten Brüche, wie folget.

$$\frac{2x - \alpha}{x^2 - \alpha x + \beta} = \frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q}$$

$$\frac{3x^2 - 2\alpha x + \beta}{x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma} = \frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q} + \frac{1}{x - r}.$$

$$\frac{4x^3 - 3\alpha x^2 + 2\beta x - \gamma}{x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta} = \frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q}$$

$+ \frac{1}{x - r} + \frac{1}{x - s}$. Bey dieſen Brüchen bemerke man, daß der mehrtheilige Factor des Zählers der Differential-Factor des Nenners iſt. Enthält der Nenner einen quadratiſchen Factor $(x - p)^2$, ſo iſt in dem Zähler der Factor $x - p$ vorhanden; iſt in jenem der Factor $(x - p)^3$ enthalten, ſo ſteckt in dieſem der Factor $(x - p)^2$, und auf gleiche Art bey Brüchen höherer Ordnungen für jede Potenz von $(x - p)$, Gleichung, 202.

42. Das allgemeine Glied der Reihe, die bey dieſer Einrichtung aus dem Bruche entſpringt, iſt nun $(p^m + q^m + r^m + s^m + \text{etc.})\, x^{-m}$. Die größte Wurzel ſey p, ſo iſt die Gränze des Quotienten zweyer Coefficienten, $\frac{N}{M} = p$, auch in dem Falle, wenn die größte Wurzel mehrfach iſt. Der Exponent m iſt hier kein Factor der Potenzen.

43. Exempel. Die größte Wurzel der Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ zu finden. — Es iſt nicht nöthig, x mit $\frac{1}{z}$ zu vertauſchen, um dem Nenner die Form $1 - 3x * + 4x^3$ zu geben. Der zu entwickelnde Bruch iſt nun $\frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 4}$, und die Verhältnißſcale, iſt $+ 3, 0, - 4$. Die drey erſten Glieder in der Reihe der Coefficienten ſind wie in (6.)

$$A = 3;\ B = 3.3 - 6 = 3;\ C = 3.3 = 9.$$

Hieraus ergeben ſich zufolge der Scale die folgenden, 15, 33, 63, 129, 255, u. ſ. f. welche ſich alle durch 3 theilen laſſen, weil die drey erſten dieſen Theiler haben. Da es hier nur auf die Verhältniſſe der Glieder ankommt, ſo kann man die Reihe

1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, etc.

nehmen. Die Quotienten $\frac{N}{M}$ ſind wechſelsweiſe größer und kleiner als 2. Wirklich iſt 2 eine Wurzel des Nenners = 0 geſetzt, zugleich aber auch des Zählers, wenn er = 0 ſeyn ſoll. Daher hat (Gleichung, 185.) der Nenner die Wurzel 2 zweymahl, und Zähler und Nenner haben den gemeinſchaftlichen Factor $x - 2$.

Euler findet für eben dieſes Exempel (346) die Reihe 1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711, 1593, etc. Die Quotienten bleiben immer größer als 2, und nähern ſich dieſem Werthe viel langſamer.

44. Die Einrichtung, daß die Zähler der einfachen Brüche jeder = 1 genommen werden, gewährt inzwiſchen nicht die ſchnelle Annäherung, welche man erhält, wenn die Quotienten der Anfangsglieder ſchon der geſuchten Wurzel ziemlich nahe kommen. In dem Exempel 35. iſt nach jener Einrichtung, der zu entwickelnde Bruch $\frac{3 - 18y + 6y^2}{1 - 9y + 6y^2 - y^3}$, und die Anfangsglieder ſind dadurch 3, 9, 15, wofür man, wegen des gemeinſchaftlichen Theilers 1, 3, 5 nehmen kann. Die Reihe wird nun

1, 3, 5, 28, 225, 1862, 15436; etc.

hier iſt der Quotient $\frac{225}{1862} = 0,1208.$, nicht ſo genau als der gleichſtellige in der zweyten Reihe daſelbſt. Der folgende Quotient iſt 0, 120627.

45. Durch die Annahme, daß die Zähler A, B, C, etc. = 1 ſeyn, wird der Theil des allgemeinen Gliedes, welcher aus dem möglichen Producte zweyer unmöglichen Factoren in dem Nenner der zu entwickelnden Function entſteht, $= 2\, f^m \cos m\varphi$, (17.). Iſt f oder das Product der beiden unmöglichen zuſammengehörigen reciproken Wurzeln nicht größer als das Quadrat

jeder möglichen Wurzel, ſo iſt die bisher gezeigte Methode auch auf Gleichungen mit unmöglichen Wurzeln anwendbar.

46. Was vorher von der Form des Zählers einer gebrochenen Function gezeigt iſt, wenn ſie in einfache Brüche mit dem Zähler = 1 zerlegt werden ſoll, verdient allgemein gezeigt zu werden.

Es ſey die gegebene Gleichung,

$$x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

ihre Wurzeln ſeyn p, q, r, s, etc. ſo iſt für jedes x,

$$x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} + \text{etc.} = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s), \text{ etc.} \quad \text{(I.)}$$

wo die Anzahl der Factoren = m iſt (Gleichung, 165 — 167.). Man bezeichne durch x + u irgend einen andern Werth der veränderlichen Größe, ſo bleibt

$$(x+u)^m - \alpha(x+u)^{m-1} + \beta(x+u)^{m-2} - \gamma(x+u)^{m-3} + \text{etc.} = (x+u-p)(x+u-q)(x+u-r) + (x+u-s) + \text{etc.} \text{ (II.)}.$$

Beide Theile dieſer Gleichung entwickelte man nach den Potenzen von u. Was kein u enthält, iſt die Gleichung (I.). Was in die erſte Potenz von u multiplicirt iſt, iſt in dem erſten Theile der Gleichung

$$mx^{m-1} - (m-1)\alpha x^{m-2} + (m-2)\beta x^{m-3} - (m-3)\gamma x^{m-4} + \text{etc.}$$

In dem andern Theile der Gleichung (II.) nehme man aus je einem der Factoren nach der Reihe das Glied u, und laſſe u in den übrigen Factoren weg, ſo wird das Aggregat aller Producte, die in u zu multipliciren ſind,

$$= (x-q)(x-r)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-r)(x-s) \text{ etc.} + (x-p)(x-q)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-q)(x-r) + \text{etc.} + \text{etc.}$$

Die Producte aus u^2, u^3, etc. in die zugehörigen Functionen von x brauchen hier nicht entwickelt zu werden. Da u von x ganz unabhängig iſt, ſo müſſen in der entwickelten Gleichung (II.) die Functionen von x, welche in dieſelbe Potenz von u multiplicirt ſind, ſich gleich ſeyn.

Demnach iſt

$mx^{m-1} - (m-1)\alpha x^{m-2} + (m-2)\beta x^{m-3} - (m-3)\gamma x^{m-4} + \text{etc.} =$
$(x-q)(x-r)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-r)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-q)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-q)(x-r) + \text{etc.} + \text{etc.}$ (III.)

Man dividire die Gleichung (III.) durch die Gleichung (I.), ſo iſt

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)\alpha x^{m-2} + (m-2)\beta x^{m-3} - \text{etc.}}{x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \text{etc.}}$$
$$= \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x-s} + \text{etc.}$$
(IV.)

Dieſes iſt die allgemeine Gleichung, wovon einige beſondere Fälle in (41.) ſchon gefunden ſind.

47. Setzt man $x = \frac{1}{z}$ ſo iſt

$$\frac{m-(m-1)\alpha z + (m-2)\beta z^2 - (m-3)\gamma z^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}}$$
$$= \frac{1}{1-pz} + \frac{1}{1-qz} + \frac{1}{1-rz} + \frac{1}{1-sz} + \text{etc.}$$

48. Das allgemeine Glied der entwickelten Function in (46.) iſt $= (p^m + q^m + r^m + s^m + \text{etc.})\, x^{-m-1}$; von der Function in (47.) iſt es $=$ $(p^m + q^m + r^m + s^m + \text{etc.})\, z^m$.

49. Fängt man das Polynomium $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \text{etc.}$ mit dem letzten Gliede an, und nimmt zum Nenner der gebrochenen Function dieſe aufſteigende Reihe,

$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.}$ ſo iſt

$$\frac{-b + 2cx - 3dx^2 + 4ex^2 - \text{etc.}}{a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.}}$$

=

$$= \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x-s} + \text{etc.}$$

wenn die höchſte Potenz von x immer das Vorzeichen + behält. Um eine ſteigende Reihe nach x zu erhalten, muß man die Nenner negativ nehmen, und daher auch die Brüche ſelbſt. Dann iſt das allgemeine Glied =

$$-\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \frac{1}{s^m} + \text{etc.}\right) x^{m-1}.$$

Hier nähert ſich die Reihe der Coefficienten einer abnehmenden geometriſchen Reihe, ſo wie in (48.) einer wachſenden. Dort nähert ſich der Quotient $\frac{N}{M}$ der größten Wurzel, hier der kleinſten. Die Scale der Relation iſt hier + b, — c, + d, — e, etc.

50. Der Newtoniſche Satz von dem Verhalten der Coefficienten in einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln (Combination 43) findet auf dieſem Wege einen leichten Erweis. Der erſte Theil der Gleichung (IV.) werde durch die Diviſion nach den fallenden Potenzen entwickelt, ſo daß dieſer Bruch ſey

$$\frac{m}{x} + \frac{P}{x^2} + \frac{Q}{x^3} + \frac{R}{x^4} + \frac{S}{x^5} + \text{etc.}$$

Dieſe Reihe multiplicire man durch den Nenner des Bruchs, und ſetze die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x auf beiden Seiten gleich, ſo iſt

$P = \alpha.$
$Q = \alpha P - 2\beta.$
$R = \alpha Q - \beta P + 3\gamma.$
$S = \alpha R - \beta Q + \gamma P - 4\delta.$ u. ſ. f.

Die Coefficienten α, β, γ, δ, etc. ſind die Summen der Unionen, Binionen, und folgenden Combinationen der Gleichung, $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2}$ — etc. Die Werthe von P, Q, R... ergeben ſich aus (48), wie ſie in dem Art. Combin. 43. angenommen ſind.

51. Der Bruch in (49.) entwickelt gebe die Reihe

$$-P' - Q'x - R'x^2 - S'x^3 - \text{etc.}$$

Dieſe multiplicire man mit dem Nenner des Bruches, und ſetze die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen in dieſem Producte und dem Zähler einander gleich, ſo iſt

$$aP' = b.$$
$$aQ' = bP' - 2c.$$
$$aR' = bQ' - cP' + 3d.$$
$$aS' = bR' - cQ' + dP' - 4e.$$

u. ſ. f.

Die einfachen Brüche entwickelt geben die Reihe,

$$-\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{etc.}\right) - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{etc.}\right)x$$
$$-\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{etc.}\right)x^2 - \text{etc.}$$

Folglich iſt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.} = P'.$$
$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \text{etc.} = Q'.$$
$$\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{s^3} + \text{etc.} = R'.$$
$$\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{s^4} + \text{etc.} = S'.$$

u. ſ. f.

Es iſt a das Product aller Wurzeln, b die Summen aller Combinationen von je $m - 1$ derſelben, c die Summe der Combinationen von je $m - 2$; d von je $m - 3$, u. ſ. f.

Alſo iſt $\frac{b}{a}$ die Summe der reciproken, wie $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, etc.; $\frac{c}{a}$ die Summe der reciproken Binionen, wie

$\frac{1}{pq}$, $\frac{1}{qr}$, etc.; $\frac{d}{a}$ die Summe der reciproken Ternionen, wie $\frac{1}{pqr}$, $\frac{1}{prs}$, $\frac{1}{qrs}$, etc. u. ſ. f.

Doppelte zurücklaufende Reihen.

52. Eine veränderliche Größe ſey eine Function zweyer veränderlichen x, y, und werde mittelſt einer Reihe durch dieſe folgendergeſtalt ausgedrückt:

$$\begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + D'x^2y + E'x^3y + \text{etc.} \\ + C''y^2 + D''xy^2 + E''x^2y^2 + F''x^3y^2 + \text{etc.} \\ + D'''y^3 + E'''xy^3 + F'''x^2y^3 + G'''x^3y^3 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \end{array}$$

Die Reihe kann nach drey Gegenden fortgeſetzt werden, nachdem man die Exponenten von x allein, oder von y allein, oder von beiden negativ nimmt.

53. Man bezeichne irgend ein Glied dieſer Reihe durch $A_{m,n}$, wo A einen der Coefficienten, m den Exponenten von x, und n den von y bedeuten. Ein anderes Glied, worin die Exponenten von x und y ſind m−1 und n, oder m−1 und n−1 werde auf ähnliche Weiſe bezeichnet durch $A_{m-1,n}$, und durch $A_{m-1,n-1}$. Es ſey nun für irgend welche Glieder die Gleichung der Relation dieſe,

$$\begin{array}{rl} 0 = \alpha A_{m,n} & + \beta A_{m-1,n} + \gamma A_{m-2,n} \\ & + \beta' A_{m,n-1} + \gamma' A_{m-1,n-1} \\ & + \gamma'' A_{m,n-2} \end{array}$$

wo α, β, β', γ, γ', γ'' gegebene Größen ſind, ſo iſt die Reihe, in welcher jedes Glied von dem vorhergehenden auf die in der Gleichung ausgeſprochene Art abhängt, eine doppelte rücklaufende Reihe, oder eine series recurro-recurrens.

Man bemerke, daß in jeder Verticalreihe die Summe der Exponenten von x und y dieſelbe iſt, und

daß dieſe Summe von dem erſten Gliede an, je um 1 abnimmt. Die Reihe kann allerdings weiter fortlaufen als hier angegeben iſt.

Dieſe Reihen kommen bey ſchwereren Fällen in der Wahrſcheinlichkeitsrechnung vor. Man ſehe die oben (29. 30.) angeführten Abhandlungen von la Place und la Grange. Umſtändlich handelt auch davon Arbogaſt in dem Calcul des dérivations p. 183 — 229, wo neun Beyſpiele zugefügt werden.

54. Eine dreyfache rücklaufende Reihe iſt, wenn die Stelle jedes Gliedes durch dreyerley Stellenzahlen angegeben, und jedes Glied aus gewiſſen vorhergehenden durch eine Gleichung mit denſelben Coefficienten beſtimmt wird, wie in dieſer:

$$\begin{aligned} 0 = \alpha A_{m,n,r} &+ \beta A_{m-1,n,r} + \gamma A_{m-1,n-1,r} \\ &+ \beta' A_{m,n-1,r} + \gamma' A_{m-1,n,r-1} \\ &+ \beta'' A_{m,n,r-1} + \gamma'' A_{m,n-1,r-1} \\ &+ \delta A_{m-1,n-1,r-1}. \end{aligned}$$

Die Glieder einer doppelten rücklaufenden Reihe liegen in den Quadrat-Fächern eines Rechtecks von unbeſtimmter Länge und Breite, die Glieder einer dreyfachen rücklaufenden Reihe in den gleichen Zellen eines Parallelepipedum von unbeſtimmten Dimenſionen; jene wie dieſe werden nach demſelben Geſetze aus Gliedern zuſammengeſetzt, die immer einerley Lage gegen die daraus zuſammengeſetzten haben.

S.

Sagitta iſt das Stück des Durchmeſſers eines Kreiſes von der Mitte eines Bogens bis an die Chorde deſſelben, von der Aehnlichkeit mit einem Pfeile ſo genannt. Der übrige Theil des Durchmeſſers iſt die Sagitta der Ergänzung jenes Bogens zum Umfange. Die halbe Chorde eines Bogens iſt die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen den beiden Sagitten. Die Chorde des halben Bo-

gens iſt die mittlere Proportionale zwiſchen der Sagitta des ganzen und dem Durchmeſſer. — Die Benennung kommt von den Arabern her, zufolge Otho in der Vorrede zu dem Canon des Rhäticus.

Die Sagitta heißt auch der **Sinus verſus** des halben Bogens, die Lage dieſes Abſchnittes eines Halbmeſſers gegen den Sinus deſſelben Bogens anzudeuten. Als Sagitta bezieht ſich der Abſchnitt auf den ganzen Bogen, als Sinus verſus auf den halben.

Man kann überhaupt die Abciſſe eines Durchmeſſers einer krummen Linie, von deſſen Endpuncte an, die Sagitta des Bogens zwiſchen den Endpuncten der beiden gleichen, entgegengeſetzten, zugehörigen Ordinaten nennen, auch wenn der Ordinaten-Winkel ein ſchiefer iſt.

Sandrechnung des Archimedes iſt die von dieſem Geometer angeſtellte Berechnung einer Zahl, welche größer iſt als die Anzahl aller Sandkörner, welche der Weltraum nach ſeiner Annahme der Größe faſſen kann. Er hat darüber eine kleine Schrift aufgeſetzt; ψαμμιτης, arenarius, betitelt. Die Veranlaſſung war, daß einige Leute geäußert hatten, der Sand ſey nicht zählbar. Archimedes widerlegt dieſes, und zeigt, daß man durch Hülfe einer geometriſchen Progreſſion über jede noch ſo große Zahl hinausgehen, und eine größere auf eine faßliche Weiſe darſtellen könne. S. Arithmetik, Th. I. S. 183. Die kleine Schrift iſt auch zur Geſchichte der alten Aſtronomie brauchbar.

Säulenzahl, Columnarzahl iſt das Product aus einer Polygonalzahl in ihre Seite. Z. B. die Triangularzahlen ſind 1, 3, 6, 10, 15, etc. ſo ſind die zugehörigen Säulenzahlen 1, 6, 18, 40, 75, etc. Dieſe Formen von Zahlen heißen nach der Anzahl der Winkel in dem gleichnamigen Vielecke, dreyſeitige, vierſeitige, u. ſ. f. Säulenzahl. Die allgemeinen Formen erhält man aus den Formeln für die Polygonalzahlen (Th. III. S. 824.) in die Seite oder Wurzel r. Gegenwärtig

macht man keinen Gebrauch von dieſen Formen der Zahlen. Man ſchreibt ſie dem Maurolycus zu.

Scala relationis, ſ. rücklaufende Reihe.

Scalenum triangulum, ungleichſeitiges Dreyeck, von σκαληνος, ſchief, ungerade, was ungleiche Schenkel hat.

Scenographia iſt die perſpectiviſche Abbildung eines Körpers auf einer ebenen Fläche, nach Vitruv, L. I. c. 2. frontis et laterum abscedentium adumbratio, ad circinique centrum omnium linearum responsus, im Gegenſatze gegen Ichnographia, Grundriß, und Orthographia, Aufriß. Der Herleitung zufolge bedeutet Scenographie die Abbildung eines Zeltes oder einer Hütte, daher dann auch theatraliſche Mahlerey. Die älteſten Theater waren nur eine Art von Hütten.

Scenographum catholicum nennt Niceron in ſeinem Thaumaturgo optico, p. 191. ein Inſtrument, womit ſich alle Arten perſpectiviſcher Zeichnungen bewerkſtelligen laſſen. Es iſt von einem Florentiniſchen Mahler, Lodovico Cigolo, erfunden.

Scheitelpunct (vertex) an einer geometriſchen Linie iſt der Endpunct eines Durchmeſſers. — An einem Dreyeck die Winkelſpitze, welche einer als Grundlinie betrachteten Seite gegenüber liegt — an einem Kegel der fixe Punct, durch welchen die die Kegelfläche beſchreibende gerade geht — an einem Konoide der Endpunct des Durchmeſſers, um welchen die daſſelbe beſchreibende Figur herum gedreht wird.

Schema irgend eine geometriſche oder mathematiſche Zeichnung. Sonſt auch Diagramma.

Schenkel eines Dreyecks (ebenen geradlinichten oder ſphäriſchen) ſind die beiden Seiten, welche von der

zur Grundlinie angenommenen Seite nach dem gegenüber liegenden Winkelpuncte gezogen ſind.

Man gebraucht den Ausdruck auch von zwey Zweigen einer krummen Linie, die neben einem Durchmeſſer hinlaufen.

Schief iſt eine gerade Linie gegen eine andere, wenn ſie mit derſelben keinen rechten Winkel macht, das entgegengeſetzte von ſenkrecht.

Ein ſchiefer Winkel iſt ein Winkel, der kein rechter iſt, der ſpitze oder der ſtumpfe.

Schlangenpunct, ſ. Wendungspunct.

Schneckenlinie, ſ. Spirale.

Scholium, Anmerkung, iſt ein Zuſatz zu einer Erklärung, einem Lehrſatze oder der Auflöſung einer Aufgabe, worin etwas zur Erläuterung vorgetragen wird, es beſtehe in der Beſeitigung einer Schwierigkeit, oder der Anzeige, wie man auf den Beweis oder die Auflöſung gekommen ſey, oder es abändern könne, oder der Mittheilung einer literariſchen Nachricht, oder der Angabe des Gebrauchs, und der Verbindung einer Lehre mit andern. Wolf hat dergleichen Anmerkungen, die er durch die Benennung, Scholium, unterſcheidet, in ſeinen Lehrbüchern viele. In der That ſind dergleichen Anmerkungen, beſonders für einen Anfänger, ſehr nützlich und gewähren zugleich eine angenehme Abwechslung.

Scholien heißen auch in der alten Literatur die Anmerkungen, welche über einige claſſiſche Schriftſteller von den Commentatoren gemacht ſind.

Schwerpunct in geometriſchem Sinne iſt für mehrere in einer Ebene liegende Puncte derjenige Punct, deſſen Abſtand von einer in der Ebene willkürlich gezogenen geraden Linie das arithmetiſche Mittel der Abſtände der gegebenen Puncte von eben der Linie iſt. Liegen die

gegebenen Puncte nicht alle in derſelben Ebene, ſo werden ſtatt der Abſtände von irgend einer geraden Linie die Abſtände von irgend einer Ebene genommen. Betrachtet man die gegebenen Puncte als vielfache, und legt ihnen in dieſer Rückſicht einen numeriſchen Werth bey, ſo wird, um das arithmetiſche Mittel der Abſtände zu finden, der Abſtand jedes Puncts in den ihm zukommenden numeriſchen Werth multiplicirt, und die Summe (die algebraiſche nämlich) dieſer Producte mit der Summe der numeriſchen Factoren dividirt.

In ſo fern es nun (nach der Methode des Untheilbaren) verſtattet iſt, Linien, Flächen und Körper als aus Puncten, Linien und Flächen zuſammengeſetzt anzuſehn, kann man auch den Linien, Flächen und Körpern einen Schwerpunct in geometriſchem Sinne zuſchreiben.

Da dem Schwerpuncte im ſtatiſchen Sinne mehrere merkwürdige rein geometriſche Eigenſchaften zukommen, worunter die in der obigen Erklärung aufgeführte eine der vorzüglichſten iſt und ſich zuerſt darbietet, ſo iſt die Betrachtung und der Gebrauch deſſelben in der Geometrie nicht nur nicht zuläſſig, ſondern vielmehr nöthig. Man würde ſonſt die Sätze, welche jene Eigenſchaften ausſagen, nur auf eine höchſt weitſchweifige, beſchwerliche und dunkle Art vortragen müſſen. Carnot und L'Huilier haben daher, jener in der Géometrie de Position, dieſer in den Elémens d'Analyse Géometrique et d'Analyse algebrique, Paris 1809. den Schwerpunct unter dem Namen des Mittelpuncts der mittleren Entfernungen in die Geometrie eingeführt.

Um das Geſagte über die Aufnahme des Schwerpuncts in die Geometrie zu rechtfertigen, bemerke ich nur, daß der Mittelpunct des Kreiſes, welcher der geometriſche Ort der Puncte iſt, für welche die Summe der Quadrate der Abſtände irgend eines derſelben von

ſo viel gegebenen Puncten (in einer Ebene) als man will, eine beſtimmte Größe hat, der Schwerpunct der gegebenen Puncte iſt. Auch in dem Falle, wo die Summe der Räume, welche zu den Quadraten der Abſtände gegebene Verhältniſſe haben, eine beſtimmte Größe hat, iſt der Schwerpunct der gegebenen Puncte für die Zahlwerthe, welche den Exponenten der gegebenen Verhältniſſe gleich ſind, der Mittelpunct des Kreiſes, welcher der geſuchte Ort iſt.

Andere Sätze, welche leicht aus der geometriſchen Betrachtung des Schwerpuncts fließen, in den Artikeln: Vieleck und Vieleckiger Körper.

Sciagraphie iſt daſſelbe, was Gnomonik. Dieſen Ausdruck, oder den, Sciographie, findet man auch in einigen Ausgaben des Vitruv, ſtatt Scenographie, aber unrichtig. Gesnerus in Theſauro ſchol. s. voce Sciagraphia. Perrault in ſeiner Ueberſetzung des Vitruv, p. 10.

Secante iſt erſtlich eine gerade Linie, welche eine krumme Linie in zwey oder mehrern Puncten trifft. Durch die Drehung um einen beſtimmten Punct, oder durch paralleles Fortrücken wird aus der ſchneidenden häufig eine berührende oder eine Aſymptote, die auch als berührende an einem unendlich entfernten Puncte angeſehen werden kann.

Wenn die krumme Linie ein Kreis iſt, und die Secanten durch einen fixen Punct gezogen werden, ſo iſt das Rechteck von den Abſchnitten zwiſchen dem Puncte und dem Kreiſe unveränderlich, und gleich dem Quadrate der berührenden. (Kreis, 35. 37.) — Der Winkel zweyer Secanten hat zum Maße den halben Unterſchied der zwiſchen ihnen enthaltenen beiden Bogen. (Kreis, 33. 19.).

Secante als trigonometriſche, zu einem Kreisbogen gehörige gerade Linie, iſt die aus dem Mittelpuncte eines Kreiſes durch den einen Endpunct des

Bogens bis an die berührende an dem andern Endpuncte gezogene gerade, wie CT (Fig. 56. Tab. XII. Th. II.) in Beziehung auf den Bogen AF. Die Secante durch den Halbmeſſer dividirt iſt die eigentliche, numeriſche, Secante. ſ. Goniometrie, 10. 12. Es iſt

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \sqrt{(1 + \tan A^2)}.$$

Die Secanten kommen zuerſt in des Rhäticus und Otho großem trigonometriſchen Canon vor. Hutton ſagt in der Vorrede zu ſeinen trigonometriſchen Tafeln, daß Maurolycus, aus Meſſina, die Secanten eingeführt, und die Tafel derſelben die Tabula benefica genannt habe. Lansberg, fügt er hinzu, habe die Berechnung der Secanten irrig dem Rhäticus zugeſchrieben. Das Jahr, in welchem jene Tafel der Secanten erſchienen iſt, weiß er nicht anzugeben. Allein Otho, der in der Vorrede zu dem Opere Palatino die Geſchichte der von Rhäticus unternommenen Berechnung eines großen trigonometriſchen Canons erzählt, berichtet hier ganz beſtimmt, daß Rhäticus zuerſt die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreyecks für die Hypotenuſe 10000000 berechnet habe, dann die Katheten, wenn eine derſelben 10000000 genommen wird, d. i. die Tangenten oder die von ihm genannte Tabula foecunda; darauf habe derſelbe es noch für nützlich gehalten, die Hypotenuſe für eine der Katheten = 10000000 geſetzt, zu berechnen. Man ſieht, Rhäticus iſt nicht von einem Kreiſe, ſondern von einem rechtwinkligen Dreyecke ausgegangen, für welches er drey Canones lieferte, die er Series nannte, ſ. Th. I. S. 671. Er hat von des Maurolycus Arbeit nichts gewußt.

Von der Curve der Secanten ſ. abbildende Linie, Th. III. 480.

Sechseck, ſ. Vieleck.

Sechzigtheilige Brüche und Rechnung, ſ. Sexageſimale.

Sectio, ſ. Durchſchnitt, Th. I. S. 940. Dazu ſetze man noch den Durchſchnitt zweyer Körper, welchen man auch als den Durchſchnitt der ſie begränzenden Oberflächen betrachten kann, wovon in dem Artikel, krumme Fläche, 120 — 125 gehandelt iſt. Von den Durchſchnitten der Konoiden und der Flächen des zweyten Grades ſ. Konoid und krumme Fläche, 101 — 111.

Sectio bedeutet auch Eintheilung einer geraden Linie, oder auch Abſchneidung eines Stückes auf zwey gegebenen nach gewiſſen Verhältniſſen, worüber die Alten mehrerley Gattungen von Aufgaben vorgetragen haben, nämlich Sectio determinata, beſtimmter Schnitt, (Th. I. S. 293.); sectio rationis; sectio spatii, (Th. I. S. 113. 115.). Die Aufgabe bey Euklides II. 11. oder VI. 30. iſt ſonſt auch bisweilen sectio divina genannt, ſ. Th. I. S. 109.

Sector iſt ein Theil einer Kreisfläche zwiſchen zwey Halbmeſſern und dem von dieſen eingeſchloſſenen Bogen. Wenn der Halbmeſſer $=$ a, und der Winkel der beiden Halbmeſſer $= \varphi$ iſt ($180° = 3,141 \ldots = \pi$ geſetzt), ſo iſt der Inhalt des Sectors $= \frac{1}{2} aa\varphi$. Es iſt nämlich φ der Bogen zu dem Winkel für den Halbmeſſer $= 1$; $a\varphi$ für den Halbmeſſer $=$ a, des Kreiſes Fläche $= \pi aa$ (Quadratur, 13.), der Sector $= \frac{1}{2} aa\varphi$ (Kreis, 10.).

Secunde, der ſechzigſte Theil einer Minute, welche der ſechzigſte Theil eines Grades oder einer Stunde iſt, eigentlich minutum secundum, ſo wie die Minuten eigentlich minuta prima heißen, indem Minute nur einen kleinen Theil eines ganzen anzeigt. Man hat gegenwärtig auch Decimal-Secunden oder vielmehr Centeſimal-Secunden, deren 100 auf eine Minute gehen, ſo wie 100 Minuten auf einen Grad, den 100 Theil des Quadranten oder auf eine Stunde, den 10ten Theil eines Tages gehen. S. Maß. Th. III. 594. 599.

Die Bezeichnung für eine ſechzigtheilige Secunde geſchieht durch zwey Strichelchen, z. B. 16″. Für die Centeſimalſecunden iſt keine Bezeichnung nöthig, da ſie durch die Stelle der Ziffern ſich kenntlich machen.

Segment, Abſchnitt einer Curve zwiſchen einem Bogen und deſſen Chorde, auch wohl zwiſchen zwey parallelen Chorden.

Sehne, Chorde, eine gerade von einem Puncte einer krummen Linie zu einem andern.

Seite (latus) einer Figur iſt die Begränzung derſelben zwiſchen zwey nächſten Puncten.

Seite einer Polygonalzahl, oder ihre Wurzel iſt die Anzahl der Glieder aus der zugehörigen Reihe, wovon ſie das ſummatoriſche Glied iſt.

Seite einer Potenz iſt ihre Grundzahl oder Wurzel. Bey den Quadraten und Cubis ſieht man gleich, woher die Benennung für die Grundzahl entſtanden iſt.

Semiordinate wird jetzt Ordinate genannt. Die Alten nannten die parallelen Chorden, welche von einem Durchmeſſer halbirt werden, Ordinaten zu dem Durchmeſſer. S. Ordinate.

Semiparabola iſt von einigen eine paraboliſche Linie genannt, deren Gleichung iſt $ax^{m-1} = y^m$, wo der Exponent der Abſciſſe um 1 kleiner iſt als der Exponent der Ordinate. Die Benennung iſt nicht mehr gewöhnlich, auch nicht ſchicklich.

Senkrecht iſt eine gerade Linie auf eine andere, wenn ſie mit derſelben einen rechten Winkel macht. Auch eine krumme Linie iſt auf eine gerade ſenkrecht, wenn ihre berührende in dem Durchſchnittspuncte mit der geraden einen rechten Winkel macht. S. Winkel.

Senkſtrich, eine gerade, auf eine andere ſenkrecht gezogene Linie.

Series, ſ. Reihe.

Sesqui, ein lateiniſches Wort, welches nur in Zuſammenſetzungen gebraucht wird, Verhältniſſe anzugeben, als ratio sesquialtera das von 1 : $1\frac{1}{2}$ oder 2 : 3; sesquitertia das von 1 : $1\frac{1}{3}$ oder 3 : 4; sesquiquarta das von 1 : $1\frac{1}{4}$ oder 4 : 5, u. ſ. f. Im Griechiſchen λογος ἡμιολιος = 2 : 3; λογος ἐπιτριτος = 3 : 4; λογος ἐπογδοος = 8 : 9. Dergleichen Benennungen kommen in der Theorie der Muſik bey den Griechen vor. Die hier angegebenen Verhältniſſe ſind die der Quinte, der Quarte und des größern ganzen Tons.

Sexageſimal- oder Sexagenal-Bruch, iſt ein Bruch, deſſen Nenner 60, oder eine Potenz von 60 iſt. Der Gebrauch dieſer Brüche iſt in der Aſtronomie, da bisher der Grad in 60 Minuten, dieſer in 60 Secunden, dieſe in 60 Tertien getheilt ſind. Die Rechnung mit denſelben iſt unbequem, beſonders bey der Multiplication und Diviſion. Zur Erleichterung derſelben hat man eine Multiplicationstafel berechnet, wovon ein Stück hier zur Probe beygefügt iſt.

	23	24	25	26	27	28
23	8. 49					
24	9. 12	9. 36				
25	9. 35	10. 0	10. 25			
26	9. 58	10. 24	10. 50	11. 16		
27	10. 21	10. 48	11. 15	11. 42	12. 9	
28	10. 44	11. 12	11. 40	12. 8	12. 36	13. 4
29	11. 7	11. 36	12. 5	12. 34	13. 3	13. 32
30	11. 30	12. 0	12. 30	13. 0	13. 30	14. 0

Die Zahlen in dieſer Tafel ſind die Quotienten der Producte aus den Ordnungszahlen der beiden Reihen, deren Winkelfach ſie einnehmen, durch den Diviſor 60, wo der Reſt durch einen Punct abgeſondert iſt. So iſt $12.8 = \frac{28 \cdot 26}{60} = \frac{728}{60} = 12 \frac{8}{60}$. Jede Columne (herabgehende Reihe) fängt mit dem Quadrate ihrer Ordnungszahl, durch 60 dividirt, an, weil kleinere Producte in der Columne zu dem kleinern Factor vorkommen; z. B. das Product $\frac{24 \times 27}{60}$ hat man in der Columne 24 und der Reihe 27, von oben herab gezählt, zu ſuchen.

Eine ſolche Tafel iſt in dem nach Wolf genannten mathematiſchen Lexikon, II. Th. zu S. 485, anzutreffen. Ein Einmahl Eins für die Sexageſimalbrüche, worin jedes Product zweymahl vorkommt, findet man in Wucherers Beyträgen zum allgemeinen Gebrauch der Decimalbrüche, Carlsruhe, 1795. Die Vertheilung auf Octavblätter iſt bequem, und brachte die Wiederholung mit ſich.

Bedeutet der Zeiger der Reihen, nach der einen oder der andern Richtung, (von oben oder von der Seite her), genommen, Minuten (Secunden), nach der andern Richtung eine abſtracte Zahl, ſo giebt ihr Winkelfach die Grade und Minuten (Minuten und Secunden) in dem Producte an. Z. B. $26 \times 28' = 12^{\circ}.\ 8'$, ſo wie $26'' \times 28 = 12'.\ 8''$.

Wenn beide Factoren benannte Sexageſimalgrößen ſind, ſo muß man den einen Factor als einen abſtracten Bruch anſehen, da zwey benannte Zahlen, als ſolche, nicht mit einander multiplicirt werden können. Man hat nur das Product, welches die Tafel zu dem Zähler dieſes Factors angiebt, eben ſo zu erniedrigen, als es mit dem Factor geſchehen iſt. Z. B. $26' \times 28' = 12'\ 8''$,

oder 26′ × 28″ = 12″ 8‴. Einer der Factoren bezieht ſich immer auf eine gleichartige Größe, welche das erſte Glied einer Proportion iſt, worin die beiden Factoren das zweyte und dritte ausmachen, daher man jene und den darauf ſich beziehenden Factor als bloße Zahlen anſehen darf. Macht man jene zur Einheit, ſo wird dieſe ein bloßer Bruch.

Sexageſimal=Rechnung iſt das beſondere Verfahren mit Sexageſimalbrüchen zu rechnen. Barlaam (ein Mönch aus Calabrien im 14ten Jahrh.) hat ſie in ſeiner Logiſtik, einer theoretiſchen Arithmetik, vorgetragen. Er nannte ſie die aſtronomiſche Logiſtik, wegen ihres großen Gebrauchs in der Aſtronomie. Lazarus Schoner hat ſeiner Ausgabe von der Arithmetik und Algebra des Ramus, Frankfurt 1586, eine Abhandlung über die Logistisa sexagenaria beygefügt.

Dieſe Rechnungsart iſt der gemeinen Decimalrechnung ganz ähnlich. So wie hier zehn Einer einer Ordnung einen Einer der nächſt höhern Ordnung ausmachen, ſo geben in der Sexageſimalrechnung ſechzig Einer einer Ordnung einen Einer der nächſt höhern. Die Ausführung der letztern iſt nur oft beſchwerlicher, wegen dieſer Menge von Theilen, welche jede Gattung von Einern enthält.

Exempel der Multiplication. Es ſoll die vierte Proportionale zu 60′ 0″; 46′ 12″; und 8′ 7″ gefunden werden. Das Product des zweyten und dritten Gliedes beſteht aus

46′ × 8′ =	6′	8″			
12″ × 8′ =		1.	36‴		
46′ × 7″ =		5.	22		
12″ × 7″ =			1.	24⁗	
Product =	6′	14″	59‴	24⁗	

Dieſes Product iſt zugleich das geſuchte vierte Glied der Proportion, da die Multiplicatoren 46′ und 12″

zwey Brüche, $\frac{46}{60}$ und $\frac{12}{60.60}$, bezeichnen, indem das erſte Glied, 60′, der Einheit, $\frac{60}{60}$, gleich iſt. Die Einheit führt hier den Namen Grad.

Die logiſtiſchen Logarithmen (Th. III. S. 588.) dienen noch mehr als die Tafel zur Erleichterung der Rechnung. Das hier berechnete Exempel iſt a. a. O. das erſte. Jenes trifft mit dieſem ſo nahe zuſammen, als es bey der Rechnung mit abgekürzten Logarithmen nur zu erwarten iſt.

Von den Rechenſtäbchen zur Sexageſimal-Rechnung ſ. Th. II. S. 741.

Wenn das erſte Glied der Proportion Minuten und Secunden enthält, das zweyte 60′ iſt, ſo bringe man jenes auf Ganze und Sechzigtheile, dieſes auf 60 Einer oder Ganze, und verfahre auf ähnliche Art wie bey der Diviſion durch Einer mit anhängenden Zehntheilchen. So auch in ähnlichen Fällen. Hier ſind die logiſtiſchen Logarithmen vortheilhaft zu gebrauchen.

Siebeneck, ſ. Vieleck.

Sinus eines Kreisbogens, oder des zugehörigen Winkels am Mittelpuncte, iſt die Hälfte der Chorde des verdoppelten Bogens. Dieſe Erklärung iſt in der Form von der in Goniometrie, 5, gegebenen verſchieden. Sie giebt die Anſicht, wodurch diejenigen, welche die Sinus anſtatt der Chorden in die Trigonometrie einführten, dazu veranlaßt wurden. In der alten Trigonometrie bediente man ſich der Chorden, wo wir die Sinus gebrauchen, mußte aber deswegen die Winkel verdoppeln, um die Chorden zu ihnen zu ſuchen. Dieſes erforderte Tafeln durch den ganzen Halbkreis. Kürzer war es, unmittelbar für die Winkel oder Bogen die zugehörigen halben Chorden ihres Doppelten anzuzeichnen, deren Tafel ſich

auf

auf den Quadranten beſchränkte, und auch dadurch beque-mer ward. Dieſe Abänderung iſt von arabiſchen Aſtronomen vorgenommen worden, man weiß nur nicht näher, wann und von wem. In Käſtners geometriſchen Abhandlungen, erſter Sammlung, S. 530, iſt aus der lateiniſchen Überſetzung einer Schrift des vorzüglichen arabiſchen Aſtronomen, Albategnius oder Al-Batani (9. Jahrh.), eine Stelle angeführt, worin dieſer ſagt, die Araber gebrauchten die Hälfte von der Chorde des Doppelten eines Bogens, welche ſie in der Tafel neben dieſem Bogen ſetzten. Dadurch erſpare man ſich die Verdoppelung des Bogens. Ein beſonderes Kunſtwort gebraucht er nicht.

Die Herleitung des lateiniſchen Kunſtwortes, Sinus, iſt ſchwierig. Godin hat eine witzige Muthmaßung darüber vorgetragen. Da die Chorden der Bogen im Lateiniſchen auch Inscriptae heißen, ſo habe man ihre Hälften, die Sinus, Semisses inscriptarum genannt, und dieſes abgekürzt S. ins. geſchrieben, woraus dann das Wort Sinus entſtanden ſey. Die Benennungen anderer goniometriſchen Linien, Coſinus, Cotangens, Coſecans, ſind wirklich Zuſammenziehungen von Co. Sinus d. i. Complementi Sinus, u. ſ. f.

Hutton führt in der Vorrede zu ſeiner Ausgabe der trigonometriſchen Tafeln mancherley Erklärungen anderer, auch einige Muthmaßungen von ihm ſelbſt an, ſchließt aber mit der Bemerkung, daß das Wort Sinus im Lateiniſchen demjenigen Worte entſprechen möge, welches die Araber für die dazu bezeichnete Linie eingeführt hätten, wie dann auch eine ſolche Überſetzung wirklich bey dem Worte Sagitta Statt gefunden habe, welches und Sinus versus, nach der Angabe des Otho in der Vorrede zu dem Canon des Rháticus, von den Arabern herrühren.

Das arabiſche Kunſtwort giebt Halley an, in einem Scholion zu dem erſten Satze des III. Buches der Sphaericorum des Menelaus, wovon dieſer mit

der orientaliſchen Literatur der Mathematik ſehr vertraute Gelehrte eine Ausgabe geliefert hat, bey welcher hebräiſche und arabiſche Manuſcripte verglichen ſind *). Er ſagt, er habe das Kunſtwort des hebräiſchen Überſetzers für die Chorde eines doppelt genommenen Bogens immer durch Sinus gegeben, zur Übereinſtimmung mit den neuern Mathematikern, wie es auch der arabiſche Überſetzer gethan habe, deſſen Kunſtwort er dabey anführt. Mit lateiniſchen Buchſtaben geſchrieben, lautet es dschaib. Dieſem legt Golius in ſeinem arabiſchen Wörterbuche, (nach der Angabe eines gelehrten Freundes), pag. 560, die Bedeutungen bey: sinus indusii vestisque, seu collare ad jugulum patens. Et sinus apud Geometras, i. e. semissis rectae circulo inscriptae, a diametro per medium sectae. Radix est d s c h a b a **), secuit.

Man ſieht, daß der arabiſche Geometer ſein Kunſtwort von einer Aehnlichkeit des Kreis-Einſchnittes mit dem Einſchnitte eines Hemdes hergenommen hat; allein eine Herleitung des lateiniſchen Kunſtwortes erhalten wir hieraus noch nicht. Der Einſchnitt eines Hemdes heißt im Lateiniſchen nicht sinus, wie Golius hier das Wort gebrauchen will. Bey einem Kleide angewandt bedeutet es die Höhlung, die man mit dem einen untern Ende eines weiten, vorn offenen Kleides (einer Toga) vor der Bruſt machen kann, um darin etwas zu verbergen, daher auch die Bedeutung, Meerbuſen, entſtanden iſt. Derjenige, der das arabiſche Kunſtwort lateiniſch hat geben wollen, fand etwa keinen, ihm gefallenden Ausdruck, der das Eingeſchnittene darſtellte, und ſetzte das, was hinter dem Einſchnitte des Hemdes iſt, den Buſen des Körpers, Sinus, für den Ausdruck des Arabers. Mit der zweyten Bedeutung des Worts, Sinus, iſt es in der That eben ſo gegangen.

*) Pfleiderers ebene Trigonometrie, Tübingen, 1802. S. 16.

**) Der Buchſtab der Araber, der hier durch dsch ausgedrückt iſt, entſpricht genauer dem franzöſiſchen g vor e und i.

Wenn auch dieſe Etymologiſirung fehlen ſollte, ſo iſt das Beſte, daß die Frage nur eine literariſche Ergötzlichkeit betrifft. Was Käſtner in ſeiner Geſchichte der Mathematik, Bd. I. S. 523, nur angedeutet hat, iſt hier weiter ausgeführt worden.

Sinus naturalis iſt die durch den Halbmeſſer als Einheit in der Geſtalt einer gebrochnen Zahl dargeſtellte Linie; sinus artificialis iſt der Logarithmus dieſer Zahlgröße. So erſcheinen die Sinus in unſern trigonometriſchen Tafeln mit ihren Logarithmen verbunden. Mehreres in dem Artikel, Trigonometrie.

Sinus rectus iſt eine Benennung dieſer Linie in Beziehung auf den Abſchnitt des einen Halbmeſſers zwiſchen dem Sinus und dem Kreisbogen, welcher Sinus versus heißt.

Sinus versus, Querſinus, als der Abſchnitt, welchen der Sinus eines Kreisbogens auf dem einen Halbmeſſer von dem Endpuncte deſſelben an macht, iſt der Unterſchied zwiſchen dem Halbmeſſer und dem Coſinus, oder $\sin.\ \mathrm{vers.}\ A = 1 - \cos A$. In einigen trigonometriſchen Tafeln iſt ein Canon der Querſinus enthalten.

Auch iſt $\sin.\ \mathrm{vers.}\ A = 2\,(\sin \tfrac{1}{2} A)^2$. —. Denn die Chorde eines Bogens A iſt die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen dem Durchmeſſer und dem Sinus verſus (Sagitta). Auch iſt ſie $= 2 \sin \tfrac{1}{2} A$. Man nehme den Halbmeſſer zur Einheit, ſo iſt $2 : 2 \sin \tfrac{1}{2} A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A : \sin.\ \mathrm{vers}\ A$.

Wie die Sinus aus den Bogen, (oder den Winkeln als Bogen für den Halbmeſſer = 1), gefunden werden, iſt in dem Artikel, Cyklometrie, 9, angegeben. Doch zeigt dieſe Reihe, und die ihr entſprechende, in 1, nicht, wie das Verhältniß zweyer Bogen, oder ihrer Winkel, von dem Verhältniſſe der zugehörigen Sinus verſchieden iſt.

Es ſeyn zwey Winkel φ und $\varphi + \alpha$, ſo iſt $\sin\varphi : \sin(\varphi + \alpha) = 1 : \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\tang\varphi}$, da das Verhältniß der Winkel iſt $1 : 1 + \frac{\alpha}{\varphi}$.

Das nachfolgende Glied in jenem Verhältniſſe iſt immer kleiner als in dem der Winkel: oder das Verhältniß der Sinus zweyer Winkel iſt immer kleiner als dasjenige ihrer Winkel, und zwar in dem erſten Quadranten, den größern Winkel zum nachfolgenden Gliede genommen.

Denn es iſt $\sin(\varphi + \alpha) = \sin\varphi . \cos\alpha + \cos\varphi . \sin\alpha$; Goniometrie, 24, woraus das angegebene Verhältniß ſogleich folgt.

Bey demſelben Winkel α entfernt ſich das Verhältniß der Sinus mehr von demjenigen der Winkel, wann φ dem Quadranten näher genommen wird, und kommt für kleine Winkel φ demſelben nahe, deſto mehr, je kleiner auch der Unterſchied der Winkel iſt.

Sinuſoide iſt eine krumme Linie, auf welcher ein Gewicht, das mittelſt eines Seiles oder einer Kette, welche über eine Rolle an einem Pfeiler gezogen iſt, mit einem ſchweren Hebel in jeder Lage beider im Gleichgewichte ſich befindet. Belidor, der in der Science des Ingénieurs. L. IV. ch. 6. die Anwendung auf die Erhebung der Zugbrücken zeigt, hat ihr dieſen Namen gegeben, weil er zu ihrer Conſtruction die Sinus der Erhebungswinkel der beweglichen Brücke gebraucht. Es bedurfte keines neuen Namens, da die krumme Linie eine Epicykloide iſt, wie Joh. Bernoulli ſchon lange vorher in den Actis Erud. 1695 gezeigt hatte. Der Marquis L'Hopital hatte in dieſe gelehrte Monatsſchrift die Auflöſung der gedachten Aufgabe einrücken laſſen (Febr. 1695). Sie war ihm von einem gelehrten Geometer (Sauveur) vorgelegt worden, der ſie ſehr ſchwierig gefunden hatte, da er 27 Proportionen dazu ge-

brauchte. L'Hopital fand die Gleichung für die krumme Linie leicht; ſie iſt eine algebraiſche vom vierten Grade, und hat dreyerley, aber verwandte Formen. Joh. Bernoulli fügte einen Aufſatz bey, worin er, wie geſagt, zeigte, daß die Curve zu den Epicykloiden gehört, und durch die Wälzung eines Kreiſes über einem ihm gleichen beſchrieben wird, wobey der beſchreibende Punct entweder auf dem Umfange des ſich wälzenden Kreiſes, oder außerhalb oder innerhalb ſeyn mag. Er nannte ſie die Curvam aequilibrationis, die Gleichgewichts-Linie, und trug die Aufgabe noch allgemeiner vor. S. auch Joh. Bernoullii Opera, T. I. nr. 23. Von Jac. Bernoulli iſt a. a. O. auch eine Auflöſung dieſer Aufgabe in ſeinen Werken T. I. nr. 63. befindlich. Von Leibnitz iſt auch eine Bemerkung über dieſe Unterſuchung in den A. Er. 1695. Apr. eingerückt.

Belidor, der dieſes bey der Ausarbeitung ſeines Werks über die Ingenieur-Wiſſenſchaft (Zweyte Ausg. Haag, 1734) nicht wußte, zeigt es in ſeinem Dictionnaire portatif de l'Ingénieur, à Paris 1755, an.

In der zweyten Abtheilung dieſes Werks wird die Gleichgewichts-Linie vorkommen.

Situs und Analysis situs, ſ. in dem Artikel, Lage.

Societäts-Rechnung ſ. Geſellſchafts-Rechnung.

Solidum, das körperliche Ausgedehnte, ſ. Ausdehnung. Man mag es dadurch von dem geometriſchen Körper unterſcheiden, daß dieſer mit einer gewiſſen Form gedacht werde, das Solidum nicht.

Solidus Angulus iſt ein Winkel, der durch drey oder mehrere Ebenen gebildet wird, welche einen Punct gemeinſchaftlich haben, ſ. Winkel, körperlicher.

Solidus locus, eine Linie vom zweyten Grade,

ſo fern ſie zur Aufloͤſung einer unbeſtimmten Aufgabe gebraucht wird, ſ. Ort.

Solidus numerus, eine Zahl, welche das Product dreyer Zahlen iſt, eine veraltete Benennung.

Solidum problema, eine Aufgabe, die durch eine Linie vom zweyten Grade aufgeloͤſet wird. — Theorema, ein Lehrſatz, der durch Huͤlfe einer ſolchen Linie bewieſen wird

Species in der Arithmetik ſind Verwandlungen einer Form einer Zahlgroͤße in eine andere. Eine Zahl, die aus mehrern gegebenen Theilen zuſammen geſetzt iſt, wird durch die Addition in eine eben ſo große, dekadiſch, etwa auch dodekadiſch oder dyadiſch, geordnete, verwandelt. — Eine Zahl, die als der Theil eines gegebenen Ganzen zu dem andern gegebenen Theile deſſelben gedacht wird, wird durch die Subtraction unabhaͤngig, gleichfalls auf vorige Art geordnet, dargeſtellt. — Eine Zahl, von welcher gefordert wird, daß ſie ein gewiſſes Vielfaches einer gegebenen Zahl ſey, wird in eine auf gleiche Weiſe geordnete durch die Multiplication verwandelt; ſo auch durch die Diviſion eine Zahl, von welcher geſagt wird, daß ſie ein gewiſſer Theil einer gegebenen Zahl ſeyn ſoll.

Zu den gewoͤhnlichen vier Speciebus der gemeinen Rechenkunſt kann man noch fuͤglich die Erhebung einer Zahl auf eine gegebene Potenz, und die Zerfaͤllung einer Zahl in eine gegebene Anzahl gleicher Factoren ſetzen. Jene iſt eine kuͤnſtlichere Multiplication, dieſe eine kuͤnſtlichere Diviſion, ſo wie die Multiplication eine abgekuͤrzte Addition, die Diviſion eine abgekuͤrzte Subtraction iſt.

Species in der Geometrie bedeutet eine Übereinſtimmung der Figuren in Abſicht auf Anzahl und Groͤße ihrer Winkel, und die Verhaͤltniſſe der Seiten. So heißt triangulum specie datum ein Dreyeck, das in Abſicht auf die Winkel und dadurch auch in Abſicht der

Verhältniſſe der Seiten gegeben wird, wobey die Größe unbeſtimmt bleibt. Bei einer Figur von mehr als drey Seiten müſſen die Verhältniſſe der Seiten beſonders gegeben werden.

Sphaera, griech. σφαιρα, iſt Kugel.

Sphärik,

Sphaerica, iſt der Inbegriff von Lehrſätzen die Kugel betreffend, insbeſondere über die Kreiſe, die auf ihrer Oberfläche gezogen werden. Die Berechnung der ſphäriſchen Dreyecke gehört in die Trigonometrie.

In dem Artikel, Kugel, ſind die Lehren der Sphärik vollſtändig genug vorgetragen.

Theodoſius, ein griechiſcher Mathematiker, der ein Zeitgenoſſe von Cicero geweſen ſeyn mag, hat ein ſehr gutes Werk über die Sphärik hinterlaſſen, worin ſein beſonderer Zweck war, die ſphäriſche Aſtronomie geometriſch zu begründen, und die dazu gehörigen Sätze ſyſtematiſch zu ſammeln. Das dritte Buch enthält mehrere merkwürdige Sätze, die ſchon ſchwer genug ſind, daß Pappus darüber Erläuterungen aufſetzte. Barrow hat eine lateiniſche Ausgabe dieſes Werks 1675 geliefert, worin er neue und kürzere Beweiſe gegeben hat. Eine griechiſche und lateiniſche Ausgabe iſt von Hunt, Oxford 1707 veranſtaltet.

Sphäriſches Dreyeck, ſ. Trigonometrie.

Sphäriſche Fläche, ſ. Kugel, 35—46.

Sphäroid, *) iſt ein Körper, begränzt von einer krummen Oberfläche, deren Durchſchnitt mit jeder Ebene, die durch eine von drey auf einander ſenkrechten Axen gelegt wird, eine Ellipſe iſt.

*) Der Ausdruck, Sphäroid, iſt ſprachrichtig, nicht der von einigen gebrauchte, auch in dieſem Werke einigemal aufgenommene Ellipſoid oder Elliptoid. So auch paraboliſches und hyperboliſches Konoid, nicht Paraboloid und Hyperboloid.

Wenn die durch eine der Axen gelegten Ellipſen alle einander gleich ſind, ſo entſteht das Sphäroid durch die Umdrehung einer Ellipſe um die eine Axe, und der Schnitt durch die beiden andern Axen iſt ein Kreis. Archimedes der die Geſtalt der Durchſchnitte der Konoiden und den körperlichen Inhalt ihrer Abſchnitte beſtimmt hat, (ſ. Konoid und Cubirung), hat daſſelbe auch für dieſe Gattung von Sphäroiden geleiſtet.

1. Es iſt in Fig. 31. A der Mittelpunct der gegenſeitig ſenkrechten Coordinaten-Axen AX, AY, AZ, eines Sphäroids, welches da mit zwey halben auf einander ſenkrechten elliptiſchen Durchſchnitten, BCE, BDE, und einem Quadranten, CAD, durch je zwey der Axen gezeichnet iſt. Dieſe Ellipſen haben den Punct A zum gemeinſchaftlichen Mittelpuncte. Die halben Axen derſelben ſeyn $AB = a$; $AC = b$; $AD = c$. Durch die Axe BE und einen Punct F des elliptiſchen Quadranten CD ſey die halbe Ellipſe BFE gezogen, deren Ebene mit der Ellipſe BCE den Winkel $FAC = \vartheta$ mache.

Es iſt

$$(b^2 \sin\vartheta^2 + c^2 \cos\vartheta^2)\ AF^2 = b^2 c^2.$$

Denn man fälle von F auf die halbe Axe AC die ſenkrechte FG, ſo giebt die durch AC und AD gelegte Ellipſe die Gleichung,

$$AC^2 \times GF^2 + AD^2 \times AG^2 = AC^2 \times AD^2.$$

Da $GF = AF \times \sin\vartheta$, und $AG = AF \times \cos\vartheta$ iſt, ſo verwandelt ſich dieſe Gleichung unmittelbar in die angegebene.

2. Von irgend einem Puncte R der Ellipſe BFE fälle man auf die Ebene BCE die ſenkrechte RQ; von dem Puncte Q ziehe man auf AB die ſenkrechte QP, und ſetze $AP = x$; $PQ = y$; $QR = z$, ſo iſt die Gleichung zwiſchen dieſen drey zu dem Puncte R gehörigen Coordinaten,

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Man ziehe PR, ſo iſt die Ebene des Dreyecks RPQ ſenkrecht auf die Ebene der Ellipſe BCE, und die auf

PQ ſenkrechte AP iſt ſenkrecht auf PR, ſo wie es EA auf AF in dem elliptiſchen Quadranten CFD iſt. Daher ſind AF und PR parallel. Folglich iſt aus der Natur der Ellipſe,

$$AB^2 \times PR^2 + AF^2 \times AP^2 = AB^2 \times AF^2;$$

oder, wenn $PR = u$ geſetzt wird,

$$a^2 u^2 = (a^2 - x^2)\ AF^2.$$

Mit dieſer Gleichung verbinde man die in (1.) gefundene,

$$(b^2 \sin\vartheta^2 + c^2 \cos\vartheta^2)\ AF^2 = b^2 c^2,$$

ſo iſt

$$(b^2 \sin\vartheta^2 + c^2 \cos\vartheta^2)\ a^2 u^2 = b^2 c^2 (a^2 - x^2).$$

Da der Winkel $RPQ = \vartheta$ iſt, ſo iſt $u \sin\vartheta = z$, und $u \cos\Theta = y$. Die Subſtitution dieſer Werthe liefert, nebſt der Verſetzung des Gliedes $b^2 c^2 x^2$, die angegebene Gleichung.

3. Für eine Ellipſe, die durch die Axe AY oder AC gelegt wird, wird dieſelbe Gleichung gefunden, indem nur a und b, x und y vertauſcht zu werden brauchen. So wird erhalten

$$a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 + b^2 a^2 z^2 = b^2 a^2 c^2.$$

Eben ſo iſt für eine Ellipſe, die durch die Axe AZ oder AD gelegt wird, wobey a und c, x und z vertauſcht werden,

$$b^2 a^2 z^2 + c^2 a^2 y^2 + c^2 b^2 x^2 = c^2 b^2 a^2.$$

Derſelbe Punct auf der Oberfläche eines Sphäroids gehört alſo drey Ellipſen zu, die durch die drey Axen deſſelben gelegt ſind.

4. Die Gleichung für das Sphäroid wird auch aus der Form hergeleitet, welche ſie haben muß, damit ſie, wenn eine der Coordinaten, x, y, z, Null geſetzt wird, in die Gleichung für eine der gegebenen Ellipſen übergehe, ſo, wenn $z = 0$ genommen wird, in die Gleichung zwiſchen AP und PM, den Coordinaten an der Ellipſe BCE. Dieſe Form iſt die,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M.$$

Sie liefert auch für dieſelben Werthe, (poſitive oder negative), zweyer der Coordinaten, zwey gleiche und ent=

gegengeſetzte Werthe der dritten, wie es ſeyn muß, da das Sphäroid durch jede der drey Ellipſen, welche gleichſam die Grundlage davon ausmachen, in zwey gleiche und ähnliche Hälften und durch alle drey Ellipſen in acht gleiche Ausſchnitte getheilt wird, welche den gemeinſchaftlichen Scheitelpunct A haben, und wovon je zwey an einerley Seite einer der drey Ellipſen und einander gegenüberliegende auch ähnlich ſind und ähnlich liegen.

Die Coefficienten und das unveränderliche Glied in der Gleichung werden durch die gegebenen Axen der Fundamental Ellipſen beſtimmt. Wenn y und z, jede $= o$ genommen werden, ſo iſt $x = a$ und $Aa^2 = M$. Eben ſo iſt $Bb^2 = M$, und $Cc^2 = M$. Daher ſind in A, B, C, nach der Ordnung, die Factoren $b^2 c^2$; $a^2 c^2$; $a^2 b^2$. Alſo iſt $A = b^2 c^2$; $B = a^2 c^2$; $C = a^2 b^2$. Sollte A noch einen Factor enthalten, ſo wäre dieſer auch in M vorhanden, daher auch in B und C, wäre alſo ein ganz überflüſſiger Factor der ganzen Gleichung. Die Gleichung für das Sphäroid iſt alſo

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Die Form dieſer Gleichung zeigt unmittelbar, daß der dadurch beſtimmte Körper in endliche Gränzen eingeſchloſſen iſt. Wenn x größer als a, oder y größer als b, oder z größer als c genommen wird, ſo erhalten die beiden andern, jede oder eine, unmögliche Werthe.

Es iſt nun noch zu zeigen, daß jeder Durchſchnitt dieſes Körpers, der durch eine der Axen der drey Fundamental Ellipſen geführt wird, eine Ellipſe iſt.

5. Der Schnitt werde durch die Axe BE und den Punct R der Oberfläche geführt. Die Coordinaten des Punctes R ſind, wie vorher, $AP = x$; $PQ = y$; $QR = z$. Man ziehe die gerade PR, ſo iſt RPQ der Winkel, welchen die Ebene des Schnittes mit der Ebene der Ellipſe BCE macht. Es ſey $RP = u$, und der W. $RPQ = \Theta$, ſo iſt $PQ = u \cos\Theta$; und $QR = u \sin\Theta$. Zur Abkürzung werde geſetzt, $\sin\Theta = m$; $\cos\Theta = n$,

Aus der Gleichung für den Punct R, auf der Oberfläche des Sphäroids, entſteht nun die Gleichung für denſelben Punct, in der durch den W. RPQ beſtimmten Ebene, zwiſchen den Coordinaten AP (= x) und PR (= u),

$$b^2 c^2 x^2 + (m^2 b^2 + n^2 c^2)\, a^2 u^2 = a^2 b^2 c^2,$$

oder

$$\frac{b^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 c^2}\, x^2 + a^2 u^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 c^2}.$$

Dieſes iſt eine Gleichung für eine Ellipſe, deren eine Axe, auf welcher die x genommen werden, 2a iſt, und die conjugirte =

$\frac{2bc}{\sqrt{(m^2 b^2 + n^2 c^2)}}$. Die halbe conjugirte Axe iſt AF, die gerade von dem Mittelpuncte A zu dem Puncte F, worin die Ellipſe BRE die durch die Endpuncte C, D der halben Axen AC, AD gezogene Ellipſe trifft.

6. In der Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids,

$$b^2 c^2 x + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2,$$

werde x unveränderlich genommen, ſo wird die Gleichung für den Schnitt durch MPN erhalten, der parallel mit dem durch AC und AD, in dem Abſtande AP = x, geführt iſt. In der Form,

$$a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = b^2 c^2 (a^2 - x^2),$$

giebt ſie eine Ellipſe, in welcher die halbe Axe in der Richtung der y, nämlich PM $= \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, und die halbe Axe in der Richtung der z, nämlich

PN $= \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ iſt.

7. Der Schnitt eines Sphäroids, der parallel mit einer der Coordinaten-Ebenen, YAZ geführt wird, iſt dem Schnitte in dieſer Ebene, CFD, ähnlich — Denn in dem Schnitte durch MPN, wo PM mit AC, und

PN mit AD parallel iſt, iſt PM : PN = b : c, oder PM : PN = AC : AD. Ellipſen, deren Axen daſſelbe Verhältniß haben, ſind ähnliche Figuren, ſ. Aehnlichkeit. — In dem Artikel, krumme Fläche, iſt der Satz allgemein erwieſen.

Wenn der Schnitt durch CAD ein Kreis iſt, ſo ſind alle mit demſelben parallelen Schnitte auch Kreiſe.

8 Jeder Schnitt eines Sphäroids iſt eine Ellipſe. — Denn die Oberfläche dieſes Körpers iſt eine krumme Fläche vom zweyten Grade, deren Schnitte immer Kegelſchnitte ſind, ſ. krumme Fläche, 63. Für das Sphäroid, als einen endlich begränzten Körper, bleibt nur die Ellipſe zur Durchſchnittslinie übrig. Sie begreift auch den Kreis.

Archimedes beweiſet dieſe Eigenſchaft der Sphäroiden, für die von ihm betrachtete Gattung, in ſeiner Abhandlung) S. 15.

9. Jeder endliche, von einer krummen Fläche des zweyten Grades begränzte Körper enthält einen Punct, welcher der Mittelpunct aller dadurch gelegten elliptiſchen Durchſchnitte iſt, oder, dieſer Körper iſt ein Sphäroid.

Denn man nehme irgend einen Punct O, innerhalb oder auſſerhalb eines Sphäroids, zum Mittelpuncte der Coordinaten-Axen, und beſtimme deſſen Lage, in Beziehung auf den Mittelpunct des Sphäroids, durch die Coordinaten α, β, γ, nach der Richtung der x, y, z, die für das Sphäroid gebraucht ſind. Die Axen der neuen Coordinaten ſeyn ebenfalls ſenkrecht auf einander, wie ſie es auch in der allgemeinſten Gleichung genommen werden. Die Lage einer von ihnen wird beſtimmt durch den Punct, in welchem ſie eine der drey Coordinaten-Ebenen für das Sphäroid treffen ſoll, das iſt, durch die beiden zu dieſem Puncte gehörigen Coordinaten, δ, ε, in dieſer Ebene. Für die Lage der zweyten Coordinaten-Axe, die ſenkrecht auf die erſte ſeyn ſoll,

bleibt nur eine Beſtimmung durch eine einzelne Coordinate, ζ, willkürlich. Die Lage der dritten Axe iſt durch die Lage jener beiden gegeben. Zu den drey Beſtimmungen, a, b, c, in der einfachſten Gleichung für ein Sphäroid, kommen alſo noch ſechs willkürliche. Führt man dieſe in die Gleichung ein, ſo entſteht eine Gleichung vom zweyten Grade, in welcher zu den Coefficienten, das unveränderliche Glied mit gerechnet, neun Größen nach Willkür angenommen werden können. In der allgemeinſten Gleichung des zweyten Grades ſind zehn Coefficienten mit Einſchluß des unveränderlichen Gliedes vorhanden. Dieſe zu beſtimmen reichen neun gegebene Größen hin, da mittelſt der Diviſion aller Coefficienten durch einen derſelben, bey der Zuſammenſtellung der allgemeinen Gleichung mit der verwandelten, nicht mehr als neun Gleichungen hervorgehen. — So wie nun die einfachſte Gleichung für ein Sphäroid ſich in die allgemeinſte verwandeln läßt, ſo muß ſich jede Gleichung für eine Fläche vom zweyten Grade, wofern ſie nur einem begränzten Körper zugehört, in die einfachſte für ein Sphäroid verwandeln laſſen. Der Körper oder deſſen Oberfläche hat alſo einen Mittelpunct.

10. Zur Erläuterung des hier, von der Beſtimmung der Coefficienten in einer allgemeinen Gleichung, angeführten bemerke man, daß die einfachſte Gleichung für ein Sphäroid,

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2,$$

vier Glieder hat, deren Coefficienten durch drey Größen, die Axen dreyer Ellipſen beſtimmt werden. Die Diviſion der Glieder durch den Coefficienten von x^2 giebt ihr die Form,

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{a^2}{c^2} z^2 = a^2.$$

Die Multiplication aller Glieder mit einer gegebenen Größe, als $b^2 c^2$, ändert die Gleichung nicht.

Zu vergleichen Euleri Introd. in Anal. Infin.

T. II. Append. de Superficiebus secundi ordinis, 113 ff. Auch in dieſem Wörterbuche, Artik. Krumme Fläche, 74—90.

11. Den Inhalt eines Sphäroids zu finden. — Man ſetze das zwiſchen den ganzen Ellipſen, wovon in (Fig. 31) nur die Quadranten DAC, NPM gezeichnet ſind, enthaltene Segment des Sphäroids = Z, ſo iſt dZ = 4NPM. dx (M. ſ. die Anm. in dem Art. Hufförmiger Abſchnitt. Th. II. S. 701)

d. i. $= \frac{\pi bc}{aa} . \partial x\ (aa - xx)$. (6) und daraus

$$Z = \frac{\pi bc}{aa}\left(a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3\right)$$

ohne Conſtans, weil Z und x zugleich verſchwinden.

Für x = a wird Z dem halben Sphäroid gleich. Dieſes iſt alſo $\frac{2}{3}\pi abc$, folglich das ganze $= \frac{4}{3}\pi abc$.

12. Eine Ellipſe, deren größere Axe = 2a, kleinere = 2b, drehe ſich einmahl ganz um dieſe kleinere Axe herum, ſo entſteht ein gedrucktes oder abgeplattetes Sphäroid (sphaeroides compressum, s. latum), deſſen Inhalt $= \frac{4}{3}\pi aab$. Geſchieht die Drehung um die größere Axe, ſo entſteht ein längliches oder ablanges Sphäroid (sphaer. oblongum), deſſen Inhalt $= \frac{4}{3}\pi abb$.

13. Das gedruckte Sphäroid verhält ſich zu dem ablangen wie a : b.

14. Um jedes Sphäroid läßt ſich ein gerader Cylinder (dieſes Wort in weiterem Sinne genommen) beſchreiben, deſſen Grundflächen einem der Hauptdurchſchnitte des Sphäroids gleich ſind, die Höhe aber der auf

dieſem Durchſchnitte ſenkrechte Durchmeſſer des Sphäroids iſt. Dieſes erhellt daraus, daß die berührenden aller Ellipſen wie EFB in den Scheitelpuncten F der EB parallel ſind, die berührenden aber an den Scheiteln E und B dieſer Ellipſen in einer mit DCA parallelen Ebene liegen. Da der Inhalt eines ſolchen umſchriebenen Cylinders $= 2\pi abc$, ſo iſt das Sphäroid $\frac{2}{3}$ deſſelben.

15. Der Halbmeſſer einer Kugel r, welche mit dem Sphäroid gleichen Inhalt hat, iſt $= \sqrt[3]{abc}$. Iſt $a = c$, alſo das Sphäroid durch Drehung um die Axe $2b$ entſtanden, ſo iſt $r = \sqrt[3]{aab}$ oder $= a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, folglich die erſte zweyer Mittelproportionalen zwiſchen dem Halbmeſſer des Äquators des Sphäroids und der halben Axe deſſelben.

16. Die Oberfläche eines Sphäroids zu finden. — In dem Viertel des Sphäroids ABCD, welches (Fig. 32.) darſtellt, ſeyn BED, und BeD zwey einander unendlich nahe Schnitte durch die Axe BD, HGL und hgl aber ein Paar dem durch die Axen AO, OC gehenden Hauptſchnitte AOC parallele, einander gleichfalls unendlich nahe Schnitte, ſo entſteht, indem die durch die Axe BD gelegten Ellipſen BED, BeD die dem Hauptſchnitte AOC parallelen GNL, gnl in N, R, n, r durchſchneiden, auf der Oberfläche des Sphäroids das Viereck NnrR, welches, inſofern man die Fläche des Sphäroids von B und dem Quadranten BLA aus entſtehen läßt, das Differential des Sectors BNn iſt, welcher ſelbſt wiederum das Differential des Sectors BNL iſt. Es iſt alſo hier, wie bey Erfindung des Inhalts eines ſphäriſchen Dreyecks durch Rechnung in dem Art. Kugel, 37. eine doppelte Integration nöthig.

Man ziehe an N die berührende der Ellipſe BED, welche der verlängerten OB in T begegne, und denke ſich nun durch *alle* Puncte der Ellipſe GNL

ſolche Ellipſen wie BED gelegt, und an ihre Durchſchnitte mit GNL Berührungslinien gezogen: dieſe werden ſämmtlich der verlängerten OB in T begegnen, weil OH : OB = OB : OT (Ellipſe, 30) und OH die gemeinſchaftliche Abſciſſe der Berührungspuncte aller jener Ellipſen iſt. Das Viereck NnrR iſt alſo als ein unendlich kleines Stück einer unendlich ſchmalen Zone der Seitenfläche eines Kegels, deſſen Spitze in T, Axe TO, und wovon die Ellipſe GNL ein auf die Axe ſenkrechter Schnitt iſt, anzuſehen, folglich ein Trapez mit zwey parallelen Seiten Nn, Rr, das ſich aber, weil der Unterſchied von Rr und Nn gegen Nn unendlich klein iſt, mit einem Parallelogramm verwechſeln läßt. Sein Inhalt iſt alſo = RN × Nn × sin RNn.

Um dieſen Inhalt auf die für die Integration bequemſte Weiſe auszudrucken, erinnere man ſich, daß die Rectification der Ellipſe ſehr vereinfacht wird, wenn man den Bogen deſſen Sinus in dem über der großen Axe beſchriebenen Kreiſe die mit der Ordinate der Ellipſe zu einerley Abſciſſe gehörige Ordinate des Kreiſes iſt (M. ſ. Rectification, 12.) als die veränderliche Größe einführt. Dieſe Subſtitution leiſtet auch hier gute Dienſte.

Es ſey OA = a, OB = b, OC = c. Von N ſey NM auf die Ebene AOC ſenkrecht, ſo fällt M in den Durchſchnitt OE der auf AOB ſenkrechten Ebene BED mit dieſer. Von M ſey MP in der Ebene AOC ſenkrecht auf OA und NQ ihr in der Ebene GHL parallel, ſo iſt auch HQN ein rechter Winkel. Man ſetze OP = HQ = x, PM = NQ = y und MN = OH = z, ſo daß x, y, z die drey rechtwinkligen Coordinaten des Punctes N ſind. Ferner nenne man noch die in den Ellipſen AOC, LHG an die Puncte E, N gezogenen halben Durchmeſſer OE,t, HN,s, und denke ſich nun in der Ebene des Schnitts BED über Bd als Durchmeſſer an derſelben Seite mit der Ellipſe BED einen Halbkreis beſchrieben, die Ordinate HN der

El-

Ellipſe BED bis an den Halbkreis verlängert, und an den Endpunct der Ordinate des Kreiſes einen Halbmeſſer deſſelben gezogen. Heiß nun φ der Winkel dieſes Halbmeſſers mit dem OB, ſo iſt $OH = z = b\cos\varphi$, $HN = s = t\sin\varphi$, wobey man bedenken muß, daß OE die andere Halbaxe der Ellipſe BED iſt. Man wird ſich dieſes durch Fig. 5. Tab. IX. des zweyten Theils deutlich machen können. Denn wenn dort $CA = CO = b$, $CD = CR = t$, $ACQ = \varphi = CRN$, ſo iſt $CP\,(z) = CQ.\cos PCQ = b\cos\varphi$, und $CN = PM\,(s) = CR.\sin CRN = t\sin\varphi$. Da wegen der gleichen Winkel NHL, EOA die Durchmeſſer HN, OE, ähnlich liegende Linien in den ähnlichen Ellipſen GNL, CEA ſind, ſo iſt $OE : HN = AO : HL = CO : GH$, folglich $HL = a\sin\varphi$, und $GH = c\sin\varphi$. Man denke ſich nun innerhalb des rechten Winkels GHL mit HL den Quadranten eines Kreiſes beſchrieben, und die Ordinate deſſelben zu der Abciſſe HQ durch Verlängerung der QN gezogen, und ſetze den Winkel am Mittelpuncte H, welchem dieſe Ordinate als Sinus entſpricht, ψ, ſo iſt $HQ = x = OP = a\sin\varphi\cos\psi$, $QN = y = PM = c\sin\varphi\sin\psi$, und $s = HN = \sin\varphi\sqrt{(a^2\cos\psi^2 + c^2\sin\psi^2)}$, t oder OE aber $= \sqrt{(a^2\cos\psi^2 + c^2\sin\psi^2)}$.

Es iſt nun in der Ellipſe BED das Bogenelement $NR = \sqrt{(\partial z^2 + \partial s^2)}$, wo die Differentiale von z und s bloß in Beziehung auf φ zu nehmen ſind, weil für eine beſtimmte Ellipſe BED der Winkel ψ derſelbe bleibt, indem ſolcher bloß den Winkel AOE oder LHN (deſſen $\text{tang.} = \frac{c}{a}\,\text{tang}\psi$) beſtimmt. Man erhält hiernach

$$NR = \partial\varphi\sqrt{(b^2\sin\varphi^2 + (a^2\cos\psi^2 + c^2\sin\psi^2)\cos\varphi^2)}.$$

Das Differential iſt poſitiv, weil der Bogen BN mit φ zugleich wächſt.

Ferner iſt in der Ellipſe GNL das Bogenelement $Nn = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, wo aber bey der Differentiirung von x und y bloß ψ als veränderlich zu nehmen iſt, weil

φ für eine beſtimmte Ellipſe GNL ſich nicht ändert, indem es bloß den Abſtand derſelben OH von O nebſt den Axen 2HL, 2HG beſtimmt. Hiernach wird Nn $= \partial\psi \sin\varphi \surd(a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2)$, poſitiv, weil der Bogen LN und Winkel ψ zugleich wachſen.

Noch iſt sin RNn durch φ und ψ auszudrucken übrig: An N werde eine Berührungslinie der Ellipſe GNL, welche der verlängerten HL in X begegne, gezogen, ſo iſt der Winkel RNn dem Winkel TNX der beiden Berührenden TN, NX gleich. Wenn nun noch HS auf NX ſenkrecht gezogen und TS verbunden wird, ſo iſt auch TS auf NX ſenkrecht, und $\sin RNn = \sin TNX = \sin TNS = \frac{TS}{TN}$.

Da OH : OB = OB : OT (Ellipſe, 30) und auf gleiche Weiſe HQ : HL = HL : HX, ſo wird OT $= b \sec\varphi$, HX $= a \sin\varphi \sec\psi$. Alſo iſt HT $= b(\sec\varphi - \cos\varphi) = b \sin\varphi \tang\varphi$, QX $=$ $a \sin\varphi \sin\psi \tang\psi$ und $\tang HXS = \frac{QN}{QX} = \frac{c\cos\psi}{a\sin\psi}$. Hieraus ergiebt ſich

$$\sin HXS = \frac{c\cos\psi}{\surd(a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2)},$$ und HS $=$

$$HX.\sin HXS = \frac{ac\sin\varphi}{\surd(a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2)}.$$ Ferner iſt $TS = \surd(HT^2 + HS^2) =$

$$\tang\varphi \surd\frac{a^2c^2\cos\varphi^2 + b^2(a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2)\sin\varphi^2}{a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2},$$

$TN = \surd(HT^2 + HN^2) =$
$\tang\varphi \surd(b^2\sin\varphi^2 + (a^2\cos\psi^2 + c^2\sin\psi^2)\cos\varphi^2)$, mithin

$$\sin RNn = \surd(M:N), \text{ wo } M =$$
$a^2c^2\cos\varphi^2 + b^2(a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2)\sin\varphi^2$, und N $=$
$(a^2\,\text{ſ}\psi^2 + c^2\,\text{cſ}\psi^2)(b^2\,\text{ſ}\varphi^2 + (a^2\,\text{cſ}\psi^2 + c^2\,\text{ſ}\psi^2)\,\text{cſ}\,\varphi^2)$

Dadurch wird endlich $RN \times Nn \times \text{ſ}RNn = \partial\psi\partial\varphi\,\text{ſ}\varphi\sqrt{(a^2c^2\,\text{cſ}\varphi^2 + b^2(a^2\,\text{ſ}\psi^2 + c^2\,\text{cſ}\psi^2)\,\text{ſ}\varphi^2)}$. Dieſes Differential giebt in Beziehung auf φ ſo integrirt, daß das Integral für $\varphi = 0$ verſchwindet den unendlich kleinen Sector BNn. Integrirt man alsdann den für dieſen erhaltenen Ausdruck noch einmal in Beziehung auf ψ ſo, daß das Integral für $\psi = 0$ verſchwindet, ſo erhält man den Sector BNL. Die Größen φ und ψ ſind hierbey von einander ganz unabhängig, ſo daß man nach der erſten Integration, um das Segment der Oberfläche BEDeB zu erhalten, nur $\varphi = \pi$, nicht etwa einer Function von ψ gleich zu ſetzen hat. Um das Doppelintegral alsdann über die ganze Oberfläche zu erſtrecken, darf man nur $\psi = 2\pi$ ſetzen. Setzt man in dem Ausdrucke für den Sector BNL $\varphi = \pi$, ſo erhält man das Segment BEDAB, ſetzt man darin aber $\psi = 2\pi$, ſo bekommt man die Fläche der von der ganzen Ellipſe GNL begränzten Haube oder Kuppel, deren Spitze B iſt; ſetzt man zugleich $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$, ſo bekommt man die ganze Oberfläche als Sphäroids.

17. Nimmt man das vorige Differential negativ, und integrirt alsdann nach φ ſo, daß das Integral für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ verſchwindet, ſo erhält man das unendlich kleine Zonenſtück ENne. Dies nimmt nämlich ab, wenn φ wächſt. Eine zweyte Integration nach ψ, wobey das Integral von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ genommen wird, giebt alsdann die zwiſchen dem Hauptſchnitte AOC und dem ihm parallele Schnitte LHG (um das ganze Sphäroid herumgehende) ſphäroidiſche Zone. Es iſt demnach, wenn das Zonenſtück ALNE = S geſetzt wird,

$$\partial S = -\,\partial\psi\,\partial\varphi\,\sin\varphi\sqrt{(a^2c^2\cos\varphi^2 + b^2(a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2)\sin\varphi^2)}.$$

18. Es ſey $a = c$, alſo das Sphäroid durch Drehung einer Ellipſe, deren Achſen $2a = 2AO$ und $2b = BD$ ſind, um die Axe BD entſtanden, ſo wird

$$\partial S = -\,a\,\partial\psi\,\partial\varphi\,\sin\varphi\sqrt{(c^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)}$$

wo um der größern Allgemeinheit und um des folgenden willen c unter dem Wurzelzeichen beybehalten, und nicht durch das ihm gleiche a erſetzt iſt.

Man ſetze $\cos\varphi = w$, ſo iſt $\sin\varphi\partial\varphi = -\partial w$,
$$\sqrt{(c^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)} = \sqrt{(c^2w^2 + b^2(1-w^2))}$$
$$= \sqrt{(b^4 + (c^2-b^2)w^2)} = b\sqrt{(1+n^2w^2)}$$
wenn zur Abkürzung $\frac{c^2-b^2}{b^2}$ oder $\frac{a^2-b^2}{b^2} = n^2$ geſetzt wird, wo alſo zur Realität von n erforderlich iſt, daß $a > b$, alſo das Sphäroid durch Umdrehung der Ellipſe BAD um ihre kleinere Axe BD entſtanden oder ein gedrucktes ſey.

Es wird nun nach (Integralformel, 57. 50.)
$$-\int\partial\varphi\sin\varphi\sqrt{(c^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)} =$$
$$b\int\partial w\sqrt{(1+n^2w^2)} = \tfrac{1}{2}bw\sqrt{(1+n^2w^2)}$$
$$+\frac{b}{2n}\log(\sqrt{(1+n^2w^2)} + nw).$$

Da dies Integral für $w = 0$ d. i. für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ verſchwindet, ſo kommt keine Conſtante hinzu, und man hat
$$\partial S = \tfrac{1}{2}abw\partial\psi\sqrt{(1+n^2w^2)} +$$
$$\frac{ab\partial\psi}{2n}\log(\sqrt{(1+n^2w^2)} + nw).$$

Hiervon iſt das Integral nach ψ und ſo genommen, daß es für $\psi = 0$ verſchwindet
$$S = \tfrac{1}{2}abw\psi\sqrt{(1+n^2w^2)}$$
$$+\frac{ab\psi}{2n}\log(\sqrt{(1+n^2w^2)} + nw).$$

19. Da $\sqrt{(1+n^2w^2)} + nw = \frac{1}{\sqrt{(1+n^2w^2)} - nw}$

alſo $(\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw)^2 = \frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}$,

ſo iſt $\log(\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw)$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}$$

und

$$S = \frac{1}{2}abw\psi\sqrt{(1+n^2w^2)} + \frac{ab\psi}{4n}\log\frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}.$$

20. Für die ganze zwiſchen dem Kreiſe vom Halbmeſſer AO (dem Aequator in Bezug auf das Erdſphäroid) und dem ihm parallelen Kreiſe vom Halbmeſſer LH = a sinφ enthaltene Zone Z iſt $\psi = 2\pi$, daher

$$Z = \pi abw\sqrt{(1+n^2w^2)} + \frac{\pi ab}{2n}\log\frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}$$

auch iſt $S = \frac{\psi}{2\pi}.\ Z.$

Der zum Coſinus w gehörige Winkel φ iſt das Complement desjenigen, den Dú Sejour die verbeſſerte Breite nennt.

21. Man ſetze $\frac{nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}} = u$, ſo wird

$n^2w^2 = \frac{u^2}{1-u^2}$, $1+n^2w^2 = \frac{1}{1-u^2}$, und w

$\sqrt{(1+n^2w^2)} = \frac{u}{n(1-u^2)}$. Durch dieſe Subſtitutionen wird $Z = \frac{\pi ab}{n}\left(\frac{u}{1-u^2}+\frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}\right)$

wo $u = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)\cos\varphi^2}{b^2+(a^2-b^2)\cos\varphi^2}}$, und wenn die

Abciſſe OH auf der kleinen Axe der erzeugenden Ellipſe vom Mittelpuncte O an genommen wieder x genannt wird, ſo iſt $\cos\varphi = \frac{x}{b}$, alſo $u = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)x^2}{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}}$.

22. Da $\frac{u}{1 - u^2} = u + u^3 + u^5 + u^7 + \text{etc.}$ und $\frac{1}{2} \log \frac{1 + u}{1 - u} = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + \text{etc.}$ (Logarithmus, 57) ſo wird

$$Z = \frac{2\pi ab}{n} (u + \tfrac{2}{3} u^3 + \tfrac{3}{5} u^5 + \tfrac{4}{7} u^7 + \text{etc.}).$$

23. Wenn $b = a$ genommen wird, ſo verwandelt ſich das Sphäroid in eine Kugel vom Halbmeſſer a, und es wird $n = 0$, $u = 0$; aber $\frac{u}{n} \left(= \frac{w}{\sqrt{(1 + n^2w^2)}} \right) = w$, und die von LA beſchriebene Kugelzone $= 2\pi aaw = 2\pi ax$ (Complanation, Th. I. S. 515.)

24. Für die halbe Oberfläche des gedruckten Sphäroids iſt $\varphi = 0$, alſo $w = 1$, $nw = n = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b}$, $\sqrt{(1 + n^2 w^2)} = \frac{a}{b}$, und die ganze Oberfläche =

$$2\pi aa + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \log \frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

25. Da $\int \frac{\partial w^2}{\sqrt{1 + n^2 w^2}} = \frac{1}{n} \int \frac{n \partial w}{\sqrt{(1 + n^2 w^2)}} = \frac{1}{n} \log \text{tang} (45^\circ + \frac{1}{2}\chi)$, wenn $nw = \text{tang}\,\chi$ genommen wird, ſo iſt die Fläche der elliptiſchen Zone

$$Z = \frac{\pi ab}{n} (\text{tang}\,\chi \cdot \sec\chi + \log \text{tang} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\chi)).$$

26. Es iſt MAm (Fig. 33) die Hälfte einer Hyperbel, deren Mittelpunct C, halbe Zwerchaxe CA. Durch den Mittelpunct C iſt DD ſenkrecht auf CA. Die Hyperbel MAm mache eine volle Umdrehung um DD, ſo entſteht ein cylinderartiger Köper, Wren's und Parent's Cylindroid, deſſen äußere Fläche hohl iſt. Man ſucht die Oberfläche dieſes Körpers.

Wenn die Abciſſen x vom Mittelpuncte C an auf der DD genommen werden, und ein unbeſtimmtes Stück der Fläche, nämlich dasjenige, welches der Bogen AM = s bey der Drehung beſchreibt Z heißt, ſo iſt $\partial Z = 2\pi y \partial s$.

Nun iſt $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$, alſo $y\partial y = \frac{a^2}{b^2} x \partial x$,

$$\partial y^2 = \frac{a^4 x^2 \partial x^2}{b^4 y^2}, \partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \frac{(b^4 y^2 + a^4 x^2)\partial x^2}{b^4 y^2}$$

$$= \frac{a^2 \left((a^2 + b^2) x^2 + b^4\right) \partial x^2}{b^4 y^2}, \text{ und } \partial s$$

$$= \frac{a \partial x \sqrt{\left((a^2 + b^2) x^2 + b^4\right)}}{b^2 y}.$$

Dadurch wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a \partial x}{b^2} \sqrt{\left((a^2 + b^2) x^2 + b^4\right)}.$$

Setzt man hier $\frac{x}{b} = w$, und $\frac{a^2 + b^2}{b^2} = n^2$, ſo wird

$$\partial Z = 2\pi ab \, \partial w \sqrt{(1 + n^2 w^2)}$$

alſo $Z = 2\pi ab \int \partial w \sqrt{(1 + n^2 w^2)}$
wo das Integral ſo zu nehmen iſt, daß es für $w = 0$ verſchwindet. Dieſes führt auf denſelben Ausdruck, wie in (19) für die ſphäroidiſche Zone. Man ſehe den Artikel Cylindroid.

27. Wird die Oberfläche des länglichten Sphäroids verlangt, ſo muß man, wofern man nicht unter b in (18) die halbe größere Axe der erzeugenden Ellipſe verſtehen will, daſelbſt a und b gegenſeitig vertauſchen. Dadurch wird das dortige $n^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$. Will man alſo $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n^2$ ſetzen, wie es die Realität von n erfordert, ſo kommt $- n^2$ ſtatt n^2 in (18) oder $n\sqrt{-1}$ ſtatt n, und es wird

$$S = \tfrac{1}{2} abw \psi \sqrt{(1 - n^2 w^2)}$$
$$+ \frac{ab\psi}{2n\sqrt{-1}} \log(\sqrt{(1 - n^2 w^2)} + nw.\sqrt{-1}).$$

Da die Logarithmen unmöglicher Größen ſich auf mögliche Kreisbogen zurückführen laſſen, indem

$$\frac{\log(\cos v + \sqrt{-1} \ \sin v)}{\sqrt{-1}} = v$$

wie ſich leicht aus Goniometr. 153 herleiten läßt, ſo wird, wenn man $\sin v = nw$ nimmt,

$$\frac{\log(\sqrt{(1 - n^2 w^2)} + nw\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = \text{Ang.} \sin nw$$

und dadurch

$$S = \tfrac{1}{2} abw \psi \sqrt{(1 - n^2 w^2)} + \frac{ab\psi}{2n} \text{Ang.} \sin nw$$

$$Z = \pi abw \sqrt{(1 - n^2 w^2)} + \frac{\pi ab}{n} \text{Ang.} \sin nw.$$

28. Für die halbe Oberfläche des Sphäroids iſt $w = 1$, $\sqrt{(1 - n^2 w^2)} = \frac{b}{a}$, alſo die Oberfläche des oblangen Sphäroids =

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{Ang.} \sin \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$
$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{Ang.} \cos \frac{b}{a}.$$

29. Wenn b = a genommen wird, ſo iſt n = o. In dem Ausdrucke $\frac{\pi ab}{n}$ Ang. sin nw wird alſo der erſte Factor unendlich, der zweyte iſt o. Um den Werth des Products zu haben braucht man die Reihe für den Bogen aus dem Sinus. Da nämlich Ang. sin nw $= nw + \frac{1}{6} n^3 w^3 + \frac{3}{40} n^5 w^5 +$ etc. ſo iſt $\frac{1}{n}$ Ang. ſ $nw = w + \frac{1}{6} n^2 w^3 + \frac{3}{40} n^4 w^5 +$ etc., welches, für n = o, = w iſt. Daher iſt die Fläche der von LA (Fig. 31) beſchriebenen Kugelzone $= 2\pi a^2 w = 2\pi ax$, wie in (22).

30. Setzt man nw = sin σ, ſo wird in (27)

$$Z = \frac{\pi ab}{n} \sin\sigma \cos\sigma + \frac{\pi ab}{n} \sigma$$

$$= \frac{\pi ab}{2n} (\sin 2\sigma + 2\sigma)$$

wo $\sin\sigma = \frac{\cos\varphi \sqrt{(aa - bb)}}{a.} = \frac{x \sqrt{(aa - bb)}}{a^2}$.

31. Um die Oberflächen des gedruckten und länglichten Sphäroids mit einander zu vergleichen, ſetze man $a^2 - b^2 = a^2 e^2$, ſo daß e die Excentricität der erzeugenden Ellipſe iſt, ſo wird die Oberfläche des gedruckten Sphäroids =

$$2\pi aa \left\{ 1 + \frac{1 - e^2}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e} \right\},$$ die des ablangen,

$$= 2\pi aa \left\{ 1 - e^2 + \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{e} \cdot \text{Ang. sin } e \right\},$$ jene verhält ſich alſo zu dieſer wie $(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$

$+ \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e}$ zu $(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{e}$ Ang. sin e. Da Ang. sin e $= \int \frac{\partial e}{\sqrt{(1-e^2)}}$, ſo ſind die Coefficienten von e^{2m} in $(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{e}$ Ang. sin e in dem Verhältniß von $2m + 1 : 1$; alſo iſt $(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$ $> \frac{1}{e}$ Ang. sin e. Da nun auch $\frac{1}{2e} \log \frac{1+e}{1-e} > 1$ alſo $\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{2e} \log \frac{1+e}{1-e} > (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$, ſo iſt das Vorderglied jenes Verhältniſſes größer als das Hinterglied. Demnach hat das gedruckte Sphäroid eine größere Oberfläche als das mit ihm aus derſelben erzeugenden Ellipſe entſtandene ablange Sphäroid, ſo wie es auch einen größern Inhalt hat (13).

32. Entwickelt man die Ausdrücke $\frac{1-e^2}{2e} \times \log \frac{1+e}{1-e}$ und $\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e}$ Ang. sin e in (30) in Reihen, ſo erhält man die Oberfläche des gedruckten Sphäroids $= 4\pi aa \times$

$$\left(1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 - \frac{1}{35}e^6 - \frac{1}{63}e^8 - \text{etc.}\right)$$

die des ablangen aber $=$

$$4\pi aa \times \left(1 - \frac{2}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 - \frac{4}{105}e^6 - \frac{8}{315}e^8 - \text{etc.}\right)$$

welche Ausdrücke zur Berechnung dieſer Oberflächen dienen, wenn e eine kleine Größe iſt. Man bemerke noch, daß $4\pi aa$ die Oberfläche einer Kugel vom Halbmeſſer a iſt, welche kommt, wenn $a = b$, alſo $e = 0$ wird.

Exempel. Es ſey $\frac{b}{a} = \frac{309}{310}$, ſo iſt e

$$= \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{309}{310}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{619}}{310}$$

und man erhält

$$e^2 = 0{,}00644120707$$
$$e^4 = 0{,}00004148914$$
$$e^6 = 0{,}00000026724$$
$$e^8 = 0{,}00000000172$$
$$e^{10} = 0{,}00000000001$$

und hierdurch, wenn $4\pi aa = 9281916$ iſt, die Oberfläche des gedruckten Sphäroids $= 9261961$, die des ablangen $= 9242032$, beide in den nächſten ganzen Zahlen. Die gefundene Oberfläche des gedruckten Sphäroids iſt diejenige der als Drehungsſphäroid betrachteten Erde in geographiſchen Quadratmeilen für das von Zach angegebene Axenverhältniß.

33. Iſt das Sphäroid nicht aus Umdrehung einer Ellipſe um ihre größere oder kleinere Axe entſtanden, alſo in (18) nicht $a = c$, ſo ſetze man in (17)

$$\frac{a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2}{a^2} = \Psi^2$$

und es wird

$$\partial S = - a\partial\psi/\partial\varphi \sin\varphi \sqrt{(c^2 \cos\psi^2 + b^2\Psi^2 \sin\psi^2)}$$

ſo daß in (18) ſtatt b^2 kommt $b^2\Psi^2$. Behält man nun die dortigen Bezeichnungen bey, ſo wird

$$\partial S = \tfrac{1}{2} abw\Psi\partial\psi\sqrt{(1 + n^2w^2)}$$
$$+ \frac{ab\Psi\partial\psi}{4n} \log \frac{\sqrt{(1+n^2w^2)} + nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)} - nw}$$

wo

$$n^2 = \frac{c^2 - b^2\Psi^2}{b^2\Psi^2}$$

iſt. Setzt man hier $w = 1$, ſo erhält man den Sector EBe (Fig. 31), welcher das Differential des Sectors

ABE iſt. Wird dieſer alſo $\frac{1}{2}$W genannt, ſo daß W das Segment BADEB bezeichnet, ſo iſt

$$\partial W = ac\partial\psi + \frac{ab^2\Psi^2\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}.$$

Das Integral des zweyten Theils dieſer Formel läßt ſich durch keinen endlichen Ausdruck angeben. In dem Falle, wo a und c wenig von einander verſchieden ſind, läßt es ſich durch Näherung folgendergeſtalt erhalten.

Da

$$\Psi^2 = \frac{a^2\sin\psi^2 + a^2\cos\psi^2 - a^2\cos\psi^2 + c^2\cos\psi^2}{a^2}$$

$$= 1 + \frac{c^2-a^2}{a^2}\cos\psi^2$$

$$= 1 + i\cos\psi^2$$

wenn $\frac{c^2-a^2}{a^2} = i$ gemacht wird, ſo wird

$$\frac{ab^2\Psi^2\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}} =$$

$$\frac{a(b^2+b^2i\cos\psi^2)\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2-b^2i\cos\psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2-b^2i\cos\psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2-b^2i\cos\psi^2)}}.$$

Nimmt man nun

$$\frac{ab^2}{2\sqrt{(c^2-b^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2)}} = f(b^2)$$

ſo wird

$$\frac{a(b^2+b^2i\cos\psi^2)\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2-b^2i\cos\psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2-b^2i\cos\psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2-b^2i\cos\psi^2)}}$$

$$= \partial\psi . f(b^2 + b^2 i\cos\psi^2)$$

alſo nach dem Taylorſchen Lehrſatze

$$= \frac{ab^2\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

$+ f'(b^2) b^2 i \cos\psi^2 \partial\psi + \frac{1}{2} f''(b^2) b^4 i^2 \cos\psi^4 \partial\psi$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(b^2) . b^6 i^3 \cos\psi^6 \partial\psi + \text{etc.}$$

wo $f'(b^2)$, $f''(b^2)$, $f'''(b^2)$ u. ſ. w. die ſucceſſiven Differentialquotienten $\frac{\partial . f(b^2)}{\partial . b^2}$, $\frac{\partial^2 . f(b^2)}{(\partial . b^2)^2}$, $\frac{\partial^3 f(b^2)}{(\partial . b^2)^3}$ u. ſ. w., b^2 als Functionalgröße genommen, anzeigen. Hiernach wird

$$W = ab\psi + \frac{a^2 b\psi}{2\sqrt{(c^2 - b^2)}} \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - b^2)}}{c - \sqrt{(c^2 - b^2)}}$$

$$+ f'(b^2) . b^2 i \int \partial\psi \cos\psi^2 + \frac{1}{2} f''(b^2) . b^4 i^2 \int \partial\psi \cos\psi^4$$

$$+ \frac{1}{2 . 3} f'''(b^2) . b^6 i^3 \int \partial\psi \cos\psi^6 + \ldots\ldots$$

wo die Integrale $\int \partial\psi \cos\psi^2$, $\int \partial\psi \cos\psi^4$ u. ſ. w. ſo zu nehmen ſind, daß ſie für $\psi = 0$ verſchwinden.

34. Um die Oberfläche des Sphäroids zu haben, muß man $\psi = 2\pi$ ſetzen. Nun iſt (Integralformel, 114. 62)

$$\int \partial\psi \cos\psi^{2\lambda} = \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots 2\lambda - 1}{2 . 4 . 6 \ldots\ldots 2\lambda} . 2\pi$$

wenn das Integral von $\psi = 0$, bis $\psi = 2\pi$ genommen wird, daher iſt die Oberfläche des Sphäroids =

$$2\pi \left\{ ab + \frac{a^2 b}{2\sqrt{(c^2 - b^2)}} \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - b^2)}}{c - \sqrt{(c^2 - b^2)}} \right.$$

$$\left. + \Sigma . \frac{1}{2\lambda} . \frac{1 . 3 . 5 \ldots 2\lambda - 1}{1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots\ldots \lambda^2} . f^{(\lambda)}(b^2) . b^{2\lambda} i^\lambda \right\}$$

wo $\Sigma \frac{1}{2\lambda} . \frac{1 . 3 . 5 \ldots 2\lambda - 1}{1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots \lambda^2} f^{(\lambda)}(b^2) . b^{2\lambda} i^\lambda$ den ganzen Complexus der Glieder anzeigt, welche entſtehen, wenn in dem unter dem Zeichen Σ ſtehenden Ausdrucke λ nach und nach = 1, 2, 3, 4,.. u, ſ, w, geſetzt wird.

35. Da es für die Geographie von Nutzen iſt, den Inhalt einer ſphäroidiſchen Zone durch die Breite der Puncte auf dem die Zone begränzenden Parallelkreiſe ausgedruckt zu haben, ſo ſollen die darauf Bezug habenden Ausdrücke hier noch entwickelt werden.

Es iſt ACB (Fig. 33*.) ein elliptiſcher Quadrant, welcher ſich um die halbe kleinere Axe AC drehe, und die Hälfte eines gedruckten Sphäroids beſchreibe. Man ſoll die von dem Bogen BM beſchriebene ſphäroidiſche Zone Z durch den Winkel $\omega = MNB$, welchen die Normale MN an dem Endpuncte M des Bogens BM mit der großen Axe CB macht, ausdrucken.

Wenn die Abſciſſen vom Mittelpuncte an auf der großen Axe CB genommen werden, ſo iſt, den Bogen $BM = s$ geſetzt, weil $QM = CP = x$, $\partial Z = 2\pi x \partial s$. Nun iſt, wenn r den Halbmeſſer der Krümmung an M bezeichnet, $\partial s = r\partial\omega$ (Halbmeſſer der Krümmung, 1) und an der Ellipſe (Ebendaſ. 16)

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = \frac{a^2 \cos\omega}{(a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dadurch wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a^4 b^2 \cos\omega\,\partial\omega}{(a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2)^2}$$

Da $2\cos\omega^2 = 1 + \cos 2\omega$, $2\sin\omega^2 = 1 - \cos 2\omega$, ſo iſt

$$\partial Z = \frac{8\pi a^4 b^2 \cos\omega\,\partial\omega}{(a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\omega)^2}.$$

Man ſetze $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n$, ſo iſt $\frac{2a^2}{a^2 + b^2} = 1 + n$

$\frac{2b^2}{a^2 + b^2} = 1 - n$ und $\frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1 - n^2$ und

es wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a^2 (1-n^2)\cos\omega\,\partial\omega}{(1+n\cos 2\omega)^2}$$

das iſt,

$$= 2\pi a^2 (1-n^2)\cos\omega\,(1 - 2n\cos 2\omega + 3n^2\cos 2\omega^2 - 4n^3\cos 2\omega^3 + 5n^4\cos 2\omega^4 - \text{etc.})\,\partial\omega.$$

Wenn man hier die Potenzen von $\cos 2\omega$ nach (Goniometrie, 141) durch die Coſinus der Vielfachen von 2ω ausdruckt, und die Producte zweyer Coſinus in Summen zweyer ſolchen vermittelſt des Satzes $2\cos A.\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$ auflöſt, ſo kann die Integration nach der Formel $\int \cos\lambda\omega.\,\partial\omega = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda\omega$ geſchehen, und es wird

$$\begin{aligned} Z = 2\pi(1-n^2)a^2 \Big[& \left(1 - n + \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{15}{8}n^4 - \text{etc.}\right)\sin\omega \\ & - \left(\tfrac{1}{3}n - \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{2}n^3 - \tfrac{5}{12}n^4 + \text{etc.}\right)\sin 3\omega \\ & + \left(\tfrac{3}{20}n^2 - \tfrac{1}{10}n^3 + \tfrac{1}{4}n^4 - \text{etc.}\right)\sin 5\omega \\ & - \left(\tfrac{1}{14}n^3 - \tfrac{5}{112}n^4 + \text{etc.}\right)\sin 7\omega \\ & + \left(\tfrac{5}{144}n^4 - \text{etc.}\right)\sin 9\omega \\ & - \text{etc.} \Big] \end{aligned}$$

Eine Conſtante kommt nicht hinzu, weil Z mit ω zugleich verſchwindet.

36. Führt man die Multiplication mit dem Factor $1-n^2$ wirklich aus, ſo wird

$$Z = 2\pi a^2 \Big[\left(1 - n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{8}n^4 - \text{etc.}\right) \sin\omega$$

$$- \left(\frac{1}{3}n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n^4 + \text{etc.}\right) \sin 3\omega$$

$$+ \left(\frac{3}{20}n^2 - \frac{1}{10}n^3 + \frac{1}{10}n^4 - \text{etc.}\right) \sin 5\omega$$

$$- \left(\frac{1}{14}n^3 - \frac{5}{112}n^4 + \text{etc}\right) \sin 7\omega$$

$$+ \left(\frac{5}{144}n^4 - \text{etc.}\right) \sin 9\omega$$

$$- \text{etc.} \Big].$$

37. Die Coefficienten zu den Sinus der Vielfachen von ω laſſen ſich auch durch endliche Ausdrücke folgendergeſtalt darſtellen.

Es iſt, wenn zur Abkürzung $a^2 - b^2 = e^2$ geſetzt wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a^4 b^2 \cdot \partial . \sin\omega}{(a^2 - e^2 \sin\omega^2)^2}.$$

Man ſetze noch $\sin\omega = u$, ſo iſt

$$\partial Z = 2\pi a^4 b^2 . \frac{\partial u}{(a^2 - e^2 u^2)^2}.$$

Es iſt (Integralformel, 21.)

$$\int \frac{\partial u}{(a^2 - e^2 u^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{u}{a^2 - e^2 u^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \int \frac{\partial u}{a^2 - e^2}.$$

Dadurch wird ſtatt u und e^2 ihre Werthe wiederhergeſtellt

$$\partial Z = \pi a^2 b^2 \times$$

$$\left\{ \frac{\sin\omega}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin\omega^2} + \int \frac{\cos\omega\, \partial\omega}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin\omega^2} \right\}$$

$=$

$$= 2\pi a^2 b^2 \left\{ \frac{\sin\omega}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\omega} + \int \frac{\cos\omega\,\partial\omega}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\omega} \right\}$$

$$= \frac{2\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ \frac{\sin\omega}{1 + n\cos 2\omega} + \int \frac{\cos\omega\,\partial\omega}{1 + n\cos 2\omega} \right\}.$$

Es ſey $\frac{1}{1 + n\cos 2\omega} = A - B\cos 2\omega + C\cos 4\omega - D\cos 6\omega + \text{etc.}$

ſo wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ A\sin\omega - B\cos 2\omega\sin\omega + C\cos 4\omega\sin\omega - D\cos 6\omega\sin\omega + \text{etc.} + \int\partial\omega\,(A\cos\omega - B\cos 2\omega\cos\omega + C\cos 4\omega\cos\omega - D\cos 6\omega\cos\omega + \text{etc.}) \right\}$$

und

$$Z = \frac{2\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ 2A\sin\omega - \frac{1}{3}(C + 2B)\sin 3\omega + \frac{1}{5}(2D + 3C)\sin 5\omega - \frac{1}{7}(3E + 4D)\sin 7\omega + \text{etc.} \right\}$$

wo das Geſetz des Fortgangs in dem eingeklammerten Factor klar iſt.

In dem Artikel Integralformel, 126. iſt bemerkt, daß

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}},\ B = \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1 - \sqrt{(1-nn)}}{n}\right).$$

Man ſetze alſo $\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n}$ d. i. $\frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}$ oder

$\frac{a - b}{a + b} = m$, ſo wird $n = \frac{2m}{1 + m^2}$, $\sqrt{(1 - nn)}$
$= \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$, $A = \frac{1 + m^2}{1 - m^2}$, und $B = 2mA$.

Ferner iſt nach den dort gefundenen Relationen

$$C = 2\left(\frac{B}{n} - A\right) = 2\left((1 + m^2)A - A\right) =$$

$2m^2 A = mB$, $D = \frac{2C}{n} - B = (1 + m^2)B -$

$B = m^2 B = mC$, $E = \frac{2D}{n} - C = (1 + m^2)C -$

$C = m^2 C = mD$ u. ſ. w. Die Coefficienten B, C, D, E u. ſ. w. bilden alſo eine geometriſche Reihe mit dem Exponenten m, und es iſt der erſte unter ihnen das $2m$fache des erſten Gliedes A in der für $\frac{1}{1 + n \cos 2\omega}$ entwickelten Reihe.

Da nun auch $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n = \frac{2m}{1 + m^2}$, ſo iſt

$\frac{2b^2}{a^2 + b^2} = 1 - n = \frac{(1 - m)^2}{1 + m^2}$, und es wird nach gehöriger Reduction

$$Z = 2\pi a^2 \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)\left[\sin\omega - \frac{1}{3}m(2 + m)\sin 3\omega + \frac{1}{5}m^2(3 + 2m)\sin 5\omega - \frac{1}{7}m^3(4 + 3m)\sin 7\omega - \text{etc.}\right]$$

wo ſtatt $2\pi a^2\left(\frac{1-m}{1+m}\right)$ auch geſetzt werden kann $2\pi ab$ und das allgemeine Glied der eingeſchloſſenen Reihe $\frac{1}{2\lambda+1}\cdot(-m)^{\lambda}\cdot(\lambda+1+\lambda m)\sin(2\lambda+1)\omega$ iſt, 0 für die Stellenzahl des erſten Gliedes genommen.

Henry hat dieſen Ausdruck für eine ſphäroidiſche Zone gegeben in dem Mémoire sur la projection des cartes géographiques adoptée au dépôt général de la guerre. Paris 1810.

38. Exempel. Für $\frac{b}{a} = \frac{1-m}{1+m} = \frac{309}{310}$ iſt $m = \frac{1}{619}$, $2+m = \frac{1239}{619}$, $3+m = \frac{1859}{619}$ u. ſ. w. und

$$\begin{aligned} Z = 2\pi a^2\,[&0,99677419355 \sin\omega \\ &- 0,00107439886 \sin 3\omega \\ &+ 0,00000156255 \sin 5\omega \\ &- 0,00000000240 \sin 7\omega \\ &+ \text{etc.}] \end{aligned}$$

Für $\omega = 90^0$ erhält man hieraus die halbe Oberfläche des Sphäroids. Die ganze iſt $= 4\pi a^2 \times 0,99785015736$, überſtimmig mit dem, was man nach (32) dafür findet. Dieſe Oberfläche iſt ſo groß, als die einer Kugel vom Halbmeſſer $a \times 0,9989245$.

39. Ein andrer Parallelkreis habe die Breite oder den Abſtand ω' vom Äquator, dem Kreiſe vom Halbmeſſer CB (Fig. 33*), ſo iſt die Zone zwiſchen dieſem Kreiſe und dem in dem Abſtande ω der Unterſchied der Werthe von Z für ω' und ω. Da $\sin\omega' - \sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$ iſt, (Goniometrie, 28.), ſo braucht man in den Formeln für Z (36 und 37) nur zu ſetzen

$2 \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega) . \cos \frac{1}{2}(\omega' + \omega)$ ſtatt $\sin \omega$
$2 \sin \frac{3}{2}(\omega' - \omega) . \cos \frac{3}{2}(\omega' + \omega)$ ſtatt $\sin 3\omega$
$2 \sin \frac{5}{2}(\omega' - \omega) . \cos \frac{5}{2}(\omega' + \omega)$ ſtatt $\sin 5\omega$
u. ſ. w.

40. Pasquich hat der Reihe für eine ſphäroidiſche Zone eine andere Geſtalt gegeben (Mon. Correſp. B. I. S. 439 vergl. B. IX. S. 304), indem er ſie nach den Potenzen von $\sin \omega$ oder u fortſchreiten läßt. Da nämlich (Integralformel, 21.)

$$\int \frac{\partial u}{a^2 - e^2 u^2} = \frac{1}{2ae} \log \frac{a + eu}{a - eu}$$

ſo wird in (37)

$$Z = \pi a^2 b^2 \left(\frac{u}{a^2 - e^2 u^2} + \frac{1}{2ae} \log \frac{a + eu}{a - eu} \right).$$

Entwickelt man hier das erſte Glied des Binomium durch die Diviſion, das andere nach der Formel, Logarithmus, 57, wobey man $e^2 a^2$ ſtatt e^2 ſetze, ſo daß e^2 nun die Excentricität der erzeugenden Ellipſe und $b^2 = a^2(1 - e^2)$ iſt, ſo wird

$$Z = 2\pi a^2 (1 - e^2) [u + \tfrac{2}{3} e^2 u^3 + \tfrac{3}{5} e^4 u^5 + \tfrac{4}{7} e^6 u^7 + \text{etc.}].$$

Es iſt klar, daß dieſe Formel weniger geſchmeidig iſt, als die in (37) und eine minder leichte Rechnung gewährt.

41. Wird die Zone zwiſchen dem Äquator und einem Parallelkreiſe eines länglichten Sphäroids verlangt, ſo darf man nur in den Formeln des 36 und 37 Abſatzes a mit b vertauſchen und ſtatt ω ſetzen $90° - \omega$. Denn es iſt der Winkel MON unter welchem die Normale MN die kleinere Axe, den Halbmeſſer des Äquators des länglichten Sphäroids, ſchneidet, das Complement des Winkels CNO oder MNB, unter welchem ſie die größere Axe ſchneidet. Soll alſo MON ω heißen, ſo iſt der vorige Winkel ω jetzt $90° - \omega$. Und da n und m

durch gegenſeitige Vertauſchung von a und b Werthe erhalten, welche ihren vorigen entgegengeſetzt ſind, ſo muß man, wenn n oder m ihre vorigen poſitiven Werthe behalten ſollen, n und m in den Formeln für Z (36. und 37.) negativ ſetzen. Dadurch wird

$$Z = 2\pi b^2 \Big[\Big(1 + n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{8}n^4 + \text{etc.}\Big)\cos\omega$$

$$- \Big(\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{6}n^4 + \text{etc.}\Big)\cos 3\omega$$

$$+ \Big(\frac{3}{20}n^2 + \frac{1}{10}n^3 + \frac{1}{10}n^4 + \text{etc.}\Big)\cos 5\omega$$

$$- \Big(\frac{1}{14}n^3 + \frac{5}{112}n^4 + \text{etc.}\Big)\cos 7\omega$$

$$+ \Big(\frac{5}{144}n^4 + \text{etc.}\Big)\cos 9\omega$$

$$- \text{etc.}\Big].$$

$$= 2\pi b^2 \Big(\frac{1+m}{1-m}\Big)\Big[\cos\omega - \frac{1}{3}m(2-m)\cos 3\omega$$

$$+ \frac{1}{5}m^2(2-2m)\cos 5\omega - \frac{1}{7}m^3(4-3m)\cos 7\omega$$

$$+ \text{etc.}\Big]$$

wo $2\pi b^2 \Big(\frac{1+m}{1-m}\Big) = 2\pi ab$ iſt.

42. Huygens hat ſchon die Flächen des länglichten und gedruckten Sphäroids gefunden, und zwar, wie er ſelbſt, Horolog. oscillator. Prop. IX. berichtet, im Jahre 1658. Wallis machte nachher, nämlich im Jahre 1659, die Beweiſe zu den von Huygens gefun-

denen und von demſelben ihm mitgetheilten Sätzen bekannt, in einem Briefe an Huygens, welcher ſeinem Tractat von der Cycloide angehängt iſt. Wallisii Opp. Tom. I. pag. 558 et 559.

Loxodromiſche Linie auf einem Sphäroid.

43. Es ſtelle Fig. 34. einen Sector auf der Oberfläche eines gedruckten Sphäroids vor; A ſey der eine Pol; CB ein Bogen des Äquators, oder des von der großen Axe beſchriebenen Kreiſes; AMB und AND zwey elliptiſche Quadranten; CMm eine auf der Oberfläche gezogene Curve, welche alle elliptiſche Meridiane, wie wir die durch A laufenden Ellipſen kurz nennen wollen, unter demſelben Winkel ſchneidet. Es iſt eine Gleichung für dieſe Curve zu finden, und zwar eine zwiſchen dem Winkel, welchen der Meridian AMB mit einem gegebenen AC macht und dem Winkel der durch einen Punct M gehenden Normale mit dem Äquator, das iſt, der geographiſchen Breite des Punctes M.

44. Die halbe größere Axe der beſchreibenden Ellipſe ſey $= a$; die halbe kleinere $= b$; der Winkel der Normale in M mit der Ebene des Äquators $= \omega$; der Winkel der beiden Meridiane oder der Quadranten AC, AB ſey $= \varphi$, der Winkel, unter welchem die Curve jeden Meridian ſchneidet, oder CMB $= \alpha$; der elliptiſche Bogen BM $= s$. Man lege durch M eine mit dem Äquator parallele Ebene, welche die Fläche des Sectors ABD zwiſchen den beiden Quadranten AB, AD in MN ſchneidet. Dieſer Bogen MN iſt ein Kreisbogen, welchen der Punct M bey der Drehung der Ellipſe beſchreibt. Der Halbmeſſer dieſes Bogens iſt die auf die Drehungsaxe ſenkrechte zu M gehörige Ordinate, wie QM in Fig. 33*, daher DN $=$ BM iſt. Die Curve ſchneide den Quadranten AD in m, ſo iſt Nm die zu der Veränderung des Winkels ω gehörige Veränderung des Bogens

BM oder DN. Die Ordinate zu dem Puncte M ſey $= y$, ſo iſt $MN = y\Delta\varphi$, und $y\partial\varphi = \tang\alpha . \partial s$.

Nun iſt y was x in (35) war, alſo

$$= \frac{a^2 \cos\omega}{\sqrt{(a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2)}}$$

oder $y = \frac{a^2 \cos\omega}{\sqrt{(a^2 - (a^2 - b^2)\sin\omega^2)}}$,

oder, wenn $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ geſetzt wird,

$$y = \frac{a \cos\omega}{\sqrt{(1 - e^2 \sin\omega^2)}}.$$ Ferner iſt

$$\partial s = \frac{a(1 - e^2)\partial \sin\omega}{\cos\omega (1 - e^2 \sin\omega^2)^{3:2}}$$ (Rectification, 20.).

Dadurch iſt

$$\partial\varphi = \tang\alpha \frac{(1 - e^2)\partial\sin\omega}{\cos\omega^2 (1 - e^2 \sin\omega^2)}.$$

Man ſetze zur Abkürzung $\sin\omega = z$, ſo iſt

$$\partial\varphi = \tang\alpha . \frac{(1 - e^2)\partial z}{(1 - z^2)(1 - e^2 z^2)}.$$

Dieſe gebrochne Function werde in zwey, mit den Nennern $1 - z^2$ und $1 - e^2 z^2$ zerlegt (Function, 20), ſo iſt

$$\partial\varphi = \tang\alpha \left(\frac{\partial z}{1 - z^2} - \frac{e^2 \partial z}{1 - e^2 z^2} \right),$$

und daraus (Integralformel, 12)

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\tang\alpha \left(\log\frac{1 + z}{1 - z} - e \log\frac{1 + ez}{1 - ez} \right) + C,$$

das iſt

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\tang\alpha \left(\log\frac{1 + \sin\omega}{1 - \sin\omega} - e\log\frac{1 + e\sin\omega}{1 - e\sin\omega} \right) + C.$$

Die Conſtante iſt Null, wenn man die loxodromiſche Linie im Äquator bey C anfangen läßt.

45. Es iſt $\frac{1 + \sin\omega}{1 - \sin\omega} = \tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)^2$,

und $\log\frac{1 + e\sin\omega}{1 - e\sin\omega} = 2\left(e\sin\omega + \frac{1}{3}e^3\sin\omega^3 + \frac{1}{5}e^5\sin\omega^5 + \text{etc.}\right)$ nach Logarithmus (57.), alſo

$$\varphi = \tang\alpha\log.\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)$$

$$-\tang\alpha\left(e^2\sin\omega + \frac{1}{3}e^4\sin\omega^3 + \frac{1}{5}e^6\sin\omega + \text{etc.}\right).$$

46. Für die Kugel iſt $e = 0$, und

$\varphi = \tang\alpha.\log.\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)$, wie in dem Artikel, krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 17. gefunden iſt. Der zweyte Theil von φ giebt daher die Abweichung dieſes Winkels von dem an, der auf der Kugel gefunden werden würde.

47. Die Länge der loxodromiſchen Linie hängt von der Rectification der Ellipſe ab. Das Differential jener iſt $\frac{\partial s}{\cos\alpha}$.

48. Die loxodromiſche Linie auf einem Sphäroid haben unterſucht: Murdoch, der dazu Tafeln berechnet hat; Walz in den Actis Erud. Maj. 1741; Maupertuis in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1744. Caluſo in den Mém. de Turin. pour 1788. 89. Vol. IV.

49. Wie an einem durch Umdrehung entſtandenen Sphäroid der Halbmeſſer der Krümmung

an jedem Puncte eines Schnittes gefunden wird, iſt in dem Artikel, Krümmungskreis, 85. angegeben, daſ. 89. auch, wie der größte und kleinſte Krümmungshalbmeſſer in einem Puncte beſtimmt wird.

Die kürzeſte Linie auf einem Sphäroid zu finden, wird in dem Artikel, Variationsrechnung, gezeigt.

Spheniſche Zahl iſt ein Product aus drey ungleichen Zahl, eine veralterte Benennung. Das griechiſche Wort σφην bedeutet einen Keil.

Spinnenlinie iſt eine aus geraden und krummen Linien zuſammengeſetzte Linie, die einige Ähnlichkeit mit einem Spinnengewebe hat. Albrecht Dürer zeigt ihre Conſtruction in ſeiner Unterweiſung der Meſſung mit dem Zirkel und Richtſcheid; auch Schwenter in ſeiner Geometrie. Sie iſt ganz entbehrlich, und iſt dazu keine echt geometriſche Linie.

Spirale (Spiralis, Helix, Schneckenlinie) iſt eine krumme Linie, welche in einer Ebene unendlich viele, ſich immer vergrößernde Umläufe um einen feſten Punct macht, es ſey daß ſie in dieſem ihren Anfang nimmt, oder dieſem ſich in unendlich vielen, ſich immer verengernden, Umläufen immer mehr nähert.

Spiralen können auch auf einer Kegelfläche oder der Fläche eines Konoids beſchrieben werden, wo der Scheitelpunct der fixe Punct iſt. Auch auf Kugelflächen und Sphäroiden laſſen ſich Spiralen ziehen, wo aber der Abſtand von dem Pole des Körpers oder von deſſen Mittelpuncte beſchränkt iſt.

Man beſchreibe mit einem willkürlichen Halbmeſſer einen Kreis, und nehme auf dieſem von einem Puncte aus Bogen, welche auch den ganzen Umfang unbeſtimmt oft enthalten mögen, als Abſciſſen für eine krumme Linie an. Auf die durch den andern, veränderlichen Endpunct aus dem Mittelpuncte gezogenen ge-

raden trage man die nach irgend einem Geſetze aus jenen beſtimmten Ordinaten, ſo wird die Beſchaffenheit der Spirale durch die Gleichung zwiſchen dieſen Coordinaten dargeſtellt, auf dieſelbe Art wie für geradlinige Abſciſſen und die darauf unter einem gewiſſen Winkel geſetzten Ordinaten. Solchergeſtalt laſſen ſich alle analytiſche Linien, welche aus Gleichungen zwiſchen geradlinigen Coordinaten verzeichnet werden, umbilden, wodurch bisweilen ſonderbare Geſtalten entſtehen mögen. Allein für Spiralen iſt die Einſchränkung zu machen, daß zu jeder Abſciſſe nur eine einzige Ordinate gehöre, mit der nähern Beſtimmung, daß für unendlich große Abſciſſen eine mögliche Ordinate, ſey ſie auch unendlich klein, Statt habe. Daher haben die Gleichungen für Spiralen die Form, $ax = by$, oder $a^2 x = by^2$, und allgemeiner, $ax^m = by^n$, wo a und b gegebene Größen von den gehörigen Dimenſionen bedeuten; ferner $aa = xy$; und die beſonders merkwürdige, $e^x a = y$.

Man kann auch die Ordinaten von dem Kreisumfange aus, es ſey von dem Mittelpuncte ab hinauswärts, oder nach demſelben hinwärts nehmen. Doch iſt das erſtere Verfahren bey weitem das gewöhnlichſte.

Anſtatt der Kreisbogen werden in der folgenden Abhandlung die zugehörigen Winkel, das iſt, die Quotienten des Bogens durch den Halbmeſſer, gebraucht werden, oder, wenn die Linien als Zahlen in Beziehung auf eine Einheit gedacht werden, der zur Abſciſſenlinie genommene Kreis hat znm Halbmeſſer die Einheit. — Übrigens verdient dieſe Gattung von krummen Linien, wegen ihrer Eigenſchaften und der Anwendungen der Analyſis, eine etwas ausführliche Behandlung.

Die archimediſche Spirale.

1. Die einfachſte Spirale wird auf folgende Art gezeichnet. Es iſt APBQA (Fig. 35.) ein

Kreis mit dem Halbmeſſer CA beſchrieben. Indem dieſer um den unbewegten Mittelpunct C herum=geführt wird, bewege ſich auf demſelben ein Punct von C aus nach dem Umfange hin, ſo daß die beſchriebenen Wege immer den von dem Halbmeſſer beſchriebenen Winkeln proportional ſeyn, und daß derſelbe in die Peripherie in A treffe, wenn der Halb=meſſer CA ſeinen ganzen Umlauf vollendet hat. Um alſo einen Punct dieſer Spirale, M, auf dem Halbmeſſer CP anzugeben, ſuche man die vierte Proportionale zu dem Umfange, dem Bogen AP, und dem Halbmeſſer CP.

Nach dem erſten Umlaufe muß der Halbmeſſer im=mer mehrere machen, indem der die Spirale beſchreibende Punct auf jenem, ſo wie bey dem erſten Umlaufe, fort=rückt, daß die Wege den beſchriebenen Winkeln pro=portional ſind. So iſt AND der zweyte Umlauf nach dem erſten CMA, und ein Punct N deſſelben wird ge=funden, wenn man zu dem Kreisumfange, der Summe des Umfanges und des Bogens AP, und zu AC die vierte Proportionale CN ſucht, welche auf dem ver=längerten Halbmeſſer CP des Kreiſes APBA nach N hin getragen wird.

Conon, ein Zeitgenoſſe des Archimedes, der ihn ſehr rühmt, hat dieſe Spirale erdacht, allein Archi=medes hat ihre Eigenſchaften erforſcht. Seine Schrift über dieſe Curve gehört unter die ſcharfſinnigſten des Alterthums. Er quadrirte den Flächenraum zwiſchen zwey Radius der Spirale. Er hat gezeigt, wie groß die Subtangente an derſelben iſt, das iſt diejenige Länge, welche auf der, in dem Anfangspuncte der Spi=rale auf dem Radius Vector ſenkrecht gezogenen, von der berührenden abgeſchnitten wird. Dieſes Letztere be=ſonders erregte die Bewunderung der Geometer vor der Erfindung der neuen Analyſis. Bouillaud (Bulli-aldus), der ſelbſt über die Spirallinien eine Schrift (Paris, 1658) herausgegeben hat, geſteht in der Vor=rede, daß er mit aller Anſtrengung den Beweis des

Archimedes von dem Verhältniſſe der Subtangente zu dem Kreisumfange nicht völlig gefaßt habe, und unbefriedigt geblieben ſey. In der That ſcheint dabey eine Schwierigkeit zu ſeyn, da Archimedes ein paarmahl etwas als möglich annimmt, wo er, wie es ſonſt gewöhnlich iſt, hätte zeigen ſollen, wie die gegebene Linie zwiſchen dem Kreiſe und einer geraden zu legen iſt. Von Bouillaud ſagt Montúcla, daß ſeine Beweiſe, die einfacher ſeyn ſollten als die von Archimedes gegebenen, ſehr verworren und ſchwerer als dieſe ſind. (Histoire des Mathématiques. T. I. p. 226.). Die Analyſis der Neuern beſtimmt an der Spirale alles ſehr leicht.

Die Alten gebrauchten dieſe Spirale als ein geometriſches Mittel, einen Winkel oder Kreisbogen nach einem gegebenen Verhältniſſe einzutheilen. Pappus in Collect. mathem. L. IV. prop. 35. Da die Spirale nicht durch eine zuſammenhangende Bewegung beſchrieben werden kann, ſondern nur durch eine Folge einzelner Puncte angegeben wird, ſo iſt dieſe Auflöſung unvollkommen, nur eine praktiſche.

2. Es ſey der Radius des angenommenen Kreiſes AC $= a$; der Radius der Spirale CM $= y$; der beſchriebene Winkel ACM $= \varphi$, und vier Rechte $= 2\pi$, wo 2π und φ auch als der Kreisumfang und ein Kreisbogen für einen Halbmeſſer $= 1$ angeſehen werden können. Es iſt nun $a : y = 2\pi : \varphi$, und die Gleichung für die archimediſche Spirale, $a\varphi = 2\pi y$. Der Winkel φ kann vier Rechte oder 2π unbeſtimmt oft enthalten.

3. Mit jedem Umlaufe nimmt der Radius Vector, wenn er wieder in dieſelbe Lage gekommen iſt, um die Länge a zu. Denn es ſeyn y und y′ zwey Radii, von welchen y′ einen Umlauf mehr gemacht hat, als y, ſo iſt $a\varphi = 2\pi y$ und $a(2\pi + \varphi) = 2\pi y'$, alſo $2\pi a = 2\pi(y' - y)$, das iſt, $a = y' - y$.

4. Die Gleichung für dieſe Spirale iſt dieſelbe wie für die gerade Linie, $ax = y$, (Liniegerade, 13.), wenn bey dieſer die Abſciſſen von ihrem Durchſchnitte mit der Abſciſſenlinie an genommen werden. In jener ſind die Kreisbogen $a\varphi$ und der Quotient $\frac{1}{2\pi}$, was die Abſciſſen x und der Coefficient a in dieſer. — So wie die Coordinaten, x, y, auch negativ genommen werden, für den Theil der geraden Linie, der auf der entgegengeſetzten Seite der Abſciſſenlinie liegt, ſo muß auch bey der Spirale der Winkel φ negativ, d. i. in der Richtung von A nach Q hin, genommen werden, wodurch der Radius y negativ wird, oder eine der für poſitive y entgegengeſetzte Lage erhält, und von C aus, in einer umgekehrten Lage, dieſelbe Spirale entſteht. Dieſe Hälfte der vollſtändigen Spirale ſcheint man nicht beachtet zu haben. Keine krumme Linie hat einen beſtimmten Punct, bey dem ſie ſich anfinge oder endigte.

5. Es wachſe y um das Stück Δy, und der zugehörige Winkel φ um $\Delta\varphi$, ſo iſt $y\Delta\varphi = \varphi\Delta y$. Aus den Gleichungen für die Spirale, $a\varphi = 2\pi y$, und $a(\varphi + \Delta\varphi) = 2\pi(y + \Delta y)$, folgt $a\Delta\varphi = 2\pi\Delta y$, und durch Diviſion der Glieder dieſer und der erſten, $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta y}{y}$, das iſt $y\Delta\varphi = \varphi\Delta y$.

6. Auf dieſelbe Art wird die Differentialgleichung für die Spirale erhalten, nämlich $y\partial\varphi = \varphi\partial y$. Dieſe kommt mit der Gleichung für die endlichen Differenzen der Coordinaten gänzlich überein. Es iſt auch $a\partial\varphi = 2\pi\partial y$.

7. In M ſey MT die berührende, welche die in dem Anfangspuncte der Spirale C auf den Radius CM ſenkrechte CT in T ſchneidet; es iſt tang CMT $= \varphi$, und die Subtangente CT $= \varphi y$, dem mit

CM als Radius innerhalb des Winkels ACM beſchriebenen Kreisbogen. — Denn es iſt tang CMT $= \frac{y\partial\varphi}{\partial y}$ (berührende Linie, 27.), das iſt, aus (5), tang CMT $= \varphi$. Die trigonometriſchen Linien beziehen ſich, als bloße Zahlen, auf die Einheit als Halbmeſſer, wie die Kreisbogen. Die Länge CT ſelbſt iſt $= \varphi y$, wo y ein linearischer Radius in der Spirale iſt.

8. Auch iſt CT $= \frac{2\pi yy}{a}$.

9. Nach dem erſten Umlaufe in A iſt die Subtangente $= 1 . 2\pi a$; nach dem zweyten in D $= 4 . 2\pi a$; nach dem dritten $= 9 . 2\pi a$; nach dem vierten $= 16 . 2\pi a$, u. ſ. w.

10. Die Fläche eines ſpiraliſchen Sectors LCN, zwiſchen den Radiis z und y, (Fig. 35.), iſt $= \frac{1}{3} . \frac{\pi}{a} (y^3 - z^3)$.

Der Sector LCN ſey $= Z$, und CL $= z$; CN $= y$. Es iſt, (Quadratur, 11.), an einer Curve, welche durch Ordinaten oder Radios y aus einem Puncte, und die Winkel φ derſelben mit einer gegebenen Ordinate, beſtimmt wird, das Differential eines Sectors $= \frac{1}{2} yy\partial\varphi$. Da in der Spirale, wenn φ größer als vier Rechte wird, die innern Sectoren in den folgenden Umläufen wiederholt werden, ſo müſſen wir die Winkel der beiden Radiorum kleiner als vier Rechte nehmen, oder ihn $\varphi - \omega$ ſetzen, wo ω der zu einem gegebenen, doch willkürlichen, Radius z gehörige Winkel in der Spirale iſt, ſo daß $a\omega = 2\pi z$ iſt, wie $a\varphi = 2\pi y$. Übrigens mögen φ und ω gegen vier Rechte jedes Verhältniß haben. — In der Differentialgleichung, $\partial Z = \frac{1}{2} yy\partial\varphi$, ſetze man nun

für $\partial\varphi$ deſſen Werth, $\frac{2\pi}{a}\partial y$, ſo iſt $\partial Z = \frac{\pi yy\partial y}{a}$.

Daraus iſt $Z = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi y^3}{a} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a}(y^3 - z^3)$, welches mit $y = z$ anfängt, wie angenommen wird.

11. Da $y^3 - z^3 = (y - z)(y^2 + yz + z^2)$ iſt, ſo iſt

$$Z = \tfrac{1}{6}(\varphi - \omega)(y^2 + yz + z^2)$$
$$= \tfrac{1}{6}(\varphi - \omega)(3yz + (y - z)^2).$$

12. Der Kreisſector mit dem Halbmeſſer y innerhalb des Winkels $\varphi - \omega$ beſchrieben, iſt $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega)y^2$. Der ſpiraliſche Sector verhält ſich zu dieſem Kreisſector wie $yz + \frac{1}{3}(y - z)^2 : y^2$. Archimedes im 26. Satze.

13. Man ſetze $\omega = 0$, ſo wie $z = 0$, und nehme φ kleiner als vier Rechte, ſo iſt in dem erſten Umlaufe die ſpiraliſche Fläche $= \frac{1}{6}\varphi y^2 =$ dem dritten Theile des Kreisſectors mit dem Radius y für den Winkel φ.

14. Die Fläche des erſten Umlaufes iſt $= \frac{1}{6} \cdot 2\pi aa = \frac{1}{3}\pi aa$, das iſt dem dritten Theile des mit dem Halbmeſſer a beſchriebenen Kreiſes. Archimedes im 24. Satze.

15. Durch die nach dem erſten Umlaufe des Radius folgenden Umläufe entſtehen ringförmige Flächen. Ein Sector eines ſolchen Ringes zwiſchen zwey nächſten Umläufen, wie KLMN in dem erſten, iſt $= \pi(y - z)(y + z - a)$, wo y und z die aus dem Mittelpuncte durch die Endpuncte des Sectors gezogenen Radii, CN, CL, ſind.

Den es iſt der Sector LCN $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a}(y^3 - z^3)$ (10). Eben ſo iſt der Sector KLM in dem nächſt vorher-

gehenden Umlaufe $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a}\left((y-a)^3 - (z-a^3)\right)$ da hier die Radii von jenen um a unterſchieden ſind (2). Der Unterſchied beider Sectoren iſt der Sector des Ringes $= \pi(y^2 - z^2 - ay + az) = \pi(y-z)(y+z-a)$.

16. Die Ringfläche gehöre zu dem nten Umlaufe, und es ſey $z = (n-1)a$, oder der Sector fange mit dem Umlaufe an, ſo iſt der Sector des Ringes $= \pi(y(y-a) - (n-1)(n-2)aa)$.

17. Die Fläche des ganzen Ringes, zwiſchen dem $(n-1)$ten und nten Umlaufe, und den beiden geraden a, zwiſchen den Endpuncten des $(n-1)$ten und nten Umlaufes, iſt $= 2(n-1)\pi aa$. Für den erſten Ring iſt $n=2$. Archimedes, 27. Satz.

18. Die ganze ſpiraliſche Fläche, welche die bey dem erſten Umlaufe beſchriebene ($\frac{1}{3}\pi aa$), und $(n-1)$ Ringe enthält, iſt $= \frac{1}{3}\pi aa + 2\pi aa + 4\pi aa + \ldots + 2(n-1)\pi aa = \frac{1}{3}\pi aa + (n-1)n\pi aa$.

19. In der Formel (10) für einen jeden ſpiraliſchen Sector LCN $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a}(y^3 - z^3)$, ſetze man $y = na$, und $z = (n-1)a$, ſo erhält man die Fläche zwiſchen dem nten Umlaufe und der geraden a zwiſchen den Endpuncten dieſes Umlaufes $= (nn - n + \frac{1}{3})\pi aa$, wie in (18). Dieſe begreift nämlich die Fläche des erſten Umlaufs nebſt $(n-1)$ Ringen. Archimedes, 25. Satz.

20. Es ſey LCN (Fig. 35.) ein Sector der Spirale in irgend einem Umlaufe, mit einem Winkel unter vier Rechten am Mittelpuncte. Die Radii CN, CL ſeyn y, z; die zugehörigen Winkel φ, ω. Die Fläche des Sectors iſt $= \frac{1}{6}(\varphi - \omega)(yy + yz + zz)$, vermöge (11).

Ein

Ein Kreisſector mit dem Radius y innerhalb des Winkels $\varphi - \omega$ beſchrieben iſt $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega)y^2$; mit dem Radius z iſt der Kreisſector $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega)z^2$. Die Unterſchiede dieſer Kreisſectoren von dem ſpiraliſchen verhalten ſich wie $2y + z : y + 2z$, weil ihre Werthe den gemeinſchaftlichen Factor $y - z$ haben, oder wie $z + \frac{2}{3}(y-z) : z + \frac{1}{3}(y-z)$. Auf die letzte Art giebt Archimedes das Verhältniß an, im 28. Satze.

21. Die Rectification der archimediſchen Spirale wird durch dieſelbe Formel bewerkſtelligt, wie für die Parabel. Die Gleichung für jene iſt $a\varphi = 2\pi y$; ihre Differentialgleichung iſt $a\partial\varphi = 2\pi\partial y$. Der Bogen der Spirale, von dem Mittelpuncte an, ſey $= s$, ſo iſt $\partial s = \sqrt{(y^2\partial\varphi^2 + \partial y^2)}$, (Rectification, 5[b].), das iſt hier $\partial s = \partial y \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 y^2}{a^2} + 1\right)}$, oder auch $\partial s = \frac{a\partial\varphi}{2\pi}\sqrt{(\varphi^2 + 1)}$. Der Parameter einer Parabel ſey $= p$, ihre Gleichung, $px = yy$, der zu den Coordinaten gehörige Bogen vom Scheitel an $= s$, ſo iſt $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial y \sqrt{\left(\frac{4yy}{pp} + 1\right)}$. Man nehme $p = \frac{a}{\pi}$, d. i. der vierten Proportionale zu dem halben Umfange eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer und zu a, ſo iſt der paraboliſche Bogen dem ſpiraliſchen gleich, wenn die Ordinaten y an beiden Linien gleich ſind.

Eine zweyte Differentialformel für die Parabel iſt, $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{p}{4x}\right)}$, für die Spirale, $\partial s = \frac{a\varphi\,\partial\varphi}{2\pi}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right)}$. Setzt man $\varphi^2 = \frac{4x}{p}$, ſo iſt

$\varphi\partial\varphi = \frac{2\partial x}{p}$, und $\frac{a\varphi\partial\varphi}{2\pi} = \frac{a}{\pi}.\frac{\partial z}{p}$. Nimmt man $p = \frac{a}{\pi}$, wie vorher, ſo wird der ſpiraliſche Bogen dem paraboliſchen gleich. — Die Integrale beider Formeln ſind in dem Artikel, Rectification, 31. 32. angegeben.

Fermats Spirale.

22. Anſtatt die Radios der Spirale den beſchriebenen Winkeln proportional zu nehmen, kann man ſie auch wie Potenzen oder Wurzeln der den Winkeln gleichmäßigen Zahlen ſich verhalten laſſen. Fermat hat eine ſolche betrachtet, worin die Winkel ſich wie die Quadrate der Radiorum verhalten. Ihre Gleichung iſt, $a^2\varphi = 2\pi y^2$. Die Differentialgleichung iſt, $a^2\partial\varphi = 4\pi y\partial y$.

23. Die Quadrate der Radiorum nehmen gleichförmig zu, wenn die Winkel gleichförmig wachſen, die Radii ſelbſt immer weniger. Z. B. wenn die Werthe von y^2 ſind 10; 20; 30; 40; 50, u. ſ. f. ſo ſind die von y folgende: 3, 16..; 4, 27..; 5, 477..; 6, 32..; 7, 07.. Die ſpiraliſchen Ringe verengern ſich immer mehr. Mit jedem Umlaufe, in jeder Lage, nimmt das Quadrat des Radius um aa zu.

24. Die innerſte von dem Mittelpuncte aus, in dem erſten Umlaufe, beſchriebene muſchelförmige Fläche iſt $= \frac{1}{2}\pi aa$, halb ſo groß als die Kreisfläche mit dem Halbmeſſer a.

Denn es ſey ein unbeſtimmter Sector $= Z$, ſo iſt $\partial Z = \frac{1}{2}yy\partial\varphi = \frac{aa}{4\pi}\varphi\partial\varphi$, und $Z = \frac{aa}{8\pi}\varphi^2 = \frac{1}{4}\varphi y^2$, wenn die Area im Mittelpuncte anfängt. Für den erſten Umlauf iſt $\varphi = 2\pi$, und die Area $= \frac{1}{2}\pi aa$.

25. Der Sector einer ringförmigen Fläche zwiſchen den Bogen zweyer nächſten Umläufe, innerhalb des Centriwinkels $\varphi - \omega$, iſt $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega)aa$, ſo groß als ein Kreisſector mit dem Radius a für denſelben Winkel $\varphi - \omega$.

Ein ſolcher Sector iſt der Unterſchied zweyer Sectoren der Spirale, Z, Z′, deren begränzende Radii zu den Winkeln φ und ω in dem größern Sector, und zu den Winkeln $\varphi - 2\pi$ und $\omega - 2\pi$ in dem kleinern oder dem innern gehören, wie KLNM in Fig. 35. von den Sectoren LCN, KCM. Es iſt $\partial Z = \frac{aa}{4\pi}\varphi\partial\varphi$ (wie in 24.), daraus $Z = \frac{aa}{8\pi}(\varphi^2 - \omega^2)$, da der Sector für den Winkel ω anfängt. Eben ſo iſt

$$Z' = \frac{aa}{8\pi}(\varphi^2 - 2\pi)^2 - \frac{aa}{8\pi}(\omega - 2\pi)^2 =$$

$\frac{aa}{8\pi}(\varphi^2 - \omega^2 - 4\pi\varphi + 4\pi\omega)$. Folglich $Z - Z' = \frac{1}{2}aa(\varphi - \omega)$.

Oder: Es iſt $\partial Z = \frac{aa}{4\pi}\varphi\partial\varphi$, und $\partial Z' = \frac{aa}{4\pi}(\varphi - 2\pi)\partial\varphi$. Der Unterſchied beider Differentiale, nämlich $\frac{aa}{4\pi}.\,2\pi\partial\varphi$, iſt das Differential des Sectors der ringförmigen Fläche, welcher alſo iſt $\frac{1}{2}\varphi aa$ — Const. $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega)aa$, da der Sector mit dem Winkel ω anfängt.

Auch iſt der Sector eines Ringes $= \pi(yy - zz)$, wenn y und z die Radii der Spirale zu den Winkeln φ und ω ſind.

Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleich große Sectoren der Ringe, in allen Ringen ſo groß als ein Kreisſector zu demſelben Winkel mit dem Radius a. Man erinnere ſich, daß φ und ω Kreisbogen bedeuten,

deren Halbmeſſer die Einheit iſt, daher $a\varphi$ und $a\omega$ Kreisbogen mit dem Halbmeſſer a.

26. Die Fläche eines jeden ganzen Ringes dieſer Spirale iſt $= \pi aa$. Denn für einen ganzen Ring iſt $\varphi - \omega = 2\pi$. Eine ſolche Ringfläche iſt ſo groß als die Fläche eines mit dem Halbmeſſer a beſchriebenen Kreiſes.

27. Die Flächenräume dieſer Spirale zwiſchen den nächſten Umläufen, von dem Radius a an, nehmen gleichförmig zu, wenn die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte gleichförmig zunehmen. Dieſes wird durch die (23) bemerkte Verengerung der Ringe begreiflich.

Vergleichung der archimediſchen Spirale mit der Parabel.

28. Zwey gerade Linien Aa, Bb (Fig. 36.) ſind der Lage nach gegeben, ihr Durchſchnitt iſt C. Parallel mit Bb werde eine gerade Mm von A aus bewegt, da zugleich eine andere gerade An von AC aus um den Punct A gedreht wird. Jene ſey in Mm, wenn dieſe in An iſt. Das Verhältniß der von jener auf AC und der von dieſer auf CB beſchriebenen Wege, AL : CN, ſey ein gegebenes, AC : CD. Der Ort des Durchſchnittspunctes beider, P, iſt eine Parabel.

Denn es iſt, zufolge der Annahme, AL : CN = AC : CD, oder AL : AC = CN : CD, und wegen der ſich parallelen, ML, BC, iſt AL : AC = LP : CN; alſo durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe, $AL^2 : AC^2 = LP : CD$. Die Längen LP verhalten ſich alſo wie die Quadrate der zugehörigen AL. Dieſes iſt eine Eigenſchaft der Parabel, an welcher Bb die Axe oder derſelben parallel iſt, und AC die in A berührende (Parabel, 25.). Der Punct D gehört zu der Parabel, da LP der CD gleich iſt, wenn AL der AC gleich genommen wird.

Die Längen (oder Abſciſſen) AL ſind auch negativ (in einer entgegengeſetzten Richtung) zu nehmen, wobey die Längen (oder Ordinaten) LP poſitiv bleiben, oder ihre Richtung (herabwärts) behalten.

Dieſe Erzeugung der Parabel iſt der Entſtehungsart der Archimediſchen Spirale ähnlich. Anſtatt des Kreiſes iſt hier eine gerade Linie Bb, und ſtatt des Punctes, der dort auf der ſich drehenden geraden fortrückt, hier eine gerade Linie, die ſich einer gegebenen parallel bewegt. Das Verhältniß der gleichzeitigen Bewegungen iſt beiderſeits ein gegebenes. An der Parabel iſt die Drehung ungleichförmig, für die Spirale gleichförmig.

Sollte das Verhältniß AP : CN ein gegebenes ſeyn, ſo wäre der Ort des Punctes P eine Linie vom vierten Grade.

29. Ein paraboliſches Segment APA (Fig. 36.) verhält ſich wie der Cubus der zu P gehörigen Abſciſſe AL, auf der in A berührenden AC.

Es ſey BD die Axe und AB darauf ſenkrecht. Die in A berührende AC ſchneidet auf der Bb ein Stück $BC = 2BD$ ab. Man ſetze $BD = a$; $AB = b$; $AC = c$; $AL = t$; $LP = u$. Die Natur der Parabel giebt $a : u = c^2 : t^2$, oder die Gleichung $at^2 = c^2u$. Der paraboliſche Flächenraum ALP ſey Z, ſo iſt $\partial Z = u\partial t . \sin C$ da hier die Coordinaten den Winkel C mit einander machen. (Quadratur. 10.). In dieſer Formel ſetze man für u ſeinen Werth durch t, ſo

wird $\partial Z = \frac{a \sin C}{c^2} t^2 \partial t$, und daraus $Z = \frac{a \sin C}{3c^2} t^3$.

Das geradlinige Dreyeck ALP iſt $= \frac{1}{2} tu . \sin C$, da die Höhe deſſelben $= LP . \sin C$ iſt, wenn AL zur Grundlinie genommen wird, d. i. es iſt $\triangle ALP =$

$\frac{a \sin C}{2c^2} t^3$. Daher iſt das paraboliſche Segment APA $=$ $\frac{a \sin C}{6c^2} t^3$.

30. Die Ordinate LP verlängert treffe die AB in M, ſo iſt $AM = t \sin C$; auch iſt $AB = b = c \sin C$. Multiplicirt man in dem Werthe des Segments Zähler und Nenner durch $(\sin C)^2$, ſo erhält man durch dieſe Subſtitutionen, $AM = z$ geſetzt, das Segment APA $= \frac{a}{6b^2} z^3$.

31. Eine andere Chorde ſey AS. Die aus S auf die Chorde ABE ſenkrechte SR ſchneide auf derſelben das Stück $AR = y$ ab, ſo iſt das paraboliſche Segment ADSA $= \frac{a}{6b^2} y^3$.

32. Es iſt der paraboliſche Sector PAS $= \frac{a}{6b^2}(y^3 - z^3)$, nämlich als der Unterſchied der beiden Segmente. — Man bemerke, daß $\frac{b^2}{a}$ der Parameter der Parabel iſt.

33. Dieſe Form eines Sectors an der Parabel iſt mit der für einen ſpiraliſchen (10) übereinſtimmig. Der Parameter der Parabel iſt was $\frac{a}{2\pi}$ an der Spirale iſt. Die Abſciſſen AM, AR zu den Endpuncten des paraboliſchen Sectors treten an die Stelle der begränzenden Radiorum in der Spirale.

34. Durch den Scheitelpunct D der Parabel und einen Punct S ziehe man die Chorde DS, und durch S die ſenkrechte SQ auf die Axe, ſo iſt das Seg-

ment über der Chorde $= \frac{a}{6b^2} SQ^3$. Der Parameter der Parabel ſey $p = \frac{b^2}{a}$, ſo iſt $p \times DQ = QS^2$, alſo das Segment $= \frac{1}{6} DQ \times QS = \frac{1}{3} \Delta DQS$.

35. In dem erſten Umlaufe der Spirale, von dem Anfangspuncte bis zu dem Radius y für den Winkel φ iſt die Area $= \frac{1}{6}\varphi yy$. Dieſes ſtimmt mit dem Ausdrucke für das paraboliſche Segment überein, wenn ſtatt des Bogens φy die Abſciſſe DQ, und ſtatt des Radius y die Ordinate QS genommen wird. Das Dreyeck DQS kommt ſtatt des Kreisſectors.

Dieſes und die in (21) bemerkte Übereinſtimmung in den Ausdrücken für die Länge der Bogen der Archimediſchen Spirale und der Parabel werden die wichtigſten Stücke bey ihrer analytiſchen Vergleichung ausmachen.

Gregorius von St. Vincent hat die Analogie zwiſchen beiden Linien umſtändlich ausgeführt in einer beſondern Abhandlung: Spiralis et Parabolae symbolizatio, in dem Opere geometrico, p. 664 — 702. Die Verworrenheit des Vortrags und der Figuren ermüdet bald. Cavaleri gebraucht in ſeiner Geometria indiviſibilium L. VI. die Vergleichung der Parabel mit der Spirale zu den Quadraturen an der letztern. Es wird aber auch dazu nicht wenig Geduld gehören. Gregorius ſcheint zuerſt auf dieſe Vergleichung gekommen zu ſeyn. In der Vorrede zu jener Abhandlung ſagt er, daß er ſie im Jahre 1625 dem P. Grienberger mitgetheilt habe, um ihm dadurch zu zeigen, wie Archimedes auf die ſo ſchwer zu entdeckende Gleichheit der zu dem Endpuncte des erſten Umlaufes gehörigen Subtangente und des Kreisumfanges gekommen ſeyn möge. Sein Ordensgenoſſe fand aber die Entdeckung ſo ſchön, daß er behauptete,

Archimedes würde ſie nicht zurückgehalten haben, wenn er darauf gerathen wäre. Gregorius ſelbſt legt einen großen Werth darauf.

Brendel, ehedem Profeſſor der Medicin in Göttingen, hat 1741 zu ſeinen mathematiſchen Vorleſungen ein Programm geſchrieben: de analogia lineae spiralis et parabolae, welches auch wegen der darin erwieſenen Eigenſchaften der Parabel lehrreich iſt. Einiger Abkürzungen oder Verfeinerungen möchten die Beweiſe inzwiſchen noch bedürfen. Das dritte Theorem iſt für die Parabel unrichtig, da am Ende der mühſamen Vergleichungen eine ſehr übereilte Folgerung gemacht iſt.

Die Übereinſtimmung der ſpiraliſchen Bogen mit den paraboliſchen haben Roberval und Hobbes gefunden. Beide haben ſich die Entdeckung ſtreitig gemacht, wie Wallis erzählt, Opp. T. I. p. 560. Er giebt einen Beweis des Satzes (21), der darauf beruht, daß die Chorden an der Spirale denen an der Parabel unendlich nahe kommen.

Logarithmiſche Spirale.

36. Die Radii einer Curve ſeyn geometriſch proportional, wenn die zugehörigen Winkel, von einen gegebenen Radius an genommen, arithmetiſch proportional ſind, ſo heißt die Curve eine logarithmiſche Spirale. Sie heißt bisweilen Loxodromica plana, ſ. unten (71).

Es ſey nämlich an dieſer Spirale (Fig. 37.) C der Mittelpunct, aus welchem die zunehmenden Radii, CA, CP, CQ, CR, CS, u. ſ. gezogen ſind, unter den ſich gleichen Winkeln, ACP, PCQ, QCR, RCS; u. ſ ſo ſind AC : CP : CQ : CR : CS u. ſ. in geometriſcher Progreſſion, ſo weit man die Reihe der gleichen Winkel, auch nach vollendeten einem oder mehrern Umläufen des Radius um C, fortſetzt. — Die

Reihe der Winkel und der Radiorum kann auch rückwärts genommen werden, wobey die Curve unendlich viele Umläufe um C macht, da die Glieder einer abnehmenden geometriſchen Reihe nicht Null werden können.

37. Es ſey die Anfangsordinate $CA = a$, der Exponent der geometriſchen Progreſſion $= e$, alſo die Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a : e^4a \ldots e^xa \ldots$$

Die arithmetiſche Reihe der zugehörigen Winkel ſey

$$0, \delta, 2\delta, 3\delta, 4\delta \ldots x\delta \ldots$$

Der Radius CM, welcher mit dem Anfangsradius CA den Winkel $x\delta = \varphi$ macht, worin auch mehrere Umläufe enthalten ſeyn mögen, werde durch y bezeichnet, ſo iſt $e^xa = y$, oder $e^x = \frac{y}{a}$. Nun iſt $x \log e = \log \frac{y}{a}$, (Logarithmus, 11.), das iſt, $\frac{\varphi}{\delta} \log e = \log \frac{y}{a}$. Durch die Einſchaltung in den beiden zu einander geordneten Reihen kann φ zu δ jedes Verhältniß bekommen. — Die Logarithmen können aus jedem Syſtem genommen werden, da die Logarithmen derſelben Zahl in verſchiedenen Syſtemen ſich wie die Moduli der Syſteme verhalten. (Logarithmus, 27).

38. Der Radius CB liege mit CA in gerader Linie, und ſey $= b$, ſo iſt $\frac{\pi}{\delta} \log e = \log \frac{b}{a}$. Aus dieſer Gleichung und der vorhergehenden folgt die bequemere Gleichung für die logarithmiſche Spirale,

$$\frac{\varphi}{\pi} = \frac{\log (y : a)}{\log (b : a)}.$$

Zur Abkürzung ſey $\frac{\pi}{\log (b : a)} = m$, ſo iſt $\varphi = m \log (y : a)$. — Man nehme in der Folge zu dem Werthe von m den natürlichen Logarithmen von

(b : a) ſo wie den von (y : a), und jedem andern Verhältniſſe.

Dieſe Form der Gleichung bringt mit ſich, daß die Ordinaten y ſo wie die poſitiven Winkel φ zunehmen, da ein poſitiver Logarithme zu einer Zahl gehört, die größer als die Einheit iſt. Nehmen die Ordinaten ab, wenn die poſitiven Winkel zunehmen, ſo iſt m negativ, und $\varphi = - m \log (y : a) = m \log (a : y)$.

39. Eine logarithmiſche Spirale wird durch den Werth des Factors m, das iſt, das Quotienten $\frac{b}{a}$, beſtimmt.

40. Zu dem Winkel $\varphi + \beta$, wo β ein beſtändiger Winkel iſt, gehöre der Radius z, ſo iſt $\varphi + \beta = m \log (z : a)$. Da $\varphi = m \log (y : a)$ iſt, ſo iſt $\beta = m \log (z : y)$. Es iſt alſo das Verhältniß zweyer Radiorum, die irgend einen gegebenen Winkel mit einander machen, an der logarithmiſchen Spirale ein beſtimmtes. — Solche Radii ſtehen nämlich, in Beziehung auf die arithmetiſche Reihe der Winkel, gleich weit von einander ab, und haben daher gleiches geometriſches Verhältniß.

Daher ſind die Radii, welche in derſelben Richtung liegen, nach ihrer Folge von C an, in geometriſcher Progreſſion. Je zwey nächſte machen einen Winkel von vier Rechten. Ihr Verhältniß iſt das aa : bb, nämlich doppelt ſo groß als das der Linien CA : CB, die einen Winkel von zwey Rechten machen.

Oder, man nehme $\beta = 2\pi$, ſo iſt $2\pi = m \log (z : y)$, das iſt $2 \log (b : a) = \log (z : y)$, oder $\log (bb : aa) = \log (z : y)$, folglich $y : z = aa : bb$. — Wird z an den nächſten innern Umlauf genommen, ſo iſt $y : z = bb : aa$.

41. Aus dem Werthe von φ entſteht die Differentialgleichung, $\partial\varphi = \frac{m \partial y}{y}$, (Differentialformeln, 14).

42. Der Winkel CMT eines Radius CM ($=y$) mit der berührenden MT iſt an der ganzen Curve derſelbe, und die Tangente dieſes Winkels $= m$. Denn da überhaupt die Tangente des Winkels einer berührenden mit der aus einem Mittelpuncte oder Pole einer Curve gezogenen geraden iſt $\frac{y\partial\varphi}{\partial y}$, (berührende Linie, 27.), ſo iſt dieſe hier $= m = \frac{\pi}{\log.\,\text{nat.}\,(b:a)}$. — Dieſer Winkel werde immer durch α bezeichnet, ſo daß $m = \tan \alpha$ ſey.

43. Die Spirale, an welcher der Winkel der berührenden mit dem Radius 45° hält, heißt die natürliche, auch semirectangula. Für dieſe iſt log. nat. (b:a) $= \pi = 3,14159265..$ Dieſer Logarithme mit dem Modulus des Briggiſchen Syſtems $M = 0,43429448..$ multiplicirt, wird der log. Brigg. (b:a) $= 1,3643763..$ und $\frac{b}{a} = 23,14069$. S. Logarithmus, 36.

44. Alle Sectoren einer logarithmiſchen Spirale, die gleiche Winkel am Mittelpuncte enthalten, ſind ſich ähnlich. Denn alle Radii, welche in dieſen Sectoren dieſelben Winkel mit den äußerſten gleichnamigen machen, haben daſſelbe Verhältniß zu dieſen, (40.), und machen auch mit der Curve denſelben Winkel. Aller Unterſchied betrifft bloß die Größe.

45. Der Bogen AM ſey $= s$, es iſt $s = (y - a)\sqrt{(1 + m^2)}$.

Denn es iſt $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2\partial\varphi^2)} = \partial y\sqrt{(1 + m^2)}$. Daraus iſt $s = y\sqrt{(1 + m^2)} + \text{Const.}$ Da der Bogen bey A, wo $y = a$ iſt, anfängt, ſo iſt Const. $= - a\sqrt{(1 + m^2)}$.

Es iſt $\sqrt{(1 + m^2)} = \sec.\,CMT = \frac{1}{\cos\,CMT}$, (Goniometrie, 13.).

46. Der Bogen AN, von A an rückwärts genommen, iſt negativ. Eines ſolchen Bogens Differential iſt, ſo wie das Differential ſeines Radii, negativ, das iſt, $= - \partial s = - \partial y \sqrt{(1 + m^2)}$; daher $- s = - y \sqrt{(1 + m^2)} +$ Const. oder $- s = (a - y) \sqrt{(1 + m^2)}$, wie es auch die Formel in (45) ergiebt. Das Minuszeichen vor s zeigt bloß die Lage des Bogens an. Der ganze Bogen von A an bis in den Mittelpunct C, durch alle unendlich vielen Windungen iſt $= a \sqrt{(1 + m^2)}$.

Daß die unendlich vielen Windungen doch nur eine endliche Länge geben, iſt nicht wunderbarer, als daß die Summe aller Glieder einer abnehmenden geometriſchen Progreſſion eine endliche Größe giebt. (Geometriſche Reihe, 5.).

47. Der ganze Bogen s von dem Mittelpuncte an bis zu einem Puncte M, deſſen Ordinate CM $= y$ iſt, iſt $s = y \sqrt{(1 + m^2)}$. Es iſt der Werth, den die Integration in (45) giebt, wenn die Const. $= 0$ genommen wird.

48. Man ziehe auf den Radius CM in C die ſenkrechte CT, welche die berührende MT in T ſchneidet, ſo iſt CT $= my$; MT $= y \sqrt{(1 + m^2)}$; und der ganze Bogen von dem Mittelpuncte bis an den Punct M $=$ MT.

49. Der Flächenraum des Sectors ACMA zwiſchen dem Bogen AM und den Radiis CA, CM, iſt $= \frac{1}{4} m (y^2 - a^2)$. — Denn das Differential dieſes Flächenraums iſt $= \frac{1}{2} y^2 \partial \varphi$ (Quadratur, 11.). Es iſt alſo $= \frac{1}{2} my \partial y$. Davon iſt das Integral $= \frac{1}{4} my^2 +$ Const. $= \frac{1}{4} m (y^2 - a^2)$, damit es bey $y = a$ anfange.

50. Das Differential des Flächenraums ACN, wo der Bogen AN in Abſicht auf den Bogen AM negativ iſt, iſt $= - \frac{1}{2} my \partial y$, und dieſer Flächenraum $= C - \frac{1}{4} my^2 = \frac{1}{4} m (a^2 - y^2)$. Für $y = 0$ iſt der Flächenraum, der alle auf einander liegenden, un-

endlich vielen Windungen, bis in den Mittelpunct, begreift, $= \frac{1}{4} ma^2$. Bis an irgend eine Ordinate CM = y iſt der geſammte Flächenraum, von dem Mittelpuncte aus, $= \frac{1}{4} my^2$. Die Conſtante in (49) iſt der Flächenraum von CA an bis in den Mittelpunct, ſubtractiv genommen.

51. Der Flächenraum eines ſpiralichen Ringes zwiſchen den nächſten Umläufen AQBD und aqNA, und den Segmenten AD, Aa der Radiorum CD, CA iſt $= \frac{1}{4} m \left(\frac{c^2 - a^2}{c}\right)^2$, wo c der Radius CD iſt.

Der Anfangsradius des äußern Umlaufes iſt = a, alſo der Schlußradius CD $= \frac{bb}{aa}$ a. Da CD = c geſetzt iſt, ſo iſt ac = bb. Der Anfangsradius Ca des innern Umlaufes iſt $= \frac{aa}{bb} a = \frac{aa}{c}$. Auf einem Radius CQ = y des äuſſern Umlaufes nehme man den Radius Cq = z des innern, ſo iſt dieſer $= \frac{aa}{bb} y = \frac{a}{c} y$. Der Sector ACQ des äuſſern Umlaufes iſt $= \frac{1}{4} m (y^2 - a^2)$; der Sector ACq des innern $= \frac{1}{4} m \left(z^2 - \frac{a^4}{c^2}\right) = \frac{1}{4} m . \frac{a^2}{c^2} (y^2 - a^2)$. Der Abſchnitt AQqa des Ringes iſt daher $= \frac{1}{4} m . \frac{c^2 - a^2}{c^2} (y^2 - a^2)$. Für den ganzen Ring zwiſchen beiden Umläufen iſt y = c, alſo der Flächenraum dieſes Ringes $= \frac{1}{4} m \left(\frac{c^2 - a^2}{c}\right)^2$. — Es iſt $\frac{c^2 - a^2}{c}$ die vierte Proportionale zu c; c + a; c − a.

52. Der Halbmeſſer der Krümmung, r, in einem Puncte M der logarithmiſchen Spirale iſt $= \frac{y\sqrt{(1+mm)}}{m}$, oder, da der Winkel der Curve mit dem Radius CML $= \alpha$ geſetzt iſt, $r = \frac{y}{\sin\alpha}$.

Denn es ſey LMN (Fig. 38.) ein Bogen der Spirale, C ihr Mittelpunct, CA der Anfangsradius, CM $= y$, der Radius zu dem Winkel ACM oder φ; TMt die berührende in M, und MR der Halbmeſſer der Krümmung in M. Der Winkel CMT $= \alpha$, iſt unveränderlich, ſo wie deſſen Ergänzung zum Rechten, CMR. Daher iſt in der Formel, $r = \frac{\partial s}{\partial\varphi - \partial\omega}$, (Krümmungskreis, 46.), wo ω hier der Winkel CMR iſt, $\partial\omega = 0$, und der Halbmeſſer der Krümmung $r = \frac{\partial s}{\partial\varphi}$. Nun iſt $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2\partial\varphi^2)} = y\partial\varphi\sqrt{\left(\frac{1}{mm}+1\right)} = \frac{y\partial\varphi}{m}\sqrt{(1+mm)}$, alſo der Radius der Krümmung $r = \frac{y}{m}\sqrt{(1+mm)}$. Da $m = \operatorname{tang}\alpha$ iſt (43), ſo iſt $\sqrt{(1+mm)} = \sec\alpha$, und $r = y \cdot \frac{\sec\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$.

53. Die gerade CR, von dem Mittelpuncte der Spirale bis in den Mittelpunct der Krümmung, ſteht auf dem zugehörigen Radius der Spirale, CM, ſenkrecht. — Denn es iſt $CR^2 = CM^2 + MR^2$ —

$2\,CM \times MR.\ \cos CMR$. (Trigonometrie). Da $CM = MR.\sin\alpha$, und W. $CMR = R - \alpha$, alſo $\cos CMR = \sin\alpha$ iſt, ſo iſt $CR = MR.\cos\alpha$.

Ferner iſt $CM^2 + CR^2 = MR^2 (\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2) = MR^2$, welches nur einem rechtwinkligen Dreyeck zukommt. Euklides, I. 48.

54. Alle Dreyecke, wie MCR, zwiſchen dem Mittelpuncte der Spirale, einem Puncte derſelben und dem zugehörigen Mittelpuncte der Krümmung, ſind ſich ähnlich; daher iſt das Verhältniß der zuſammengehörigen Radiorum CM an der Spirale und CR an dem Orte PRp der Krümmungs-Mittelpuncte ein gegebenes. Es iſt $CM : CR = \tang CRM : 1 = \tang CMT : 1 = m : 1$.

55. Der Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreiſe an der logarithmiſchen Spirale iſt dieſelbe Spirale, um denſelben Mittelpunct, aber in einer andern Lage.

Es ſey PRp (Fig. 38) ein Bogen des Orts dieſer Mittelpuncte, und darauf R ein zu dem Puncte M der Spirale LMN gehöriger Punct. Man nehme an der Spirale eine Reihe von Radiis unter gleichen Winkeln neben einander. Dieſe bilden eine geometriſche Progreſſion. Die Radii CR an PRp, dem Orte der Krümmungs-Mittelpuncte, machen mit dem zugehörigen CM an der Spirale einen rechten Winkel, alſo unter einander denſelben Winkel, welchen die zugehörigen Radii an der Spirale machen. Man nehme aus der Progreſſion der Radiorum CM zwey Glieder, y und y′, ſo wie aus der Progreſſion der CR zwey zugehörige, z und z′, ſo iſt, da das Verhältniß y : z überhaupt ein gegebenes iſt, $y : z = y' : z'$, und daraus $y : y' = z : z'$. Die Radii CR (oder z), welche unter denſelben Winkeln auf einander folgen wie die zugehörigen y an der Spirale, bilden alſo eine geometriſche Progreſſion. Dieſes iſt eine Eigenſchaft der logarithmiſchen Spirale, (36). Der Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreiſe iſt auch dieſelbe Spirale, weil die logarithmiſche Spirale durch den Win-

kel zweyer Radiorum und das Verhältniß derſelben beſtimmt wird, (39), da dieſe Stücke den Factor m in der Gleichung für die Spirale beſtimmen.

56. Die Lage der Spirale PRp wird folgendermaßen beſtimmt.

Da das Verhältniß y:z ein gegebenes iſt, ſo machen die Radii y und z an der Spirale LMN allenthalben denſelben Winkeln β mit einander, und es iſt $\beta = m \log \frac{y}{z} = m \log m$ (54). Ferner iſt $\varphi - \beta = m \log \frac{y}{a} - m \log \frac{y}{z} = m \log \frac{z}{a}$, das iſt, $\varphi = \beta$ iſt der Winkel des Radius z mit der Anfangslinie CA. Hier iſt z kleiner als y angenommen. Wäre es größer, ſo würde β negativ und $\log \frac{y}{z}$ auch, und in beiden Theilen der Gleichung iſt die Subtraction einer negativen Größe eine Vergrößerung. Oder man ſetze für dieſen Fall, um Winkel und Logarithmen abſolut zu nehmen, $\beta = m \log \frac{z}{y}$, ſo wird $\varphi + \beta = m \log \frac{y}{a} + m \log \frac{z}{y} = m \log \frac{z}{a}$, wie vorher. Man drehe die ganze Spirale in ihrer Ebene um den Mittelpunct C, ſo daß jeder Radius den Winkel γ beſchreibe, wobey die gerade CA ihre Lage behält, um von derſelben an die Winkel rechnen zu können. Dadurch wird der Winkel des Radius y mit CA $= \varphi + \gamma$; des Radius z mit CA, nämlich ACR $= \varphi - \beta + \gamma$. Man ſetze $\gamma = m \log \frac{a}{c}$, ſo wird $\varphi - \beta + \gamma = m \log \frac{z}{a} + m \log \frac{a}{c} = m \log \frac{z}{c}$. Es iſt nun c der Anfangsradius, welcher in die Linie CA fällt, mit welcher, bey

bey der veränderten Lage der Spirale der Radius a den Winkel γ macht, welches auch die Gleichung, $\gamma = m \log \frac{a}{c}$ beſagt. Der Winkel $\varphi - \beta + \gamma$ iſt in dem gegenwärtigen Falle $ACR = \varphi + \frac{1}{2}\pi$, da π zwey Rechte bedeutet, indem alle Winkel durch Bogen eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer die Einheit iſt, ausgedruckt werden. Alſo iſt $\gamma - \beta = \frac{1}{2}\pi$, und der Winkel γ, um welchen die Lage der Spirale verändert wird, iſt $= \frac{1}{2}\pi + \beta$. — An der natürlichen Spirale iſt $m = 1$, alſo $\beta = 0$, und $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, ſo daß die Spirale um einen rechten Winkel gedreht werden muß, damit ſie mit ihrer Evolute zuſammenfalle.

57. Der Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreiſe zu einer logarithmiſchen Spirale wird von den Halbmeſſern der Krümmung an dieſer berührt (Evolution, 3.). Nun macht der Radius CR mit dem Krümmungshalbmeſſer MR den beſtändigen Winkel α; die Curve PRp iſt alſo eine logarithmiſche Spirale, da es dieſer ausſchließlich zukommt, daß die Radii mit der Curve, d. i. den ſie berührenden geraden, einen unveränderlichen Winkel machen; und zwar iſt ſie dieſelbe mit der erzeugenden LMN, weil an dieſer der Winkel der Radiorum mit der Curve derſelbe α iſt.

58. Durch die Abwickelung der logarithmiſchen Spirale wird um ihren Mittelpunct eine ihr gleiche Spirale beſchrieben.

Denn man nehme (Fig. 37.) auf der in einem Puncte M die Spirale berührenden die Länge $MT = y\surd(1 + mm)$, wo $m = \text{tang } CMT$ iſt, ſo iſt dieſe gleich dem ganzen ſpiraliſchen Bogen von dem Mittelpuncte C an (47), und T iſt ein Punct der erzeugten VTv. Man ziehe CT, ſo iſt, wegen des gegebenen Verhältniſſes $CM : MT$, nämlich des $1 : \surd(1 + mm)$, und wegen des eingeſchloſſenen unveränderlichen Winkels CMT das Dreyeck MCT der Art nach gegeben. Daher iſt, wie in (56) erwieſen iſt, die durch Abwicklung einer logarithmiſchen Spirale erzeugte Curve dieſelbe

Spirale mit dieſer, nur in einer andern Lage, um denſelben Mittelpunct *).

59. Der Winkel CMT der ſich zugeordneten Radiorum beider Curven iſt ein Rechter. — Denn da tang CMT oder tang $\alpha = m$ iſt, ſo iſt sec CMT $= \sqrt{(1 + mm)}$. Nun iſt $MT = CM \sqrt{(1 + mm)}$, alſo iſt CM : MT = 1 : sec CMT. Dieſes Verhältniß findet nur an einem bey C rechtwinkligen Dreyeck Statt.

60. Oder es wird auf dieſelbe Art wie in (53) gezeigt, daß $CT^2 + CM^2 = MT^2$, alſo das Dreyeck MCT bey C rechtwinklig iſt.

61. Die gerade MS (Fig. 38) an der logarithmiſchen Spirale LMN mache mit der Normale MR in M den Winkel RMS = CMR, man ſucht die Curve Qsq, welche von dieſer MS und jeder andern, auf ähnliche Art an die LMN gezogenen, berührt wird, das iſt, die Brennlinie oder Catacauſtica der logarithmiſchen Spirale.

In der Formel, $u = \frac{rz \cos \omega}{2z - r \cos \omega}$, (Catacauſtica, 13. V) iſt z was hier CM = y iſt; r der Radius der Krümmung, hier $\frac{y}{\sin \alpha}$; ferner ω, der Winkel CMR hier $90^\circ - \alpha$, daher $\cos \omega = \sin \alpha$, und u hier MS. Die Subſtitution dieſer Werthe giebt MS = y, das iſt, MS = CM. Man ziehe die gerade CS, ſo iſt in dem gleichſchenkligen Dreyeck CMS, worin der W. CMS $= 2\,(90^\circ - \alpha)$ iſt, von den beiden andern jeder $= \alpha$, und das Verhältniß CM : CS $= \sin \alpha : \sin 2\alpha = 1 : 2 \cos \alpha = \sec \alpha : 2$. Daher iſt zufolge (57) die Brennlinie QSq dieſelbe Spirale mit der vorgegebenen, um denſelben Mittelpunct C, nur in einer andern Lage.

62. Der Winkel γ, um welchen die Spirale ihre

*) Dieſemnach iſt die Einſchränkung in dem Artikel, Evolution, 17, aufzuheben.

Lage geändert hat, iſt $= \alpha + m \log \frac{1}{2} \sec \alpha$. — Denn es iſt aus (56) überhaupt der Winkel ACS $= \varphi - \beta + \gamma$; und hier ACS $= \varphi + \alpha$, alſo der Drehungswinkel $\gamma = \alpha + \beta$. Ferner iſt $\beta = m \log \frac{y}{z} = m \log \frac{CM}{CS} = m \log \frac{1}{2} \sec \alpha$; folglich $\gamma = \alpha + m \log \frac{1}{2} \sec \alpha$.

63. Wenn $\alpha = 60^\circ$ genommen wird, ſo iſt CM = CS, und $\beta = 0$, weil der Logarithmus der Einheit $= 0$ iſt. Auch iſt $\sec 60^\circ = 2$, da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ iſt.

64. Es ſey LMN (Fig. 39.) ein Bogen einer logarithmiſchen Spirale, deren Mittelpunct C iſt. An die Ordinate CM werde durch M die gerade MP unter einem gegebenen Winkel CMP gezogen, und daſſelbe werde für jeden andern Punct gedacht: der Ort OPQ der Durchſchnittspuncte jeder MP mit der an einen unendlich nahen Pnnct m auf gleiche Art gezogenen mP iſt eine der LMN gleiche Spirale.

An den beiden Curven ſeyn M, P zuſammengehörige Puncte; CM $= y$; CP $= z$; der Winkel ACM $= \varphi$; ACP $= \omega$; alſo MCP $= \omega - \varphi$. Die gerade CA iſt der Lage nach gegeben. Der gegebene Winkel CMP ſey $= \beta$. Man verlängere CP nach p hin, ſo iſt der Winkel MPp $= \beta + \omega - \varphi$. In dem Dreyecke MCP iſt $y : z = \sin(\beta + \omega - \varphi) : \sin \beta$. Man nehme auf LMN einen von M endlich entfernten Punct, ſo iſt der Durchſchnittspunct der MP mit der durch m auf gleiche Art gelegten zwar kein Punct des Ortes; allein, was in dieſem Falle unveränderlich bleibt, bleibt es auch für unendlich nahe Puncte. Läßt man den Punct m immer näher dem M rücken, ſo bleiben CM und der Winkel MCP nebſt der Lage der MP unverändert; läßt man den Punct M immer näher dem m rücken, ſo bleiben Cm und der Winkel mCP nebſt der Lage der mP unverändert. Das letztere macht die Rechnung etwas leichter. Es ſeyn alſo y und φ die veränderlichen Größen.

Das Gränzverhältniß ihrer Veränderungen erhält man durch die Differentiation der Gleichung,

$$y = \frac{\sin(\beta + \omega - \varphi)}{\sin\beta} z,$$

wenn dabey die ſonſt veränderlichen Größen, z und ω, als conſtante behandelt werden. So iſt

$$\partial y = -\frac{z\partial\varphi}{\sin\beta}\cos(\beta + \omega - \varphi),$$

woraus in Verbindung mit jener Gleichung folgt

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial\varphi}{\tang(\beta + \omega - \varphi)}.$$

Die Differentialgleichung für die Spirale iſt $\partial\varphi = \frac{m\partial y}{y}$, alſo iſt $m = -\tang(\beta + \omega - \varphi)$, wo die Negation nur anzeigt, daß der Winkel $\beta + \omega - \varphi$, nämlich der W. MPp, ſtumpf iſt, deſſen Tagente, die negativ iſt, negativ genommen einen poſitiven Werth für m giebt. — Oder es iſt $m = \tang(\pi - \beta - \omega + \varphi)$, wo der Winkel zu der Tangente der Nebenwinkel zu $\beta + \omega - \varphi$ iſt.

Da der Winkel $\beta + \omega - \varphi$ einen gegebenen Werth hat, ſo iſt $\omega - \varphi$ (= MCP) ein unveränderlicher Winkel. Auch iſt das Verhältniß y : z für alle zuſammengehörige Puncte, wie M und P, daſſelbe. Die Curve OPQ iſt daher dieſelbe Spirale mit LMN, aus (56), aber in einer andern Lage.

65. Man ſetze zur Abkürzung, $\beta + \omega - \varphi = \delta$, ſo iſt $y = \frac{\sin\delta}{\sin\beta} z$. Dieſen Werth trage man in die Gleichung für die gegebene Spirale, $\varphi = m\log\frac{y}{a}$, ſo iſt $\varphi = m\log\frac{\sin\delta}{\sin\beta}\cdot\frac{z}{a}$. Da $\varphi = \omega + \beta - \delta$ iſt, ſo iſt

$$\omega = \delta - \beta + m \log \frac{\sin\delta}{\sin\beta} \cdot \frac{z}{a}.$$

Man verwandle den Winkel $\delta - \beta$ in eine logarithmiſche Größe, $\delta - \beta = m \log \frac{a}{f}$, ſo iſt $\omega = m \log \frac{\sin\delta}{\sin\beta} \cdot \frac{z}{f}$. Noch ſetze man $\frac{f \sin\beta}{\sin\delta} = c$, ſo iſt $\omega = m \log \frac{z}{c}$, die Gleichung für die Curve OPQ. Die Anfangslinie für die Winkel iſt CA, der Radius in derſelben iſt c. Wegen des Factors m iſt die Curve dieſelbe mit der Spirale LMN. Für dieſe iſt die Gleichung, $\varphi = m \log \frac{y}{a}$, alſo der Winkel γ des Radius c mit dem Anfangsradius CA iſt $\gamma = m \log \frac{c}{a}$. Um dieſen hat die Spirale OPQ ihre Lage geändert.

66. Die unter dem beſtändigen Winkel β an CM gelegte gerade MP berührt die Curve OPQ. — Denn an der Spirale LMN iſt $m = \tang\alpha$, der Tangente des beſtändigen Winkels CMT des Radius CM mit der Spirale oder ihrer berührenden MT, (43). Vorher iſt gefunden $m = \tang(\pi - \beta - \omega + \varphi)$, alſo iſt $\alpha = \pi - \beta - \omega + \varphi$, das iſt, es iſt CMT = CPM. Die berührenden machen aber an der Spirale OPQ in jedem Puncte mit dem Radius denſelben Winkel, wie an der ihr gleichen LMN; folglich iſt MP die in P an OPQ berührende.

67. Wird die gerade MP auf die andere Seite von CM gelegt, ſo iſt β negativ, und es iſt nun $y : z = \sin(\beta - \omega + \varphi) : \sin\beta$, wenn β, wie φ und ω, abſolut, bloß nach der Quantität genommen wird. Es iſt nun φ größer als ω, welcher Umſtand für die Rechnung

gleichgültig iſt. Für dieſen Fall iſt $m = \tan(\beta - \omega + \varphi)$. Auch iſt $\delta = \beta - \omega + \varphi$, und $\beta - \delta = m \log \frac{a}{f}$. Die Verwandlungen werden ganz klar, wenn die Rechnung auf dieſen Fall beſonders eingerichtet wird.

68. Die Curve OPQ iſt die Diacauſtica der Spirale LMN, oder ihre Brennlinie durch Brechung, wenn bey dem Übergange der Lichtſtrahlen aus einem Mittel in ein anderes die Curve LMN die begränzende Linie der Mittel in der Brechungs-Ebene, und ihr Mittelpunct C der ſtrahlende Punct iſt. In dem betrachteten Falle geſchieht die Brechung nach dem Einfallslothe, der Normale MR, hin. Die Linie MP iſt der rückwärts verlängerte gebrochene Strahl. An der Spirale iſt der Einfallswinkel CMR ein gegebener, daher auch der Brechungswinkel PMR und ihr Unterſchied CMP. S. Diacauſtica.

69. Die logarithmiſche Spirale hat ſchon Descartes betrachtet, aber als eine Curve, welche mit den aus einem Mittelpuncte gezogenen geraden einen unveränderlichen Winkel macht. Er kam darauf bey der Bemerkung, daß die Fläche, auf welcher ein ſchwerer Körper allenthalben daſſelbe relative Gewicht behalten ſoll, gekrümmt ſeyn müſſe, ſo daß die nicht parallelen Richtungen der Schwere mit ihr immer gleiche Winkel machen. Die Linie, nach welcher ſie gekrümmt ſeyn muß, ſey eine Spirale, deren Mittelpunct derjenige der Erde iſt, (Cartesii epist. P. I. epist. 73. 74.). Er behauptete (Ep. 91. P. II.), daß ſie bis zu dem Mittelpuncte der Erde reiche. Ob er dabey unendlich viele Windungen gedacht habe, erhellt nicht. Die Figur in dem 74ſten Briefe zeigt nur eine Windung von dem Mittelpuncte aus. Doch ſagt er daſelbſt ganz richtig, daß die Bogen von dem Mittelpuncte an ſich wie die zugehörigen Radii durch die Endpuncte verhalten. Andere Geometer aber, welche von dieſer Unterſuchung

benachrichtigt wurden, fanden, daß die Curve unendlich viele Windungen um ihren Mittelpunct macht, und daß die Radii in geometriſcher Progreſſion ſind, wenn die Winkel in arithmetiſcher ſtehen. Montucla rühmt zwey Schriften eines Jeſuiten, Nicolas, de novis spiralibus exercitatio geometrica. Tolosae 1693; de lineis spiralibus logarithmicis, ibid. 169.. Etwas weniges über die logarithmiſche Spirale findet man bey Wallis, Opp. T. I. p. 560, und bey Barrow, Lectt. geometricae, p. 124.

70. Durch Hülfe der neuen Analyſis beſtimmte Jakob Bernoulli die Längen der Bogen und die Flächenräume, zeigte auch den Zuſammenhang dieſer Curve mit der loxodromiſchen Linie auf der Kugel, Opp. T. I. Nr. 42. Vorzüglich iſt, was er bemerkt, daß die Evolute und die Cauſtica dieſer Spirale dieſelben Linien mit ihr ſind. Dieſes hatte auch Joh. Bernoulli für ſich gefunden. (Jac. Bernoulli Opp. T. I. Nr. 50) Ferner fand Jakob Bernoulli, daß die logarithmiſche Spirale noch auf viererley Art ſich ſelbſt erzeugt: wenn der Halbmeſſer der Krümmung in entgegengeſetzter Richtung genommen wird, wenn eben dieſes mit dem zurückgeworfenen MS (Fig. 38.) geſchieht, wenn eben dieſer in der Richtung von CM jenſeits M getragen wird, und viertens, wenn man die Spirale auf ſich ſelbſt ſich wälzen läßt, ſo daß die auf gleiche Art liegenden Puncte auf einander treffen, wobey der Mittelpunct der ſich wälzenden Spirale der beſchreibende Punct iſt. Dieſe erzeugten Linien nannte er die Ant-evoluta, die Anticaustica, die Pericaustica und Cycloidalis. Die vierte fällt in die Anticaustica. (Acta Erud. 1692. Opp. T. I. Nr. 49.). Auch fand er, daß ihre Brennlinie durch Brechung ſie ſelbſt iſt. (Acta Erud. 1693. Opp. Nr. 56.). Bernoulli ergötzte ſich ſehr über dieſe verſchiedenen Arten der Wiedererzeugung, ſo daß er dieſe Spira mirabilis, wie er ſie nennt, zum Sinnbilde für mehrere Vorſtellungen und Verhältniſſe vorſchlägt, un=

ter andern, doch mit Schüchternheit, zu einer Abbildung der ewigen Zeugung des göttlichen Sohnes vom Vater, am liebſten zum Denkmahl auf ſeinem Grabſteine, mit der Beyſchrift: Eadem mutata resurgo.

71. Die logarithmiſche Spirale hat verſchiedene feine Anwendungen. — Sie iſt die Projection der loxodromiſchen Linie der Seefahrer auf die Ebene des Äquators nach der ſtereographiſchen Entwerfungsart, wobey auch der loxodromiſche Winkel derjenige iſt, unter welchem die Radii die Spirale ſchneiden. Sie heißt daher auch Loxodromica plana. Siehe ſtereographiſche Projection. Die Erde wird dabey für eine Kugel genommen.

Sie iſt im leeren Raum die Bahn eines Körpers, der nach einem Mittelpuncte der Kraft getrieben wird, die ſich umgekehrt wie der Cubus des Abſtandes von jenem Mittelpuncte verhält. Das Verhältniß der Geſchwindigkeiten nach der Richtung des Radius und der darauf ſenkrechten iſt ein unveränderliches, da das Verhältniß $\partial y : y\partial\varphi$ ein beſtimmtes, $1 : m$, iſt.

Durch welche Urſache aber auch ein Körper eine logarithmiſche Spirale beſchreibt, ſo iſt jenes Verhältniß unveränderlich. Daher mag ſie zu den Rinnen (Hauſchlägen) auf den Mühlſteinen, beſonders dem untern, dienen. Hier nimmt die Geſchwindigkeit nach der auf den Radius ſenkrechten mit dem Radius (dem Abſtand von der Axe) zu. Nimmt man $\alpha = 45°$ ſo iſt die Bewegung in der Richtung des Radius allenthalben ſo groß als die kreisförmige.

Die Flügel (Schaufeln) eines Ankers werden zum Widerſtande auf das vortheilhafteſte nach einer logarithmiſchen Spirale gekrümmt, ſo daß der Neigungswinkel gegen die Linien aus dem Mittelpuncte $67\frac{1}{2}$ Gr. beträgt. Chapman von der tüchtigen Form der Schiffsanker in Gilberts Annalen der Phyſik. VI. Bd. S. 81.

Hyperboliſche oder reciproke Spirale.

72. Die Spirale, an welcher die nach einem gegebenen Puncte gezogenen Radii ſich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Bogen eines um denſelben Punct beſchriebenen Kreiſes, heißt eine hyperboliſche oder reciproke. Der Halbmeſſer des Kreiſes ſey $= a$, ein Bogen deſſelben $= x$, die zugehörige Ordinate aus dem Mittelpuncte oder der Radius der Curve $= y$, ſo iſt die Gleichung, $aa = xy$, wie für die Hyperbel, woran die Aſymptoten die Axen der Coordinaten ſind (Hyperbel, 8.). Oder man ſetze $x = \varphi a$, wo φ der zum Bogen x gehörige Winkel iſt, ſo iſt $\varphi y = a$. Die Curve mag man die umgekehrte Archimediſche nennen.

73. Sie macht unendlich viele Windungen um einen Mittelpunct zu ihm hin, da φ unendlich groß genommen werden muß, wenn $y = 0$ ſeyn ſoll. Hingegen iſt y unendlich groß, für $\varphi = 0$. Sie hat eine Aſymptote parallel mit der Anfangslinie, von welcher an die Winkel φ genommen werden, in dem Abſtande a. Denn der Abſtand eines Punctes der Curve von der Anfangslinie iſt $= y \sin\varphi = \frac{a \sin\varphi}{\varphi}$, kleiner als a. Die Gränze dieſes Werthes iſt $= a$, da die Gränze des Verhältniſſes $\varphi : \sin\varphi$ das $1 : 1$ iſt. Für dieſe Gränze iſt φ unendlich klein und y unendlich groß. Die Curve ſchneidet jene Anfangslinie zum erſtenmahle, wenn $\varphi = \pi$, dem halben Kreisumfange iſt. Es iſt dann $y = \frac{a}{\pi}$.

74. Zur Übung in der Integralrechnung nehme man die Rectification dieſer Curve. Aus ihrer Gleichung, $\varphi y = a$, folgt $y \partial\varphi = - \varphi \partial y$, und das Differential des Bogens $\partial s = \sqrt{(y^2 \partial\varphi^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial y}{y} \sqrt{(a^2 + y^2)}$.

In dem Artikel, Integralformel, 59. ſind ſtatt der dortigen unbeſtimmten Größen,

$$a, \; b, \; m, \; n, \; p,$$

hier zu ſetzen

$$a^2, \; 1, \; 0, \; 2, \; \tfrac{1}{2},$$

und x iſt mit y zu vertauſchen. Durch die Formel V. wird der involutoriſche Theil auf die Formel, 53, daſelbſt gebracht. Folglich iſt

$$s = \sqrt{(a^2 + y^2)} + a \log. \frac{\sqrt{(a^2+y^2)} - a}{y} - \text{Const.}$$

Der Bogen fange bey einer gegebenen Ordinate b an, ſo iſt

$$\text{Const.} = \sqrt{(a^2 + b^2)} + a \log. \frac{\sqrt{(a^2+b^2)} - a}{b}.$$

Iſt dieſe Ordinate die urſprünglich gegebene a, ſo iſt

$$\text{Const.} = a\sqrt{2} + a \log. (\sqrt{2} - 1).$$

75. Joh. Bernoulli hat dieſe Curve zuerſt betrachtet. Er fand, daß ſie unter diejenigen Linien gehört, welche durch eine Kraft beſchrieben werden, die ſich umgekehrt wie der Cubus des Abſtandes von dem Mittelpuncte der Kraft verhält, und gebraucht ſie als Beyſpiel zu zeigen, daß man von dem Geſetze der Kraft nicht auf die Natur der beſchriebenen Linie ſchließen dürfe, wie es Newton ſcheine gethan zu haben in dem Falle, da die Kraft ſich umgekehrt wie das Quadrat des Abſtandes verhält. Operum T. I, p. 480. 552. — Es mag noch als eine Eigenthümlichkeit der hyperboliſchen Spirale angemerkt werden, daß ſie eine unveränderliche Subtangente hat.

Paraboliſche Spirale.

76. Eine andere Gattung von Spiralen, als die bisher betrachtete, entſteht, wenn man den Umfang eines Kreiſes zur Abſciſſenlinie nimmt, und auf dieſen die

Ordinaten ſenkrecht ſetzt, wie ſonſt auf eine gerade Abſciſſenlinie, das iſt, ſie nach dem Mittelpuncte des Kreiſes laufen läßt.

77. Von dieſer Gattung iſt die paraboliſche Spirale, oder die Parabola helicoides, welche Jakob Bernoulli zu einem Beyſpiele der Leibnitziſchen Differentialrechnung in den Actis Erudit. 1691 (Opp. T. I. Nr. 41.) genommen hat. Ihre Gleichung iſt $ax = uu$, wie für die gewöhnliche Parabel, nur daß an jener die Abſciſſe ein Kreisbogen iſt, oder daß die Axe in einen ſolchen Bogen gekrümmt wird. Bernoulli nimmt die Ordinaten nach dem Mittelpuncte des Kreiſes hin; die Curve hat aber auch entgegengeſetzte Ordinaten, von dem Umfange des Kreiſes auswärts hin. Dieſe erwähnt Bernoulli nicht. Er läßt ſie in der von ihm gezeichneten Figur ſich nur bis zu dem Mittelpuncte des Kreiſes erſtrecken, bemerkt auch nicht, daß ſie weiter fortlaufe; allein ſie macht unzählig viele Umläufe, da der Bogen x nicht auf den einfachen Umfang des Kreiſes eingeſchränkt werden darf. Die Ordinate u wächſt dabey ohne Ende fort.

78. In Fig. 40. iſt der Anfang einer paraboliſchen Spirale, AMBC, für poſitive Ordinaten, vorgeſtellt. Der dazu angenommene Kreis iſt APDA, deſſen Mittelpunct C; auf demſelben iſt AP ein Bogen als Abſciſſe, dazu die nach C gerichtete PM die Ordinate. Es ſey $AP = x$; $PM = u$; der Parameter $= a$, ſo iſt die Gleichung für die Curve, $ax = uu$. Oder beſſer: man ſetze den Radius $CA = r$; den W. ACP oder ACM $= \varphi$, ſo iſt der Bogen $AP = r\varphi$, und die Gleichung wird, $ar\varphi = uu$. Auch wird es dienlich ſeyn, den Radius der Curve, $CM = y$, einzuführen. So iſt die Gleichung, $ar\varphi = (r - y)^2$. Dieſer Radius y wird negativ, wenn u größer als r genommen wird. — Wenn $y = o$ iſt, ſo iſt $\varphi = \frac{r}{a}$, und umgekehrt, wenn $\varphi = \frac{r}{a}$

genommen wird, geht die Curve durch den Mittelpunct, den Werth $y = 2r$ bey Seite geſetzt. Nimmt man $\frac{r}{a} = 2\pi$, ſo geht die Curve nach einem Umlaufe des Radius durch den Mittelpunct.

Bey dieſer Annahme iſt $a = \frac{r}{2\pi}$, und $\frac{\varphi}{2\pi} = \left(\frac{r-y}{r}\right)^2$.

Man nehme $r = 10000$, ſo iſt für

$\varphi = 0°$;	$u = 0$	$y = 10000$
$= 10°$;	$u = 1667$	$y = 8333$
$= 30°$;	$u = 2887$	$y = 7113$
$= 90°$;	$u = 5000$	$y = 5000$
$= 120°$;	$u = 5773$	$y = 4227$
$= 180°$;	$u = 7071$	$y = 2929$
$= 240°$;	$u = 8165$	$y = 1835$
$= 270°$;	$u = 8660$	$y = 1340$
$= 330°$;	$u = 9574$	$y = 426$
$= 360°$;	$u = 10000$	$y = 0$
$= 370°$;	$u = 10138$	$y = -138$
$= 390°$;	$u = 10408$	$y = -408$ etc.

79. Ein Abſchnitt des Flächenraums AMPA (Fig. 40.) zwiſchen einem Bogen dieſer Spirale, dem zugehörigen Kreisbogen und der Ordinate u iſt $= \frac{2}{3}ux - \frac{u}{4r}ux$.

Denn ein ſolcher Abſchnitt iſt der Unterſchied zwiſchen dem zugehörigen Kreisſector ACP und dem ſpiraliſchen Sector ACM. So verhält es ſich auch mit ihren Differentialen. Aus der Gleichung für die Curve, $ar\varphi = uu$, folgt ihre Differentialgleichung, $ar\partial\varphi = 2u\partial u$. Der parabelförmige Abſchnitt ſey Z, ſo iſt

$$\partial Z = \tfrac{1}{2} rr\partial\varphi - \tfrac{1}{2}(r-u)^2\partial\varphi$$
$$= ru\partial\varphi - \tfrac{1}{2}uu\partial\varphi;\ \text{oder}\ \partial Z =$$

$\frac{2uu}{a} \partial u - \frac{u^3}{ar} \partial u$. Daher iſt $Z = \frac{2u^3}{3a} - \frac{u^4}{4ar}$, oder

$$Z = \frac{2}{3} ux - \frac{u}{4r} ux.$$

Die Conſtante fällt weg, weil Z mit x und u anfangen ſoll. — Der erſte Theil von Z iſt $= \frac{2}{3} ux$, auf ähnliche Art wie für die eigentliche Parabel (Quadratur, 70.). An der paraboliſchen Spirale iſt die Area kleiner als Zweydrittheile des Rechtecks von Abſciſſe und Ordinate, weil die Ordinaten convergiren.

80. Die Area zwiſchen der Curve von ihrem Anfangspuncte (für u=o) bis zu dem Mittelpuncte (u=r), dem zugehörigen Kreisbogen x, und der Ordinate r zum Mittelpuncte iſt $= \frac{5}{12}$ rx. Iſt dabey x der ganze Kreisumfang, ſo iſt $x = 2\pi r$, und die Area $= \frac{5}{6} \pi rr$. Sie verhält ſich zu der Kreisfläche πrr wie 5:6. Dieſes iſt der Fall, wenn $\frac{r}{a} = 2\pi$ genommen wird.

81. Die Tangente des Winkels einer berührenden an der paraboliſchen Spirale mit dem Radius iſt $= \frac{2(r-y)y}{ar}$, den Winkel an der Seite genommen, an welcher die Ordinaten abnehmen.

Es ſey (Fig. 40.) AMBC ein Bogen dieſer Spirale von dem Anfangspuncte A bis zu dem Mittelpuncte C; auf demſelben M ein Punct, durch welchen die beberührende TMt gezogen iſt. Dieſe ſchneidet die verlängerte Anfangslinie CA in T. Der Winkel CMt des Radius mit der berührenden ſey $= \omega$, nach der Gegend, nach welcher hin die Ordinaten CM abnehmen. Es iſt $\tan\omega = -\frac{y \partial \varphi}{\partial y}$ (berührende Linie, 27.), wo das Vorzeichen — geſetzt iſt, weil der Winkel ω hier einen

Nebenwinkel von dem Winkel des Radius mit der berührenden a. a. O. bedeutet. Da aber die Differentiale ∂y und $\partial \varphi$ hier entgegengeſetzte Beziehung haben, nämlich für poſitive y, ſo erhält tang ω doch einen poſitiven Werth, und ω iſt ein ſpitzer Winkel, wie es ſeyn muß, wenn die Ordinaten aus dem Mittelpuncte abſolut abnehmen.

Man ſetze nun aus der Differentialgleichung für die krumme Linie, $ar\partial\varphi = -2(r-y)\partial y$, den Werth des Differentialquotienten in die Formel für tang ω, ſo wird erhalten, $\tang \omega = \frac{2(r-y)y}{ar}$.

Dieſe Tangente hat eine Gränze des Wachsthums für poſitive Werthe von y. Sie iſt am größten, wenn $y = \frac{1}{2} r$ iſt. (Größtes und Kleinſtes, 45.). — Für $y = r$, und $y = 0$, iſt tang $\omega = 0$, oder die berührende fällt in den Radius; für negative y iſt tang ω negativ, daher ω negativ, und CMt ſtumpf, da nun die Radii mit φ zugleich zunehmen. Ein negativer Winkel hat dieſelbe negative Tangente mit dem ſtumpfen, der ſeine Ergänzung zu zwey Rechten iſt. (Goniometrie, 8.).

82. Die berührende MT ſchneidet die (wenn nöthig verlängerte) CA in T unter dem Winkel $\omega - \varphi$. Es iſt $\tang CTM = \frac{tg\,\omega - tg\,\varphi}{1 + tg\,\omega \cdot tg\,\varphi}$. (Goniometrie, 33.). In dem Mittelpuncte, wo $\omega = 0$ iſt, wird tang CTM $= -\tang \varphi$. Eine krumme Linie ſchneidet nämlich eine gerade unter dem Winkel der ſie in dem Durchſchnittspuncte berührenden, und in dem Mittelpuncte C fällt die berührende in den Radius. Die Negation rührt daher, daß der Winkel φ von CA an rings um den Mittelpunct C genommen wird, der W. CTM aber zunächſt von der Anfangslinie CA an, nach der einen oder andern Seite. Zwey Winkel, die zuſammen vier oder zwey Rechte ausmachen, haben gleiche und entgegengeſetzte

Tangenten; der zu dem Mittelpuncte gehörige Radius wird, ungeachtet er ein Punct iſt, doch zugleich als eine gerade Linie betrachtet, nämlich als diejenige, die ſich von allen benachbarten Radiis unterſcheidet.

83. Von dem Wendungspuncte der paraboliſchen Spirale in dem dahin einſchlagenden Artikel.

Spiralen auf den Oberflächen runder Körper.

Man laſſe auf der Oberfläche eines Cylinders eine der Axe parallele gerade Linie ſich, unbeſtimmt oft, herum bewegen, indem auf derſelben ein Punct gleichmäßig mit ihr (nach einem beſtimmten Verhältniſſe ihrer gleichzeitigen Wege) fortrückt: dieſer Punct beſchreibt durch die zuſammengeſetzte Bewegung eine cylindriſche Spirale. Die bekannten Schraubengänge bilden ſolche.

Nimmt man anſtatt des Cylinders einen Kegel, und läßt auf deſſen Oberfläche eine Seite ſich herumbewegen, indem ein Punct auf dieſer gleichmäßig mit ihr fortrückt, ſo wird von dieſem eine koniſche Spirale beſchrieben.

Auf einer Kugel laſſe man einen großen Kreis um einen Durchmeſſer, als Axe der Kugel, ſich drehen, und auf deſſen Umfange einen Punct ſich gleichmäßig mit demſelben fortbewegen; dieſer beſchreibt eine ſphäriſche Spirale, welche noch eine Betrachtung verdient. Pappus hat die Area zwiſchen derſelben und dem Kreisquadranten beſtimmt. Collect. mathem. L. IV. prop. 30.

Es ſey (Fig. 41.) APB der Halbkreis, durch deſſen Umdrehung um den zu dem Puncte P gehörigen Halbmeſſer eine Halbkugel beſchrieben iſt. Auf dem Quadranten PA bewege ſich von P her ein Punct M, und habe den Bogen PM vollendet, wenn der Quadrant ſich um den Winkel APN gedreht hat, oder auf dem Kreiſe AB

um den Bogen AN fortgerückt iſt. So habe der Punct bis dahin den ſpiraliſchen Bogen PQM beſchrieben. Die Fläche zwiſchen dieſem Bogen und dem Kreisbogen PM iſt nun anzugeben.

Man ziehe einen benachbarten Quadranten Pn, und durch M den Parallelbogen Mm mit dem Kreiſe AB. Das Verhältniß des Sectors der halben Kugelfläche, NPn, zu dem Sector MPm des Abſchnittes derſelben iſt dasjenige des Radius der Kugel zu dem Sinus verſus des Bogens PM in Beziehung auf dieſen Radius, aus Complanation, Exemp. I. Th. I. S. 515, weil die ganzen von PN und PM beſchriebenen Oberflächen ſich wie ihre gleichwinkligen Sectoren verhalten. Dieſes Verhältniß iſt das Verhältniß der Differentiale für den Sector APN und die ſpiraliſche Area PQMP, weil bey dieſem das Dreyeck $Mm\mu$, das in dem Sector $PM\mu$ der ſpiraliſchen Area noch zu dem Sector PMm hinzukommt, verſchwindet, eben ſo wie bey einer ebenen krummen Figur das Dreyeck zwiſchen den Differenzen der Coordinaten und des Bogens, wenn von den letzten Verhältniſſen die Frage iſt.

Es ſey nun der Radius der Kugel $= a$, der Winkel zu dem Bogen AN $= \varphi$, der zu dem Bogen PM $= \omega$; das gegebene Verhältniß beider Winkel $= m:1$, das iſt, das Verhältniß der Wege, welche die Puncte N und M, jener auf dem Kreiſe AB, dieſer auf dem Quadranten PN zugleich beſchreiben. Die ſpiraliſche Area PQMP ſey $= Z$. Die Oberfläche der Halbkugel iſt $= 2\pi aa$, alſo der Sector APN $= aa\varphi$, und das Differential deſſelben $= aa\partial\varphi$. Dieſes verhält ſich zu dem Differential der ſpiraliſchen Area wie $1 : 1 - \cos\omega$. Alſo iſt $\partial Z = aa(1 - \cos\omega)\partial\varphi$. Da $\varphi : \omega = m : 1$ geſetzt iſt, ſo iſt $\partial\varphi = m\partial\omega$, und $\partial Z = maa\,(1 - \cos\omega)\partial\omega$. Daraus iſt, (Differentialformeln, 38.)

$$Z' = maa\,(\omega - \sin\omega),$$

ohne Conſtante, weil die Area mit ω zugleich anfängt.

Es

Es iſt $\frac{1}{2}$ aa . ω der Sector zu dem Winkel ω in dem Kreiſe mit dem Radius a; und $\frac{1}{2}$ aa . sin ω = a sin $\frac{1}{2}$ ω . a cos $\frac{1}{2}$ ω = dem Dreyeck über der Chorde Bogens a ω in dieſem Sector, alſo $\frac{1}{2}$ aa (ω — sin ω) = dem Kreisabſchnitte zwiſchen dem Bogen a ω, und deſſen Chorde, und die ſpiraliſche Area PQMP,

Z = 2m. Segm. arc. aω.

Die Spirale treffe den Kreis AB in D, wo nämlich der Bogen AD zu dem Quadranten PD = m : 1 iſt, ſo iſt ω = $\frac{1}{2}$π, und sin ω = 1, alſo die

Area PMDP = m aa ($\frac{1}{2}$ π — 1)

= 2m ($\frac{1}{4}$ π aa — $\frac{1}{2}$ aa),

das iſt dem 2m fachen des Kreisabſchnittes über der Chorde des Quadranten in dem Kreiſe mit dem Halbmeſſer a.

Die Oberfläche des Sectors APD auf der Kugel verhält ſich zu der Oberfläche der Halbkugel wie m : 4, da AD : 4PD = m : 4 iſt. Sie iſt alſo = $\frac{1}{2}$ m π aa. Daher iſt die Oberfläche zwiſchen dem Quadranten AP, der Spirale PMD und dem Bogen AD des Grundkreiſes = m aa.

Pappus läßt den Quadranten PD ſich um einen Winkel von vier Rechten drehen, oder einen ganzen Umlauf längs des Grundkreiſes vollenden, bis daß der ſich bewegende Punct den Quadranten beſchrieben hat. Bey ihm iſt alſo der Bogen AD dem Umfange gleich, und PD fällt in PA, von wo er ausgegangen iſt. Ihm iſt alſo m = 4, und die ſpiraliſche Area = 8 ($\frac{1}{4}$ π aa — $\frac{1}{2}$ aa), das iſt das achtfache des Kreisabſchnittes über der Chorde des Quadranten.

Die Methode, welche Pappus anwendet, den von der ſphäriſchen Spirale und dem Quadranten durch ihren Endpunct beſchloſſenen Flächenraum zu finden, iſt ungemein ſinnreich, und eine Einſchließung dieſer Größe zwiſchen zwey ſich ohne Ende nähernde Gränzen. Sie iſt dem Verfahren ähnlich, welches er gebraucht,

den von der archimediſchen Spirale in ihrem erſten Umlaufe und dem Halbmeſſer zu dem Endpuncte dieſes Umlaufs eingeſchloſſenen Flächenraum zu beſtimmen. Allein ſein Vortrag iſt mehr eine kurze Andeutung als eine ordentliche Ausführung des Verfahrens. Daher mag die folgende Darſtellung demſelben zu einiger Erläuterung dienen.

Man denke ſich den Umfang des Grundkreiſes ABA (Fig. 41) in n gleiche Theile getheilt, wo n willkürlich iſt, und einer dieſer gleichen Theile ſey Nn, ſo daß der zu Nn am Mittelpuncte gehörige Winkel $= \frac{2\pi}{n}$ iſt. Durch die Theilungspuncte wie N, n lege man Quadranten PN, Pn, welche die Spirale in M und μ ſchneiden, und beſchreibe aus dem Pole P zwiſchen je zwey nächſten Quadranten PN, Pn mit den Sehnen der Bogen PM, Pμ Kreisbogen Mm, μr, ſo fällt jeder ſpiraliſche Sector wie PMμ zwiſchen die beiden ſphäriſchen Sectoren PMm und Prμ, davon der erſte in ihm, der andere um ihn beſchrieben iſt. Von dieſen Sectoren iſt der λte eingeſchriebene jedesmahl dem $(\lambda - 1)$ten umſchriebenen gleich: daher der erſte eingeſchriebene $= 0$ iſt.

Dieſes vorausgeſetzt, ſo iſt mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen Sect. sphaer. PNn:

$$\text{Sect. sphaer. PMm} = \frac{2\pi aa}{n} : \frac{2\pi aa}{n}(1 - \cos\omega)$$

$$= \frac{2\pi aa}{n} : \frac{4\pi aa}{n}\sin\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{\pi aa}{2n} : \frac{\pi aa}{n}\sin\frac{1}{2}\omega^2.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2aa \cdot \frac{\pi}{2n} : \frac{1}{2} \cdot \left(2a\sin\frac{1}{2}\omega\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2n}.$$

Die Glieder dieſes letzten Verhältniſſes ſind ähnliche Kreisſectoren mit dem Winkel $\frac{\pi}{2n}$ am Mittelpuncte in

Kreiſen, deren Halbmeſſer $a\sqrt{2} = 2a\sin\frac{\pi}{4}$ und $2a\sin\frac{1}{2}\omega$ oder die Chorde des Quadranten und die des Bogens $a\omega$ in dem größten Kreiſe der Kugel ſind. In einer ſehr einfachen Verzeichnung weiß Pappus dieſe Kreisausſchnitte darzuſtellen. Er zieht nämlich an den einen Endpunct des Quadranten des größten Kugelkreiſes eine berührende, und beſchreibt aus dem Berührungspuncte als Mittelpuncte innerhalb des von der berührenden und der Chorde des Quadranten eingeſchloſſenen halben rechten Winkels mit der Chorde des Quadranten als Halbmeſſer einen Kreisbogen, welcher in n gleiche Theile getheilt wird, ſo geben diejenigen Stücke der an die Theilpuncte gezogenen Halbmeſſer, welche in den Abſchnitt über der Chorde des Quadranten fallen, und Sehnen in demſelben ſind, die Halbmeſſer $2a\sin\frac{1}{2}\omega$; mit welchen nun die Sectoren $\frac{\pi aa}{n}\sin\frac{1}{2}\omega^2$ um und in den gedachten Abſchnitt beſchrieben werden. Weil nun in der vorhergehenden Proportion das erſte und dritte Glied immer einerley bleiben, während die beiden andern mit dem Winkel ω ſich ändern, ſo verhält ſich die Summe aller Kugelſectoren PNn zu der Summe aller Sectoren PMm, wie die Summe aller Kreisſectoren $\frac{\pi aa}{2n}$ zu der Summe aller den ſphäriſchen Sectoren PMm correſpondirenden circulären Sectoren $\frac{\pi aa}{n}\sin\frac{1}{2}\omega^2$, d. i., die halbe Kugelfläche verhält ſich zu der Summe der in den ſpiraliſchen Raum beſchriebenen Kugelſectoren, wie der Quadrant des größten Kugelkreiſes zu der Summe der

in den Abſchnitt über der Chorde des Quadranten beſchriebenen Kreisſectoren. Eben ſo verhält ſich die halbe Kugelfläche zu der Summe aller um den ſpiraliſchen Raum beſchriebenen Kugelſectoren wie der Quadrant des größten Kreiſes der Kugel zu der um den Abſchnitt über der Chorde deſſelben beſchriebenen Kreisſectoren. Setzt man in dieſen Proportionen ſtatt der Größen im zweyten und vierten Gliede ihre Gränzen, ſo verhält ſich die halbe Kugelfläche zu der ſpiraliſchen Area, wie der Quadrant des größten Kreiſes der Kugel zu dem Abſchnitte über der Chorde des Quadranten. Nun iſt die halbe Kugelfläche 8mal ſo groß, als der Quadrant des größten Kugelkreiſes, folglich auch die ſpiraliſche Area das Achtfache des Kreisſegments, das die Chorde des Quadranten zur Grundlinie hat.

Der Hülfsſatz, den Pappus zu der Auflöſung der Aufgabe über die ſpiraliſche Area gebraucht, verdient in die Elementar-Geometrie aufgenommen zu werden. Die von Ferrarius angegebenen Circulartransverſalen (Käſtners aſtronomiſche Abhandl. Zweyte Sammlung, Seite 171) gründen ſich auf den Satz. Hier folgt er, aber allgemeiner als ihn Pappus vorgetragen hat.

Es iſt ABM (Fig. 42.) ein Kreisbogen mit dem Halbmeſſer CA beſchrieben. Aus dem Puncte B des Umfanges werde mit der Chorde AB der Kreisbogen AN gezogen. Auf dieſem nehme man zwey Puncte, D, E, und ziehe die Halbmeſſer BD, BE, welche den erſtern Kreis in F, G ſchneiden: es iſt AD : AE = AF : AG.

Denn es iſt der W. ABD oder ABF halb ſo groß als der Winkel am Mittelpuncte, ACF, der mit ihm auf demſelben Bogen AF ſteht, (Kreis, 19.), und der W. ABE = $\frac{1}{2}$ ACG. Nun iſt AD : AE = ABD : ABE, und AF : AG = ACF : ACG = 2ABD : 2ABE. Alſo iſt AD : AE = AF : AG.

Der Radius BH des Kreiſes AN treffe den AM in K jenſeits B von A aus, ſo iſt ebenfalls AD : AH = AF : AK. — Denn der Nebenwinkel ABK von ABH ſteht auf der Ergänzung des Bogens ABK zum Kreisumfange, und iſt halb ſo groß als die Ergänzung von ACK zu vier Rechten. Die Ergänzung jenes zu zwey Rechten, oder der W. ABH iſt alſo halb ſo groß als ACK. Nun iſt AD : AH = ABD : ABH, und AF : AK = ACF : ACK = 2ABD : 2ABH, alſo AD : AH = AF : AK.

Über dieſe Form von Curven verdienen noch beſondere Abhandlungen angeführt zu werden.

Nouvelle formation de Spirales, beaucoup plus différentes entr' elles que tout ce qu' on peut imaginer d'autres Courbes quelconques à l'infini, par Varignon, Mém. de l'Acad. des Sciences, 1704.

V. ſetzt die Bogen auf dem Kreiſe den Ordinaten einer angenommenen krummen Linie proportional, und macht die Radios der Spirale den Abſciſſen dieſer Linie gleich.

Sur la Spirale d'Archimede décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la Cycloide, par Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences, 1740.

Ein Kreis rollt auf einer geraden Linie (in ſeiner Ebene) fort. Man ſucht die Curve, die ein außer ihm befeſtigter Stift auf deſſen Ebene beſchreibt. Iſt der Stift in der Höhe des Mittelpuncts befeſtigt, ſo iſt die Curve eine archimediſche Spirale.

Brendelius de analogia lineae spiralis et parabolae, Göttingae 1741. Ein Einladungsprogramm.

De lineis spiralibus specimen, ad disputandum proposuit F. C. Hausmann. Lipsiae 1790.

De ſpirali logarithmica, ſpecimen academicum, auct. F. J. E. Schulz, Regiomonti, 1800.

Spiriſche Oberfläche iſt diejenige des ringförmigen Körpers, welcher entſteht, wenn ein Kreis ſich um eine in der Ebene deſſelben befindliche gerade Linie dreht, die nicht durch deſſen Mittelpunct geht. Es ſind drey Arten dieſer Oberfläche. Denn die Axe der Drehung liegt entweder innerhalb des Kreiſes, oder berührt ihn, oder liegt auſſerhalb deſſelben. Ein alter griechiſcher Geometer, Perſeus, hat dieſe Oberfläche erdacht und die Figuren ihrer Durchſchnittslinien mit Ebenen unterſucht. Proclus in ſeinem Commentar über das erſte Buch des Euklides erwähnt ihrer verſchiedentlich, pag. 64. 68, und ſonſt. Er führt einen Denkſpruch (epigramma) an, das auf dieſe Linien von dem Erfinder derſelben gemacht iſt;

Tres lineas praeter quinque ſectiones (ἐπι πεντε τομαις) cum inveniſſet
Perſeus, harum cauſa Diis ſacrificavit.

Die hier genannten fünf Schnitte, denen Perſeus ſeine ſpiriſchen Linien hinzugethan hat, ſind ohne Zweifel die Kegelſchnitte, die Schnitte durch die Spitze und parallel der Grundfläche des Kegels mitgezählt. Man muß übrigens dieſe ſpiriſchen Linien nicht mit den Spiralen, wovon der vorhergehende Artikel handelt, vermengen, wie von einigen Geometern geſchehen iſt. Proclus macht dreyerley Formen derſelben nahmhaft; eine verſchlungene, in Geſtalt unſrer Ziffer 8; eine, die in der Mitte breiter als an den Enden iſt; und eine länglichte, an den Enden breiter als in der Mitte In Montücla's Geſchichte der Mathematik, T. I. Pl. 10. der zweyten Ausgabe, ſind ſechs verſchiedene Formen dieſer krummen Linien gezeichnet. Da man in der Baukunſt Tonnengewölbe um eine Spindel ſo führt, daß ihre Axe kreisförmig gebogen wird, ſo kommen die ſpiriſchen Oberflächen und Linien

in der Lehre vom Steinſchnitt vor. Frezier Traité de Stereónomie T. I. p. 37. et 162; T. II. p. 409.

Es iſt AEB (Fig. 43.) ein Halbkreis, deſſen Mittelpunct C iſt. Er wird um die auf den Durchmeſſer AB ſenkrechte DE gedreht, wodurch der Bogen AE die krumme Oberfläche eines Körpers beſchreibt. Eine gleiche entſteht durch die Umdrehung des auf der andern Seite von dem Durchmeſſer AB befindlichen Halbkreiſes um die durch D auf AB ſenkrechte, der DE gleiche Ordinate.

Die Gleichung für dieſe krumme Oberfläche, zwiſchen drey ſenkrecht zuſammen geſtellten Ordinaten, zu finden, gedenke man ſich eine auf die Ebene des Halbkreiſes AEB ſenkrechte durch AB gelegte Ebene AMDB (man biege die Zeichnung längs der AB rechtwinklicht), und nehme dieſe zu der feſten Ebene zweyer Coordinaten, wie DN, NP. Durch den Anfang D der Ordinaten DN und den Endpunct P der NP ziehe man die gerade DPM, und ſtelle das Kreis-Segment AED, durch die Drehung um DE, über DM. Nimmt man auf AB von D aus dem Theil DQ = DP, ſo iſt die auf AB, in der Ebene AEB, durch Q ſenkrechte QR die zu den beiden DN, NP gehörige, auf ihre Ebene durch P ſenkrechte, dritte Coordinate für die krumme Oberfläche. So läßt ſich für jeden Punct der Grundfläche AMDB, welche das Segment DA des Durchmeſſers AB beſchreibt, der zugehörige Punct der krummen Oberfläche angeben.

Es ſey der Halbmeſſer AC = a, der Abſtand CD der Drehungsaxe DE von C = b; die drey Coordinaten, DN = x; NP = y; QR = z. Es iſt DP = $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, oder zur Abkürzung, DP = u. Da BD = a — b iſt, ſo iſt BQ = a — b + u, und AQ = a + b — u. Es iſt $QR^2 = AQ \times QB$, (Kreis, 28), das iſt

$$z^2 = (a + b - u)\,(a - b + u),\ \text{oder}$$

$$z^2 = a^2 - (u - b)^2\text{, und}$$
$$z^2 + u^2 - a^2 + b^2 = 2bu.$$

Für u den Werth zurückgeſetzt, iſt

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2 = 2b\sqrt{(x^2 + y^2)},$$

die Gleichung für die ſpiriſche Oberfläche, welche vom vierten Grade iſt, da bey der Entwickelung, durch Quadrirung auf beiden Seiten, die veränderlichen Größen auf die vierte Potenz ſteigen. Sie iſt

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$$
$$- 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2b^2(x^2 + y^2 - z^2)$$
$$+ (a^2 - b^2) = 0.$$

Zur Erfindung der Gleichung iſt es gleichgültig, ob b ſo wie in der Figur, das iſt, poſitiv, oder negativ, zwiſchen C und A, genommen wird. Das letztere iſt der Fall, wenn man die durch die Drehung von BE um DE erzeugte Oberfläche betrachtet. Iſt die in B den Kreis berührende die Drehungsaxe, ſo iſt $b = a$, und die Gleichung iſt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{(x^2 + y^2)},$$

Wenn die Drehungsaxe auſſerhalb des Kreiſes liegt, oder D über B hinausgenommen wird, ſo bleibt die Rechnung ganz dieſelbe. Es iſt alsdann $BQ = u - (b - a) = u + a - b.$

Die Gleichung vom vierten Grade iſt hier eine vom zweyten für die Quadrate der Coordinaten. Die Wurzeln dieſer quadratiſchen Gleichungen ſind nicht blos mögliche Größen, ſondern haben auch poſitive Werthe. Das Quadrat der Ordinate z, welche mit der Drehungsaxe parallel iſt, bekommt nur einen möglichen Werth. Denn dieſe wird durch eine reine quadratiſche Gleichung, beſtimmt, nämlich $z^2 = a^2 - (u - b)^2$, oder welches daſſelbe iſt, $z^2 = a^2 - (b - u)^2$. Die Entſtehungsart des Körpers zeigt auch, daß die mit der Drehungsaxe parallele Ordinate

nur zwey gleiche, ſich entgegengeſetzte Werthe haben kann. Aber x^2 und y^2 können jedes zwey verſchiedene Werthe erhalten, die Ordinaten ſelbſt vier, von welchen zwey und zwey ſich gleich, aber entgegengeſetzt ſind. Man ſetze durch die Drehungsaxe eine Ebene ſenkrecht auf die Ebene des Halbkreiſes AEB, und nehme in dieſer die Ordinaten y und z, die letztern auf DE von D an, die y durch ihren Endpunct ſenkrecht auf DE. Die Ordinate x iſt auf die Ebene der y und z ſenkrecht, oder der Ebene AEB parallel in dem Abſtande y, wie es vorher z war. Iſt z kleiner als DE, (in dem Falle der Figur), ſo trifft die Ordinate x die Oberfläche des Körpers nur zweymahl, und x hat nur zwey mögliche, entgegengeſetzte Werthe. Iſt z größer als DE, doch kleiner als der Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes, ſo trifft die Ordinate x die Oberfläche viermahl. In dem Falle, da DE auſſerhalb des erzeugenden Kreiſes fällt, hat x immer vier mögliche Werthe, wenn y und z mögliche Ordinaten ſind. — Nimmt man die Coordinaten x und z in der Ebene des Halbkreiſes AEB, jene auf AB von D aus, dieſe durch den Endpunct von x auf AB ſenkrecht, und die y durch den Endpunct der z ſenkrecht auf AEB, ſo verhält es ſich mit den y wie vorher mit den x. Die Ebene AEB iſt nun was vorher die durch DE auf ſie ſenkrecht geſtellte. Die Durchſchnitte des Körpers mit Ebenen durch die Drehungsaxe ſind ſich alle gleich.

Man wird ſich dieſes deutlicher machen, wenn man das Kreisſtück AEDA auch auf die andere Seite von DE zeichnet, und die drey Fälle der Drehung jeden nimmt. Der hier betrachtete Körper mag, als ein gutes Beyſpiel der Anwendung der Rechnung auf die Geometrie der Oberflächen, Aufmerkſamkeit verdienen. Man vergleiche noch in dem Artikel, krumme Fläche den Abſchnitt §. 38 — 48. — In Montúcla's Geſchichte der Mathematik, Th. III. S. 92 iſt ein Beyſpiel zur Berechnung eines Durchſchnittes des Kör-

pers gegeben, der durch die Umdrehung eines Kreiſes um eine berührende entſteht. In der Gleichung muß aber ſtatt $+ \frac{2}{2} r^2 y^2$ und $\frac{5}{4} r^4$ geſetzt werden $- \frac{7}{2} r^2 y^2$ und $\frac{15}{16} r^4$. Die Folgerungen bleiben dennoch richtig.

Spitz (acutus) heißt ein Winkel zweyer geraden Linien, der kleiner als ein rechter iſt; ein Winkel zweyer krummen, wo der Winkel der berührenden geraden an dem Durchſchnittspuncte ein ſolcher iſt.

Spitze eines ebenen Winkels iſt der Punct, in welchem die geraden Linien, die ihn bilden, ſich ſchneiden.

Spitze eines Kegels iſt der Punct, in welchem die Seiten deſſelben zuſammen kommen.

Spitze (cuspis) an einer krummen Linie iſt ein Punct, worin zwey Zweige an einer gemeinſchaftlichen Berührenden geraden zuſammenlaufen und ſich daſelbſt endigen. Ein ſolcher iſt an der Ciſſoide, an der Parabola semicubica, (ſ. Parabeln höherer Art), an der Conchoide. Ein Knoten an einer krummen Linie, in welchem ſich zwey zuſammenhängende Zweige derſelben ſchneiden, geht in eine Spitze über, wenn die rundliche Figur, die ſie neben dem Durchſchnittspuncte bilden, ſich in einen einzigen Punct zuſammenzieht.

Springer auf dem Schachbrette, wie er von einem gegebenen Felde durch alle übrigen geführt werden möge ohne irgend eines zweymahl zu treffen, iſt eine Aufgabe aus der Analyſis der Lage. Sie ſcheint vielleicht eine bloße Spielerey, und iſt auch nur in ſo fern merkwürdig, als man bey ihrer Auflöſung nach Gründen verfahren, und eine Art von Rechnung dabey anwenden kann, deren ſie anfangs nicht fähig zu ſeyn ſcheint. Nicht ſie an ſich ſelbſt, ſondern die Kunſt der Auflöſung iſt es, warum der Mathematiker wichtigere Unterſuchungen durch ſie unterbricht.

Euler hat die Aufgabe nicht unwerth gefunden, ſich mit ihr zu beſchäftigen, und hat über ſie eine Auflöſung in den Mémoires de l'Academie de Berlin, Tom. XV, année 1759, geliefert, worin er ſie ſelbſt durch hinzugefügte Bedingungen ſchwerer macht. In einer Geſellſchaft ward ſie von jemanden vorgetragen, der verſicherte, daß er ſie auflöſen könnte, man möchte ihm, welches Feld es ſey, vorgeben, um darauf anzufangen, es auch leiſtete. Euler fand nach vielen Verſuchen einen Gang, der Genüge that, aber nur dieſen. Allein es müſſen beſtimmte und ſichere Vorſchriften zur Auflöſung in jedem Falle geliefert werden. Euler iſt dazu auf einem ganz beſondern Wege gekommen, worauf Bertrand aus Genf ihn geleitet hat. Das Verfahren verdient deſto mehr bemerkt zu werden, weil es von einer ganz beſondern Art iſt. Ehe ich davon, ſo gut es möglich iſt, einen Begriff gebe, will ich eine artige ſymmetriſche Anordnung des Ganges für den Springer darſtellen, welche ich aus einer kleinen Schrift: Solution du probleme du Cavalier au jeu des echecs, par Mr. C*** (Colini), à Mannheim, 1773. 8. (60. pag), genommen habe, mit unweſentlichen Abänderungen, um den Gang des Springers deutlicher zu machen.

1. Man ſondere innerhalb des Schachbrettes ein Quadrat von 16 Feldern gleichförmig ab, ſo daß ringsherum eine Einfaſſung von zwey Streifen bleibe. In je zwey neben einander liegenden Streifen kann der Springer 4 Schritte, und in der ganzen Einfaſſung 12 Schritte thun, und nach jeden 12 Schritten bleibt ein Gang in das Viereck frey. In dieſem kann er je 4 Schritte thun, und nach je 4 Schritten bleibt ein Gang in der Einfaſſung frey. Auf ſolche Art wird der Springer durch alle 64 Felder geführt, ohne je eines zweymahl zu treffen. Es läßt ſich dieſes auf mancherley Weiſe bewerkſtelligen. Hier folgt eine Anordnung, welche die meiſte Symmetrie gewähren wird.

D C

36	23	54	9	38	21	56	7
53	10	37	22	55	8	39	20
24	35	14	63	30	47	6	57
11	52	31	46	15	64	19	40
34	25	62	13	48	29	58	5
51	12	45	32	61	16	41	18
26	33	2	49	28	43	4	59
1	50	27	44	3	60	17	42

A B

Die Zahlen 1...12 und 17...28, folgen nach der Ordnung der Ecken ABCD auf einander, die Zahlen 33...44, und 49...60, nach der entgegengeſetzten Ordnung ADCB. In dem innern Viereck folgen allein die Zahlen 29...32 nach der Ordnung ABCD. Die Zahlen in den Feldern des innern Quadrats bilden recht ſymmetriſch je vier, theils ein rechtwinklichtes, theils ein verſchobenes gleichſeitiges Viereck. Man bemerke auch noch, welche Zahlen in die Diagonalen AC, BD, fallen.

2. Der Verfaſſer der angeführten Schrift fügt noch einige Behandlungen der Aufgabe bey, wenn ſie durch gewiſſe Bedingungen erſchwert wird. Seine Auflöſungen ſind aber blos empiriſch, nur auf den hier beſchriebenen Gang des Springers gegründet, ohne mathematiſche Hülfsmittel. Euler gebraucht hier, wie es von ihm zu erwarten iſt, ein eigenes, der Aufgabe angemeſſenes Verfahren, um ſie ſelbſt mit ſehr erſchwerenden Bedingungen aufzulöſen. Einiges, was ſich davon in der Kürze erklären läßt, mag hier, wegen der Beſonderheit der Unterſuchung, Platz finden.

3. Zuerſt bemerkt Euler, daß, wenn der Aufgabe auf irgend eine Art Genüge geſchehen iſt, daraus

noch mancherley Abänderungen des Ganges hergeleitet werden können. Von einem Felde, aus welchem bis zu dem letzten dem Springer ein Schritt geſtattet iſt, läßt ſich die Folge der Felder umkehren. In unſerm Exempel (1) ſind unter andern ſolche Felder, 13 und 41. Man bezeichne die Felder des Schachbrettes durch die in jenem Exempel darin geſetzten Zahlen, deren natürliche Folge alſo den darin angenommenen Gang des Springers angiebt, ſo entſtehen aus dem urſprünglichen Gange,

1 . . . 13 . . . 41 64,

ſolchergeſtalt die neuen:

1 . . . 13 . 64 . . . . 14, und
1 . . . 41 . 64 . . . . 42.

Denn der Springer kann denſelben Weg, den er von einem Felde an bis zu dem letzten genommen hat, auch in entgegengeſetzter Richtung machen, der umgekehrte Weg muß ſich nur an den vorhergehenden anſchließen können. Da das Anfangsglied der Zahlenreihe auch als das Schlußglied angeſehen werden kann, ſo läßt ſich der urſprüngliche Gang des Springers auch in folgenden abändern:

11 . . . 1 . 12 . . . . 64.

Es iſt nämlich aus 1 in 12 ein Schritt geſtattet.

4. Aus einer abgeänderten Folge laſſen ſich durch Verſetzung jedes der äußerſten Glieder wieder neue herleiten. Aus der Folge,

1 . . . 13 . 64 . . . 14,

entſteht, da 14 ſich an 25 ſchließt, die neue,

1 . . . 13 . 64 . . . 25 . 14 . . . 24.

Die Zahl 24 ſchließt ſich an 37; daher entſteht aus dieſer die neue,

1 . . 13 . 64 . . 37 . 24 . . 14 . 25 . . 36.

Da 14 ſich an 11 ſchließt, ſo giebt die Folge,

1 . . . 13 . 64 . . . 14,

die neue,

1 . . 11 . 14 . . . 64 . 13 . 12.,

welche zugleich eine in ſich wiederkehrende iſt.

5. Durch Verſetzungen dieſer Art kann man das letzte (oder das erſte) Feld des Springers irgend wohin verlegen. Man bemerke nur, daß wegen des Umkehrens die letzte Zahl der neuen Folge um Eins größer oder kleiner iſt als die Zahl, womit die letzte Zahl in der vorhergehenden Folge zuſammen hängt. Z. B. das Schlußfeld ſollte irgendwohin, als in 32, fallen. Es iſt:

A. 1 . . . 13 . . . 64.
B. 1 . . 13 . 64 . . . 14.
C. 1 . . 9 . 14 . . . 64 . 13 . . 10.
D. 1 . . 9 . 14 . . 31 . 10 . . 13 . 64 . . . 32,

womit der Forderung ein Genüge geſchehen iſt. In andern Fällen mag man den urſprünglichen Gang des Springers öfter unterbrechen müſſen, als es hier nöthig war, gerade bey einem zufällig gewählten Schlußfelde.

6. Durch eben dieſes Mittel kann ein gegebener Gang in einen zuſammenhängenden, in ſich wiederkehrenden, bey welchem der Springer von irgend einem gegebenen Felde ausgehen kann, verwandelt werden. Denn hier ſind durch das Anfangsfeld die Schlußfelder beſtimmt, deren es, nach der Lage jenes, ſieben, fünf, drey oder eines giebt.

7. Euler begnügt ſich aber nicht damit. Dieſen Weg, der noch immer zu viel empiriſches hat, angewieſen zu haben; er zeigt auch einen ganz ſichern beſtimmten, bey dem er das vorher gebrauchte Verfahren der Verwandlung einer gegebenen Reihe benutzt. Es iſt eine ganz beſondere Art von Analyſis unbeſtimmter Größen. Manchen, welchen die große Sammlung der Berliniſchen akademiſchen Schriften nicht zur Hand iſt, möchte es angenehm ſeyn, davon einen Begriff zu erhalten, welchen ich hier zu geben verſuchen will, indem ich zugleich eine oder die andere Erläuterung beyfüge.

8. Unſer allgemeine Analyſt führt von irgend einem Anfangsfelde den Springer ſo weit als es angeht, und füllt die leer gebliebenen Felder mit Buchſtaben aus, wie in der folgenden Anordnung des Ganges

34	21	54	9	32	19	48	7
55	10	33	20	53	8	31	18
22	35	62	a	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	37	2	43	14	27	4	45
1	b	13	26	3	44	15	28

Die Folge der Felder von 1 bis 62, durch welche der Springer geführt iſt, kann man eben ſo wie vorher die Folge von 1 bis 64 in eine andere verwandeln, in welcher das letzte Feld ein gegebenes iſt. Dieſes laſſe man ein ſolches ſeyn, aus welchem der Springer in das Feld a (oder b) übergehen kann. Zu dieſer umgewandelten Folge läßt ſich nun das Feld a (oder b) ſetzen, ſo erhält man eine Folge von 63 Feldern. Mit dieſer verfahre man auf gleiche Art, indem man ſie in eine andere umwandelt, in welcher das letzte Feld einen Übergang in b (oder a) geſtattet. Dieſes zu der Folge geſetzt, iſt der Springer durch alle 64 Felder geführt. — Wären mehr als zwey Felder leer geblieben, ſo würde man dieſes Verfahren wiederholen, bis daß man zu dem letzten gelangt iſt.

9. In unſerm Beyſpiele iſt 10 ein Feld, welches ſich an a ſchließt, dem Gange des Springers gemäß. In der Folge, 1 . . . . 62, iſt 9 ein Feld, welches ſich an 10 und zugleich an 62 ſchließt. Daher kann man ſie in dieſe,

A. 1 . . . 9 . 62 10,

umwandeln, welcher man das Feld a anhängeu darf. Die vergrößerte Folge von Feldern iſt nun,

B. 1 . . . 9 . 62 . . . . 10 . a.

Dieſe wandle man nun in eine ſolche um, an welcheſich das Feld b hängen läßt. Man ſuche zweyFelder, eines für a, das andere für b beſchreitbar, deren Zahl um 1 unterſchieden ſind. Nur muß, wofern die Zahl für b in die Reihe 62 . . . . 10 fällt, die Zahl für a die größere ſeyn, weil die Reihe von 62 an eine fallende iſt. Zwey ſolche Zahlen ſind 58 und 57. Nun wandle man die letztere Folge in dieſe um:

C. 1 . . . 9 . 62 . . . 58 . a . 10 . . . . 57.

Dieſer darf man das durch b bezeichnete Feld zuſetzen, und die vollſtändige Folge aller Felder, dem Gange des Springers gemäß, iſt

D. 1 . . . 9 . 62 . . . 58 . a . 10 . . . . 57 . b.

Bezeichnet man die Felder nach der natürlichen Ordnung der Zahlen, ſo hat man dieſen durch die Folge,

E. 1 . . . 9 . 10 . . . 14 . 15 . 16 . . . 63 . 64, bezeichneten Gang.

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	4	1	48	45	5	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	1	34

10. Wenn a und b nicht durch zwey Felder, wie hier durch 58 und 57, verbunden werden könnten, ſo müßte man die Reihe B in eine andere umwandeln, deren Endzahl mit b auf ſolche Art verbunden werden könnte.

Eine

Eine andere Art, wie alle Felder nach der Bezeichnung in (8) beſchritten werden können, iſt

A. 1 . . . 53 . 62 . . . . 54 . a;

B. 1 . . . 53 . 62 . . . 58 . a . 54 . . . 57 . b.

Noch eine iſt

A. 1 . . . 55 . 62 . . 56 . a;

B. 1 . . . 55 . 62 . . 58 . a . 56 . 57 . b,

welche nun wieder durch die natürliche Zahlenordnung dargeſtellt werden können.

11. Euler verwandelt hierauf etwas mühſam die Folge E in (9) in verſchiedene Folgen, die in ſich zurücklaufen.

Da er ſo weit der Aufgabe Meiſter war, machte er ſie durch hinzugefügte Bedingungen ſchwerer. Eine ſolche iſt, daß die Zahlen in Feldern, welche in Abſicht auf die entgegengeſetzten Ecken des Vierecks einerley Lage haben, denſelben Unterſchied, welcher 32 iſt, haben ſollen. Euler ſetzt die Zahlen 1, 33; 2, 34; 3, 35; u. ſ. f. auch die 64, 32; 63, 31; 62, 30, u. ſ. f. gehörig in die Felder, ſo weit es thunlich iſt; in die leer gebliebenen Felder ſetzt er ſchicklich gewählte Buchſtaben, welche nach einander auf ähnliche Art an die umgewandelten Folgen angehängt werden, wie vorher die Buchſtaben a und b. So entſtehen zwey zuſammen gehörige, aus Zahlen und Buchſtaben gemiſchte Folgen, von deren einer noch das Ende mit dem Anfange der andern zuſammenhängend gemacht werden muß. Die Werthe der durch Buchſtaben bezeichneten Zahlen werden nun durch ihre Stellen in der ganzen Folge beſtimmt, da das erſte Glied Eins genannt wird.

12. Eine neue Bedingung iſt, daß zugleich die durch 1 bis 32 bezeichneten Felder alle in der einen Hälfte des Vierecks, die von 33 bis 64 in der andern ſich finden ſollen. Die beiden Hälften ſeyn durch eine mit der einen Seite des Vierecks Parallele geſchieden.

13. Euler betrachtet noch ein Quadrat von 25 Feldern, um daran, da es kleiner iſt, die Menge der Abänderungen des Ganges, den der Springer nehmen mag, zu zeigen. Darauf giebt er noch einige Beyſpiele, in welchen ſtatt eines Quadrats ein ungleichſeitiges Rechteck genommen iſt. Zuletzt bemerkt er, daß die Aufgabe auch für andere Figuren als Rechtecke Statt finde. Die Figuren in den dazu gegebenen Beyſpielen entſtehen aus Quadraten, in welchen die Eckfelder weggeſchnitten ſind; eine bildet ein gleicharmiges Kreuz von 20 Feldern. Der Gang des Springers in dieſen Figuren iſt zugleich wiederkehrend.

14. Vandermonde, ehemahliges Mitglied des franzöſiſchen National-Inſtituts, vorher der Akademie der Wiſſenſchaften (geboren zu Paris, 1735, geſtorben im 4ten Jahre der Rep.), hat ſich in den Mém. de Paris für 1771 auch mit dieſer Aufgabe, als eines Falles für die Geometrie der Lage, beſchäftigt, und ſolche vornehmlich durch eine ſchickliche Bezeichnung der Felder des Schachbretts, wobey jedes Feld durch zwey Zahlen, welche anzeigen, das wie vielte es in horizontaler und verticaler Richtung iſt, angedeutet wird, zu einer bloßen Sache des Calculs zu machen geſucht, da Eulers Behandlung der Aufgabe vorausſetzt, daß man das Schachbrett vor Augen habe.

15. In den Miscellaneis Berolinensibus, 1710, iſt ein Aufſatz von Leibnitz enthalten: Annotatio de quibusdam ludis, inprimis de Ludo quodam Sinico, cet. Er erwähnt darin des zu ſeiner Zeit bekannt gewordenen, Solitaire genannten, einſiedleriſchen Spiels, und ſchlägt eine Abänderung deſſelben vor, bey welcher man nach geometriſchen Gründen möchte verfahren können. Zu jenem Spiele dient eine Tafel, die eine Anzahl Löcher enthält, in welche, bis auf eines, Pflöckchen geſteckt worden. Dieſe ſind eins nach dem andern herauszunehmen, welches geſchieht, wenn neben jenem ein Loch offen iſt, in welches ein Nach-

bar über ihn hin ſpringen kann, auf ähnliche Art, wie in dem Damenſpiele ein Stein genommen wird. Es muß zuletzt nur ein einziges Pflöckchen übrig bleiben. Die Abänderung, die Leibnitz vorſchlägt, beſteht in einer Umkehrung. Die Tafel werde ganz leer gelaſſen. In eines der Löcher wird ein Pflöckchen geſteckt; nach dieſem werden die übrigen auf eben die Art geſteckt, wie ſie vorher herausgenommen wurden. So ſoll die ganze Tafel angefüllt werden, oder, welches noch künſtlicher ſeyn möchte, es ſoll durch die Pflöckchen eine gegebene Figur, als ein Dreyeck, Viereck, Achteck, hervorgebracht werden, wofern es möglich iſt. Atque hoc ipsum, ſetzt L. hinzu, magnae artis esset praevidere quid praestari posset; haberetque aliquid inprimis Geometricum hic processus. Sed ego ad profectum inventricis artis ludendi artificia detexisse, non ludum valde exercuisse laudarem.

Stereographiſche Projection iſt eine perſpectiviſche Entwerfung der Kugelfläche auf die Ebene eines ihrer größten Kreiſe, nach deſſen einem Pole, als dem Orte des Auges, die Entwerfungslinie gezogen werden.

1. Es ſey ANBO (Fig. 44) ein größter Kreis der Kugel, C der Mittelpunct, AB, ON zwey auf einander ſenkrechte Durchmeſſer deſſelben. Das Auge befinde ſich in O, ſo fällt AB in die Tafel *), und die Projection eines Punctes F auf dem Kreiſe ANBO iſt der Punct P der AB, in welchem ſie von der OF geſchnitten wird.

2. Man ſetze den Abſtand des Punctes F von dem dem Auge entgegengeſetzten Pole N des größten in die Tafel fallenden Kreiſes, welcher kurz der Grundkreis heißen kann, das iſt, der Bogen NF = g, den Halbmeſſer der

*) Wenn Entwerfungslinie die gerade vom Auge nach einem zu entwerfenden Puncte bezeichnet, ſo iſt Entwerfungsebene die Ebene durch's Auge und eine zu entwerfende gerade; alſo nicht mit Tafel einerley. Dieſe iſt die Ebene des Entwurfs, der Projection oder die Projectionsebene.

Kugel CA = CN = r. Da COP = ½ NCF, ſo iſt CP = r tang ½ g. Für g = o iſt CP = o, oder die Projection von N fällt in C. Wird F an der andern Seite von ON, nach A zu, genommen, ſo iſt g, ſo wie CP negativ, und P fällt in CA. Für Puncte in dem Halbkreiſe des Auges AOB iſt g > 90° und CP > r, ihre Projectionen fallen alſo außerhalb des Grundkreiſes.

3. Die Projection eines Kreiſes, welcher durch das Auge geht, iſt eine gerade Linie, der Durchſchnitt nämlich der Tafel mit der Ebene des Kreiſes. Iſt der Kreis ein größter, wie ANBO, deſſen Ebene alſo ſenkrecht auf die Tafel iſt, ſo iſt ſeine Projection der zu beiden Seiten verlängerte Durchmeſſer des Grundkreiſes AB, in welchem dieſer von jenem geſchnitten wird. Nämlich der Durchmeſſer AB ſelbſt iſt die Projection des Halbkreiſes ANB, ſeine Verlängerungen zu beiden Seiten aber ſind die Projectionen der Quadranten OA, OB. (2).

4. Es ſey F die Mitte des Bogens DE, ſo iſt die Sehne DE zugleich der Durchmeſſer eines nicht durch das Auge gehenden Kugelkreiſes, deſſen einer Pol F iſt, und deſſen halber Umfang DIE ſey. Die Projection dieſes Kreiſes iſt der Durchſchnitt der Tafel mit dem Kegel, deſſen Spitze O, Grundfläche der Kreis DIE iſt, und in deſſen Seitenfläche alle von O nach dem Umfange des Kreiſes DIED gezogene Entwerfungslinien liegen, die Projection des Durchmeſſers DE aber iſt das Stück GH der AB, welches OD, OE zwiſchen ſich abſchneiden. Da der Winkel OGH als Complement von GOC zu ſeinem Maße den Quadranten AN weniger den halben Bogen ND, das iſt, die Hälfte des Bogens DAO hat, eben dieſe Hälfte aber auch das Maß des Winkels DEO iſt, ſo iſt OGH = DEO, und aus gleichen Gründen, oder weil die Dreyecke OGH, ODE wegen des gemeinſchaftlichen Winkels O und der gleichen Winkel OGH, DEO ähnlich ſind, GHO = ODE, folglich GH und DE antiparallel. Nun ſind die Ebene des Kreiſes DIE oder die

Grundfläche des Kegels und die Ebene des Schnitts oder die Tafel ſenkrecht auf die Ebene des Dreyecks ODE, in welcher die Axe des Kegels liegt, folglich iſt der Schnitt des Kegels mit der Tafel ein Wechſelſchnitt deſſelben (Kegel, 9.), mithin ein Kreis vom Durchmeſſer GH. (daſ. 8).

Jeder nicht durch das Auge gehende Kugelkreis wird alſo in einen Kreis projicirt, deſſen Durchmeſſer in den Durchſchnitt der Tafel mit demjenigen größten Kreiſe der Kugel fällt, welcher durch die Pole des Grundkreiſes und des projicirten Kreiſes geht.

5. Wird der Abſtand der Puncte des Kugelkreiſes DIE von dem Pole F, der Bogen DF oder FE $= u$ geſetzt, ſo iſt $DN = u - g$, $NE = u + g$, alſo $CG = r \tan \frac{1}{2}(u - g)$, $CH = r \tan \frac{1}{2}(u + g)$, und $GH = r(\tan \frac{1}{2}(u - g) + \tan \frac{1}{2}(u + g))$ $= \frac{r(\sin u - \sin g) + r(\sin u + \sin g)}{\cos g + \cos u}$ (Goniometrie, 30.) $= \frac{2r \sin u}{\cos g + \cos u}$. Der Halbmeſſer der Projection iſt alſo $= \frac{r \sin u}{\cos g + \cos u}$, und der Abſtand des Mittelpuncts derſelben von C, dem Mittelpuncte des Grundkreiſes, $= \frac{r(\sin u + \sin g) - r \sin u}{\cos g + \cos u}$ $= \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u}$. Fällt F in N, ſo daß der entworfene Kreis dem Grundkreiſe parallel iſt, ſo iſt $g = 0$, der Mittelpunct der Projection fällt in C, und der Halbmeſſer derſelben iſt $= \frac{r \sin u}{1 + \cos u} = r \tan \frac{1}{2} u$ (Goniometrie, 38). In dieſem Falle nämlich iſt der Kegel ODIE gerade, und der Schnitt deſſelben mit der Tafel der Grundfläche parallel.

6. Für einen größten Kreis iſt in (5) $u = 90°$, folglich der Halbmeſſer der Projection deſſelben $= \frac{r}{\cos g} = r \sec g$, der Abſtand des Mittelpuncts der Projection von C aber $= \frac{r \sin g}{\cos g} = r \tang g$.

7. Setzt man $u = 0$, ſo giebt dies die Projection des Pols F, deren Abſtand von $C = \frac{r \sin g}{1 + \cos g} = r \tang \frac{1}{2} g$, wie in (2), iſt. Für die Projection des dem Auge näheren Pols f iſt $u = 180°$, alſo der Abſtand derſelben von $C = \frac{r \sin g}{\cos g - 1} = - r \cot \frac{1}{2} g$, wo die Negation anzeigt, daß die Projection an die entgegengeſetzte Seite von C oder in die verlängerte CA fällt.

8. Analytiſch erhält man die Reſultate in (4) und (5) ſo. Der Kreis ASBR (Fig. 45) um den Mittelpunct C ſey der Grundkreis, die Durchmeſſer AB, RS deſſelben ſeyn die Durchſchnitte zweyer durch ſeine Pole geführten größten Kreiſe, und auf ihnen P und M die Projectionen zweyer auf dieſen Kreiſen befindlichen Puncte der Kugelfläche F und W *), deren Abſtände von dem Pole N (Fig. 44) g und v ſind. Es iſt demnach $CP = r \tang \frac{1}{2} g$, $CM = r \tang \frac{1}{2} v$. Der Winkel SCB, welcher dem Winkel der beiden Kreiſe auf der Kugel FNW gleich iſt, ſey φ. Man nehme AB zur Abſciſſenaxe, und beziehe darauf die Lage der Puncte, wie M, durch die ſenkrechten Coordinaten $CQ = x$, $QM = y$, ſo iſt

$$x = r \tang \tfrac{1}{2} v \cos \varphi = \frac{r \sin v \cos \varphi}{1 + \cos v}$$

*) Man wird ſich die nöthigen Linien und Puncte, welche in der Zeichnung weggelaſſen ſind, nach Anleitung von Fig. 44 leicht vorſtellen.

$$y = r \tan\tfrac{1}{2} v \sin\varphi = \frac{r \sin v \sin\varphi}{1 + \cos v}.$$

9. Anſtatt die Lage des Punctes W auf der Kugel gegen den größten über AB ſenkrechten Kreis durch den Bogen NW und Winkel WNF zu beſtimmen, werde ſolche jetzt durch den Bogen FW des größten durch F, W geführten Kreiſes und den Winkel NFW beſtimmt. Jener heiße u, dieſer ω. Das ſphäriſche Dreyeck FNW, in welchem NF = g, NW = v, FNW = φ, iſt, giebt die Gleichungen

$$\sin v \sin\varphi = \sin u \sin\omega$$

$$\cot\varphi = \frac{\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos\omega}{\sin u \sin\omega}$$

$$\cos v = \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos\omega.$$

Durch Multiplication der beiden erſten entſteht

$$\sin v \cos\varphi = \sin g \cos u - \cos g \sin u \cos\omega$$

Dadurch und durch die dritte Gleichung wird in (8)

$$x = \frac{r(\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos\omega)}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos\omega}$$

$$y = \frac{r \sin u \sin\omega}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos\omega}.$$

Um nun die Gleichung für den Ort, auf welchen die Projectionen aller Puncte liegen, welche von F einerley Abſtand u haben, das iſt, die Gleichung für die Projection eines Kreiſes, deſſen einer Pol F iſt, zu finden, muß man die eben gefundenen Ausdrücke für die Coordinaten x, y ſo mit einander verbinden, daß der veränderliche Winkel ω herausgeht. Zu dem Ende ſuche man $\cos\omega$ durch x. Es iſt

$$\cos\omega = \frac{r \sin g \cos u - x(1 + \cos g \cos u)}{r \cos g \sin u + x \sin g \sin u}.$$

Nun iſt

$$xx + yy = rr\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{rr(1 - \cos v)}{1 + \cos v} \quad (8)$$

woraus

$$\frac{rr - xx - yy}{rr + xx + yy} = \cos v = \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega$$

wird. Subſtituirt man hier den gefundenen Werth von $\cos \omega$, ſo wird erhalten

$$\frac{rr - xx - yy}{rr + xx + yy} = \frac{r \cos u - x \sin g}{r \cos g + x \sin g}$$

und wenn man jeden dieſer Brüche beſonders von 1 abzieht und auch dazu addirt, und die Differenz durch die Summe dividirt

$$\frac{xx + yy}{rr} = \frac{r(\cos g - \cos u) + 2x \sin g}{r(\cos g + \cos u)}$$

woraus

$$yy + xx - \frac{2rx \sin g}{\cos g + \cos u} = \frac{rr(\cos g - \cos u)}{\cos g + \cos u}$$

oder

$$y^2 + \left(x - \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u}\right)^2 = \left(\frac{r \sin u}{\cos g + \cos u}\right)^2$$

wird, welches die Gleichung für den geſuchten Ort iſt.

Sie gilt für einen Kreis vom Halbmeſſer $\dfrac{r \sin u}{\cos g + \cos u}$, deſſen Mittelpunct in AB fällt und von C um die Größe $\dfrac{r \sin g}{\cos g + \cos u}$ abſteht.

10. Für einen durchs Auge gehenden (kleineren) Kreis iſt $u = 180° - g$, alſo $\cos u = -\cos g$, und $\cos g + \cos u = 0$. Daher wird

$$-2rx \sin g = 2rr \cos g$$

oder $x = -r \cot g$

welches die Gleichung für eine gerade auf AB ſenkrechte Linie in dem Abſtande r cot g von C nach A zu iſt, übereinſtimmig mit (3). Für Kreiſe, die noch näher an den dem Auge nächſten Pol f fallen, als der nur betrachtete, iſt $u = 180° - g + t$ wo $t < g$ iſt, alſo $\cos u = - \cos(g - t)$, folglich der Halbmeſſer der Projection $= \frac{r \sin(g - t)}{\cos g - \cos(g - t)}$, und der Abſtand ihres Mittelpuncts von C $= \frac{r \sin g}{\cos g - \cos(g - t)}$. Beide Größen werden, als Stücke des negativen Theils der Abſciſſenlinie CA, negativ. Die Negation des Halbmeſſers kommt nicht in Betracht, ſondern nur die abſolute Größe deſſelben.

11. Obgleich durch (9) ſchon erwieſen iſt, was erwieſen werden ſollte, daß nämlich die Projection eines Kreiſes wieder ein Kreis iſt, ſo wird es doch nicht unnütz ſeyn, noch die Gleichung für die Projection eines größten durch F gehenden Kreiſes zu ſuchen. Zu dem Ende muß der veränderliche Bogen u aus den Gleichungen für x und y in (9) eliminirt werden, indem für einen und denſelben Kreis ω unveränderlich iſt.

Da

$$\frac{xx + yy}{rr} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}$$

$$= \frac{1 - \cos g \cos u - \sin g \sin u \cos \omega}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}$$

ſo wird

$$\frac{rr - xx - yy}{rr} = \frac{2(\cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega)}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}.$$

Nun iſt

$$\frac{r \sin g}{2x \cos g} = \frac{(1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega) \sin g}{2(\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega) \cos g}$$

folglich durch Multiplication

$$\frac{(rr - xx - yy) \sin g}{2 rx \cos g}$$

$$= \frac{\sin g \cos g \cos u + \sin g^2 \sin u \cos \omega}{\sin g \cos g \cos u - \cos g^2 \sin u \cos \omega}$$

und hieraus

$$\frac{2 rx \cos g}{(rr - xx - yy) \sin g - 2 rx \cos g}$$
$$= \frac{\sin g \cos g \cos u - \cos g^2 \sin u \cos \omega}{\sin u \cos \omega}$$

oder

$$\frac{2 rx \cos \omega}{(rr - xx - yy) \sin g - 2 rx \cos g}$$
$$= \frac{\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega}{\sin u} = \frac{x \sin \omega}{y}$$

woraus man erhält

$$yy + xx + 2 ry \operatorname{cosec} g \cot \omega + 2 rx \cot g = rr$$

oder

$$(y + r \operatorname{cosec} g \cot \omega)^2 + (x + r \cot g)^2 = (r \operatorname{cosec} g \operatorname{cosec} \omega)^2$$

welche Gleichung einem Kreiſe angehört, für welchen die Abſciſſe des Mittelpuncts $= - r \cot g$, die Ordinate $= - r \operatorname{cosec} g \cot \omega$ und der Halbmeſſer $= r \operatorname{cosec} g \times \operatorname{cosec} \omega$ iſt. Da die Abſciſſe des Mittelpuncts blos von g abhängt, ſo liegen die Mittelpuncte aller Kreiſe, welche Projectionen größter durch den Punct F auf der Kugel gehender Kreiſe ſind, in einer geraden auf AB ſenkrechten Linie. Dies erhellt auch daraus, daß alle dieſe Kreiſe die Projection des Durchmeſſers Ff, welche in AB fällt, zur gemeinſchaftlichen Sehne haben.

12. Geht der größte Kreis durch N oder iſt er auf dem Grundkreiſe ſenkrecht, ſo iſt $g = 0$, indem F in N fällt, wodurch φ der Nebenwinkel zu ω wird, und es iſt die Gleichung für die Projection

$$y + x \tang \omega = 0$$

welche einer geraden Linie angehört, die durch den Anfang der Abſciſſen C geht, und die Abſciſſenaxe an der

Seite der poſitiven Abſciſſen und Ordinaten unter dem Winkel $180° - \omega = \varphi$ ſchneidet.

Iſt $\omega = 0$, ſo wird $y = 0$, die Gleichung für die unbeſtimmt zu beiden Seiten verlängerte AB ſelbſt, welche die Projection des Kreiſes ANBO iſt (3).

13. Es ſey L (Fig. 45) der Mittelpunct eines nach (11) entworfenen Kreiſes, LK ſenkrecht auf AB, ſo daß $CK = r \cot g$, $KL = r \operatorname{cosec} g \cot \omega$, ſo iſt $PK = r(\cot g + \cot \frac{1}{2} g) = r \operatorname{cosec} g$ (Goniometrie, 50.) alſo $\tang KLP = \frac{r \operatorname{cosec} g}{r \operatorname{cosec} \cot \omega} = \tang \omega$ folglich $KLP = \omega$. Die berührende der Projection an P, welche ſenkrecht auf LP iſt, macht mit der auf LK ſenkrechten AB einen eben ſo großen Winkel, welcher auch der Winkel der Projection mit AB an dem Durchſchnittspuncte P iſt. Die Projectionen zweyer größten Kreiſe, von denen der eine ſenkrecht auf die Tafel iſt, ſchneiden alſo einander unter demſelben Winkel, wie die Kreiſe auf der Kugel. Hieraus ergiebt ſich, daß die Projectionen irgend zweyer größten Kreiſe einander unter demſelben Winkel ſchneiden, wie die Kreiſe auf der Kugel, den Grundkreis nicht ausgeſchloſſen, deſſen Projection mit ihm ſelbſt einerley iſt.

14. Der geometriſche Beweis dieſer Eigenſchaft ſtereographiſcher Entwürfe iſt folgender.

Die verlängerte DE (Fig. 44) begegne der gleichfalls verlängerten AB in L, und ſchneide OF in K. Da in den Dreyecken OGP, OKE die Winkel DOF, FOE, als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen DF, FE, einander gleich ſind, auch $OGP = KEO$ iſt, ſo iſt $OKE = GPO = KPL$, folglich das Dreyeck KPL gleichſchenklig, und $KL = PL$. Es ſchneide irgend eine andere außer der OANB durch OF gelegte Ebene die Ebene des Kreiſes DIE in LM, die Tafel in PM. Weil die Ebene des Kreiſes DIE und die Tafel ſenkrecht auf der Ebene OANB ſind, ſo iſt auch ihr gemeinſchaftlicher

Durchſchnitt LM ſenkrecht darauf, und die Dreyecke KLM, PLM ſind bey L rechtwinklig. Nun iſt die Seite LM ihnen gemein, und KL = PL, alſo iſt LKM = LPM. Es berühre eine Ebene die Kugel in F, und werde von den Ebenen OKL, OKM in FT, FZ geſchnitten, ſo iſt, weil die Ebenen ZFT, MKL parallel ſind, auch FT der KL, und FZ der KM parallel, folglich der Winkel ZFT = MKL (Ebene, 19. 13) = MPL. Die FT berührt den Kreis ANBO in F, und FZ iſt die Berührende eines größten durch F gehenden Kreiſes FQf, welcher den Kreis ANBO in Ff und unter einem Winkel = ZFT ſchneidet. Daher iſt der Winkel MPL dem Winkel der beiden Kreiſe ANBO und FQf gleich. Weil OF eine Seitenlinie des Kegels iſt, welcher O zur Spitze und den Kreis FQf zur Grundfläche hat, ſo berührt die Ebene OFZ dieſen Kegel, und PM, welche der Durchſchnitt der Berührungsebene mit der Tafel iſt, berührt den Durchſchnitt des Kegels mit der Tafel, das iſt die Projection des Kreiſes FQf. Der Winkel MPL iſt alſo der Winkel dieſer Projection an dem Durchſchnittspuncte P mit der AL, welche die Projection des Kreiſes ANBO iſt. Folglich ſchneiden die Projectionen der beiden größten Kreiſe ANBO und FQf, wovon jener ſenkrecht auf die Tafel iſt, einander unter demſelben Winkel, wie die Kreiſe auf der Kugel. — Der Beweis bleibt gleich dem in (13) auch noch gültig, wenn DE ſenkrecht auf AB iſt, und F und P zugleich entweder in A oder B fallen.

15. Wenn zwey Kugelkreiſe einander berühren, ſo haben ſie in dem Berührungspuncte eine gemeinſchaftliche Berührungslinie. Legt man durch dieſe und durch das Auge eine Ebene, ſo berührt ſolche die beiden Kegel, deren Durchſchnitte mit der Tafel die Projectionen der beiden Kreiſe ſind. Da nun die Seitenflächen beider Kegel blos die Entwerfungslinie nach dem Berührungspuncte gemein haben, ſo haben ihre Durchſchnitte mit der Tafel, das iſt, die Projectionen der beiden Kreiſe blos der Durchſchnitt jener Linie mit der Tafel, das iſt, die Projection des Berührungspunctes gemein, und

der Durchſchnitt der Berührungsebene mit der Tafel, welcher durch die Projection des Berührungspunctes geht, berührt beide Kreiſe, die die Projectionen derer auf der Kugel ſind. Folglich berühren die Projectionen einander in der Projection des Berührungspuncts auf der Kugel.

16. Hieraus folgt, daß überhaupt die Projectionen zweyer Kugelkreiſe einander unter demſelben Winkel ſchneiden, wie die Kreiſe auf der Kugel.

Denn ſchneidet ein größter Kreis der Kugel einen kleineren, ſo ziehe man durch einen der beiden Durchſchnittspuncte einen größten Kreis, welcher den kleineren berührt, ſo ſchneiden die Projectionen der beiden größten Kreiſe einander unter demſelben Winkel wie die Kreiſe auf der Kugel. Nun berührt die Projection des größten Kreiſes, der den kleineren berührt, die Projection dieſes kleineren Kreiſes, und hat mit ihm in dem Berührungspuncte eine gemeinſchaftliche Berührungslinie. Da aber der Winkel zweyer Kreiſe der Winkel ihrer berührenden in den Durchſchnittspuncten iſt, ſo iſt der Winkel der beiden größten Kreiſe auf der Kugel, dem Winkel des einen derſelben mit dem kleineren Kreiſe, welchen der andere berührt, gleich, und eben dies gilt auch von den Projectionen dieſer Kreiſe. Daher ſchneidet die Projection des größten Kreiſes die Projection des kleineren unter demſelben Winkel wie auf der Kugel.

Schneiden zwey kleinere Kreiſe der Kugel einander, ſo ziehe man durch einen der Durchſchnittspuncte größte Kreiſe, welche die kleineren berühren, und der Beweis bleibt.

17. Daß die Projectionen zweyer Kugelkreiſe, wovon der eine oder beide kleinere Kreiſe ſind, einander unter demſelben Winkel ſchneiden, wie die Kreiſe auf der Kugel, läßt ſich auch daraus ableiten, daß die Projection eines größten Kreiſes, welcher ſenkrecht auf einen andern Kugelkreis iſt, folglich durch ſeine Pole geht, die Pro=

jection deſſelben gleichfalls unter einem rechten Winkel ſchneidet. Letzteres erhellt ſo:

Es ſey I der Mittelpunct der Projection eines nach (9) entworfenen Kreiſes, L der Mittelpunct eines nach (11) entworfenen größten Kreiſes, welcher vermöge der dortigen Vorausſetzungen ſenkrecht auf den erſten Kreis iſt, M einer der Durchſchnitte der beiden Projectionen, ſo iſt aus (9)

$$CI = \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u},\ IM = \frac{r \sin u}{\cos g + \cos u},$$

und aus (11) $CK = r \cot g$, $KL = r \operatorname{cosec} g \cot \omega$, $LM = r \operatorname{cosec} g \operatorname{cosec} \omega$,

mithin $KI = \dfrac{r(1 + \cos g \cos u)}{\sin g(\cos g + \cos u)}$, und $KI^2 - IM^2$

$$= \frac{r^2(1 + \cos(u - g))(1 + \cos(u + g))}{\sin g^2(\cos g + \cos u)^2}$$

$$= \frac{r^2(1 + 2\cos g \cos u + \cos g^2 - \sin u^2)}{\sin g^2(\cos g + \cos u)^2}$$

$$= \frac{r^2(\cos g^2 + 2\cos g \cos u + \cos u^2)}{\sin g^2(\cos g + \cos u)^2}$$

$= r^2 \operatorname{cosec} g^2 = r^2 \operatorname{cosec} g^2 \operatorname{cosec} \omega^2 - r^2 \operatorname{cosec} g^2 \cot \omega^2$ $= ML^2 - KL^2$. Demnach iſt $LM^2 + MI^2 = KL^2 + KI^2 = LI^2$, folglich der Winkel LMI der beiden Radien MI, IM ein rechter, alſo auch der Winkel der beiden aus L und I mit dieſen Radien durch M beſchriebenen Kreiſe ein rechter, das iſt, der Winkel der Projectionen zweyer auf einander ſenkrechten Kugelkreiſe, wovon der eine ein größter iſt, ein rechter.

18. Eine Folge der jetzt bewieſenen Eigenſchaft der ſtereographiſchen Projection, nach welcher in derſelben alle Winkel auf der Kugel in gleich große projicirt werden, iſt, daß die Projectionen der kleinſten Theile der Kugelfläche ihrem Urbilde auf der Kugel ähnlich ſind. Auf Landcharten, welche nach der ſtereographiſchen Ent-

werfungsart gezeichnet ſind, haben alſo die Grade der Länge zu denen der Breite überall das richtige Verhält=niß. Dieſe Eigenſchaft verbunden mit der, daß die Projectionen der Kreiſe auf der Kugel wieder Kreiſe ſind, macht die ſtereographiſche Projection zu Landcharten eben ſo ſehr empfehlungswerth.

19. Der Kreis ASBR (Fig. 45) oder der Grund=kreis ſey der Äquator der ſphäriſchen Erde, ſo iſt C die Projection des Pols N (Fig. 44), und die Projectionen der Meridiane ſind gerade durch C gehende Linien. Es ſeyn CS, Cſ die Projectionen zweyer Quadranten NS, Nſ, von ein Paar einander unendlich nahen Meridianen, und auf ihnen M, m die Projectionen der Durchſchnitte W, w jener Quadranten mit einer loxodromiſchen Linie. Da das unendlich kleine zwiſchen dem Quadranten NS, Nſ enthaltene Stück der Loxodromie Ww ſich mit dem zwiſchen denſelben Endpuncten enthaltenen Elemente ei=nes größten durch W, w geführten Kreiſes verwechſeln läßt, ſo iſt ſeine Projection Mm das Element eines Kreiſes, welcher den Halbmeſſer CS unter demſelben Winkel ſchneidet, unter welchen der Kreis auf der Kugel den Quadranten NS ſchneidet. Dieſer Winkel iſt der loxodromiſche und von beſtändiger Größe. Die Projec=tion der Loxodromie auf die Ebene des Äquators ſchneidet alſo alle Halbmeſſer wie CS unter demſelben Winkel; ſie iſt alſo eine logarithmiſche Spirale (Spirale, 42.).

20. Die Rechnung giebt daſſelbe Reſultat ſo. Wenn die Loxodromie in B anfängt, und der Winkel BCS, wie bisher, φ, der loxodromiſche Winkel α und die Breite des Punctes W auf der Loxodromie ψ heißt, ſo iſt

$$\varphi = \text{tang}\,\alpha . \log \text{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\psi\right)$$

(Sphäroid, 41, wo ψ ſtatt ω kommt und $e = o$ iſt). Setzt man nun den veränderlichen Radius CM = z, ſo iſt

$$z = r\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2} v \;(8)$$
$$= r\,\text{tang}\left(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi\right).$$

Es iſt nämlich v der Abſtand vom Pole, alſo $= 90 - \psi$. Man hat nun

$$\text{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\psi) = \frac{1}{\text{tang}(45° - \tfrac{1}{2}\psi)} = \frac{r}{z}$$

alſo, wenn noch $\text{tang}\,\alpha = m$ gemacht wird

$$\varphi = m \log(r : z).$$

Dieſes iſt die Gleichung für die Projection der Loxodromie. Sie gehört einer logarithmiſchen Spirale an, in welcher die Radien z abnehmen, wenn die poſitiven Winkel φ zunehmen. (Spirale, 39). Der Winkel der Spirale mit dem Radius CM iſt $= \alpha$ (daſ. 41), alſo dem loxodromiſchen Winkel gleich.

21. Die Lage des Punctes M, der Projection von W, auf dem um I mit dem Halbmeſſer $\frac{r \sin u}{\cos g + \cos u}$ beſchriebenen Kreiſe (17. 9) wird auch durch den Durchſchnitt dieſes Kreiſes mit PM beſtimmt. Man ſuche alſo den Winkel $CPM = \chi$.

Es iſt $QP = CP - CQ = r\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}g - x$

$$= \frac{r \sin g}{1 + \cos g} - \frac{r(\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega)}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}$$

$$= \frac{r(\sin g\,(1 - \cos u) + (1 + \cos g) \sin u \cos \omega)}{(1 + \cos g)(1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega)}$$

mithin

$$\text{tang}\,\chi = \frac{QP}{QM} = \frac{(1 + \cos g) \sin u \sin \omega}{\sin g\,(1 - \cos u) + (1 + \cos g) \sin u \cos \omega}$$

$$= \frac{\cot\tfrac{1}{2}u \sin \omega}{\text{tang}\tfrac{1}{2}g + \cot\tfrac{1}{2}u \cos \omega} = \frac{\cot\tfrac{1}{2}g \sin \omega}{\text{tang}\tfrac{1}{2}u + \cot\tfrac{1}{2}g \cos \omega}.$$

Dieſe Gleichung gilt für ein ebenes Dreyeck, in welchem zwey den Nebenwinkel zu ω einſchließende Seiten das Verhältniß von $(1 + \cos g) \sin u : \sin g\,(1 - \cos u) = \cot\tfrac{1}{2}u : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}g = \cot\tfrac{1}{2}g : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}u$ ha-

haben, χ aber der Winkel iſt, welcher der erſten jener beiden Seiten entgegenſteht. Sie läßt ſich verſchiedentlich conſtruiren.

Es iſt übrigens klar, daß, wenn GH der in AB fallende Durchmeſſer des um I beſchriebenen Kreiſes iſt, der Bogen GM die Projection des Bogens ω auf der Kugel iſt, indem die Projection eines größten Kreiſes, welche durch P und M geht, mit AB einen Winkel $= \omega$ macht (13), deſſen Maß der dem Bogen GM entſprechende Bogen eines kleineren um den Pol F (Fig. 44) durch die Puncte D, W (4, 8) beſchriebenen Kreiſes iſt.

22. Die bisherigen Sätze enthalten die merkwürdigſten Eigenſchaften der ſtereographiſchen Projection. Zum Behuf der nun beyzubringenden Conſtructionen, um dieſe nämlich in der Ebene der Tafel auszuführen, ſtelle man ſich den Kreis ANBO, ſo wie jeden andern durch das Auge O gehenden größten, mithin auf die Tafel ſenkrechten Kreis, um ſeinen Durchſchnitt mit der Tafel AB gedreht und in dieſelbe niedergelegt vor. Die Lage der Puncte G, P, H der AB bleibt dabey ungeändert, die Puncte O, N, ſo wie D, F, E fallen in den Umfang des Grundkreiſes, und ON fällt mit dem auf AB ſenkrechten Durchmeſſer des Grundkreiſes zuſammen, oder in den Durchſchnitt deſſelben mit einem auf ANBO in der urſprünglichen Lage ſenkrechten Kreiſe. Das Auge kann hiernach jede Stelle im Umfange des Grundkreiſes einnehmen, und es iſt alsdann leicht, durch Linien, welche von demſelben ausgehn, wie OD, OF, OE Puncte eines ſenkrechten und durchs Auge gehenden Kreiſes auf ſeinen Durchſchnitt mit dem Grundkreiſe AB, und dadurch auf die Tafel, in G, P, H überzutragen, und umgekehrt Puncte G, P, H eines Durchmeſſers AB des Grundkreiſes auf den Umfang eines über dieſem Durchmeſſer auf die Tafel ſenkrechten und durchs Auge gehenden Kreiſes zurückzuführen. — Übrigens wird es der Kürze wegen in allen den Fällen, wo bloß die Beziehung der Projectionen zu einander in Betracht kommen, verſtattet

ſeyn, von den Projectionen ſich eben ſo auszudrücken, wie von den ihnen entſprechenden Puncten und Kreiſen der Kugelfläche.

23. Die Projection eines größten Kreiſes zu zeichnen, deſſen Durchſchnitt mit dem Grundkreiſe gegeben iſt.

Es ſey NO (Fig. 46.) der gegebene Durchſchnitt mit dem Grundkreiſe. Iſt nun der zu entwerfende Kreis ſenkrecht auf den Grundkreis, ſo iſt NO ſelbſt die geſuchte Projection (3). Hat aber der zu projicirende Kreis eine ſchiefe Lage gegen den Grundkreis, ſo ziehe man den Durchmeſſer AB ſenkrecht auf NO, ſetze an CA auf der Seite von N oder O, je nachdem der zu entwerfende Kreis für ein über C befindliches Auge ſich über den Halbkreis NAO erhebt oder darunter fällt, einen Winkel ACD gleich dem Winkel des zu entwerfenden Kreiſes mit dem Grundkreiſe, verlängere DC bis an die Peripherie in E und ziehe OD, OE, welche AB oder ihre Verlängerung in G, H ſchneiden, beſchreibe alsdann über dem Durchmeſſer GH einen Kreis; dieſer iſt die geſuchte Projection.

Daß GH ein Durchmeſſer des Kreiſes iſt, worin der größte Kreis projicirt wird, erhellt aus (4) und (22), daß der Kreis durch O, mithin auch durch N geht, daraus, daß GOH ein rechter Winkel iſt, und daß er die gehörige Lage gegen den Grundkreis hat, aus (2).

Man kann den Kreis NGOH auch zeichnen, wenn man bloß ſeinen Mittelpunct I ſucht. Dieſen erhält man dadurch, daß man auf der Seite von NO, an welche bey der ſenkrechten Lage des Kreiſes ANBO der über dem Grundkreiſe erhabene Pol des zu projicirenden Kreiſes fällt, von N an den Bogen NR = 2g oder gleich dem doppelten Abſtande der über der Tafel erhabenen Pole des Grundkreiſes und des zu entwerfenden Kreiſes nimmt, und OR zieht. Dieſe ſchneidet AB in dem geſuchten Mittelpuncte I, aus welchem dann mit dem Halbmeſſer IO oder IN der Kreis OGNH beſchrieben wird. Nach

dieſer Conſtruction iſt nämlich CI = r tang g, OI = r sec g (6). — Begegnet OI der DE in T, ſo iſt wegen COI = ICT und des gemeinſchaftlichen Winkels I das Dreyeck ICT dem Dreyecke ICO ähnlich, alſo ITC = ICO oder OI in T ſenkrecht auf DE. Hieraus ergiebt ſich noch ein Mittel, I zu finden, wenn DE gezogen iſt.

24. a. die Pole eines größten Kreiſes in der Projection zu finden.

Die Pole des Grundkreiſes fallen in ſeinen Mittelpunct. Die Pole eines ſenkrechten Kreiſes NO liegen auf dem Umfange des Grundkreiſes in den Endpuncten des auf NO ſenkrechten Durchmeſſers AB. Die Pole eines ſchiefen Kreiſes NGOH zu finden, ſuche man ſeinen Mittelpunct I und ziehe dadurch den Durchmeſſer des Grundkreiſes AB, und auf dieſen den Durchmeſſer NO ſenkrecht, verbinde OI und halbire den Winkel COI durch die gerade OF. Dieſe ſchneidet AB in dem einen Pole P. Eine ſenkrechte auf OP in dem Puncte O giebt dann durch ihren Durchſchnitt mit der AB den andern Pol p.

Nach der Conſtruction iſt nämlich NF = FR = g, alſo NOF = $\frac{1}{2}$g, CP = r tang $\frac{1}{2}$g, Cp = r cot $\frac{1}{2}$g, wie gehörig (7).

24. b. Da die Pole eines Kreiſes einander gerade entgegenſtehende Puncte ſind, ſo ergiebt ſich hieraus die Auflöſung der Aufgabe: Zu einem gegebenen Puncte der Projection, welcher nicht der Mittelpunct iſt, den ihm diametral entgegengeſetzten zu finden.

Man zieht nämlich durch den gegebenen Punct P den Durchmeſſer des Grundkreiſes AB, und auf dieſen einen andern NO ſenkrecht, verbindet PO und ſetzt Op, welche der AB in p begegnet, ſenkrecht auf OP, ſo iſt p der geſuchte Punct.

25. Auf einem größten Kreiſe der Projection von einem gegebenen Puncte an einen Bogen von gegebener Größe abzuſchneiden.

Wie das verlangte in Anſehung des Grundkreiſes geleiſtet werde, iſt für ſich klar. Auf einem ſenkrechten Kreiſe AB von dem Puncte G aus einen gegebenen Bogen abſchneiden, ziehe man den Durchmeſſer NO ſenkrecht auf AB, verbinde OG und verlängere ſolche bis an den Umfang des Grundkreiſes in D, nehme auf dieſem den Bogen DF nach der gehörigen Seite von der beſtimmten Größe, und ziehe OF, welche AB in P ſchneidet, ſo iſt GP, wie aus (22) und (3) erhellt, der verlangte Bogen, die Projection nämlich von DF.

Auf einem ſchiefen Kreiſe NGOH wird von dem Puncte Q aus ein Bogen von gegebener Größe ſo abgeſchnitten. Man ſucht den innerhalb des Grundkreiſes liegenden Pol P des Kreiſes NGOH, zieht PQ und verlängert ſolche bis an den Umfang des Grundkreiſes in S, nimmt alsdann den Bogen SW auf dieſem nach der gehörigen Seite von der beſtimmten Größe, verbindet WP, welche den Kreis NGOH in M ſchneidet, ſo iſt der Bogen QM der verlangte.

Denn zieht man den Halbmeſſer CW und durch P den Durchmeſſer des Grundkreiſes AB, welcher NGO in G ſchneidet, ſo iſt, den Bogen AW $= \omega$ geſetzt, im Dreyeck CWP

$$\text{tang CPW} = \frac{\text{CW . sin WCP}}{\text{CP} - \text{CW . cos WCP}}$$

$$= \frac{\text{r . sin}(180^\circ - \omega)}{\text{r tang}\tfrac{1}{2}\text{g} - \text{r . cos}(180^\circ - \omega)}$$

$$= \frac{\sin\omega}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{g} + \cos\omega}$$

welcher Ausdruck in (21) für tang χ kommt, wenn $u = 90^\circ$, mithin der entworfene Kreis ein größter iſt. Der Bogen GM iſt alſo die Projection eines dem Bogen AW auf der Kugel gleichen Bogens, und eben ſo GQ die Projection eines Bogens, welcher dem Bogen AS gleich iſt. Daher iſt der ganze Bogen QM die Projection

eines dem SW auf der Kugel gleichen Bogens, folglich von der beſtimmten Größe.

26. Der Grundkreis ANBO dient zur Eintheilung ſowohl des ſenkrechten größten Kreiſes AB als des ſchiefen NGOH vermittelſt der aus den Polen dieſer Kreiſe O, P an den Umfang jenes gezogenen Linien. Er führt daher den Namen eines Theilkreiſes derſelben. Man kann übrigens den ſchiefen Kreis NGOH ſelbſt als Theilkreis gebrauchen. Um nämlich von des Durchmeſſers GH Endpuncte G aus nach O zu einen Bogen von gegebener Größe abzuſchneiden, nehme man von dem andern Endpuncte H nach der entgegengeſetzten Seite oder nach N zu einen dem abzuſchneidenden Bogen ähnlichen Bogen HZ, ſo ſchneidet die rückwärts verlängerte ZP auf NGOH den verlangten Bogen GQ ab. Denn weil OP den Winkel COI halbirt (24), ſo iſt CO oder CS : CP = OI oder IZ : PZ, folglich ſind die bey P gleichwinkligen Dreyecke CSP, PZI ähnlich, und die Winkel SCP, PIZ, ſo wie ihre Nebenwinkel ACS, ZIH gleich, daher die Bogen AS und ZH ähnlich, folglich GQ von der verlangten Größe (25).

27. Durch einen Punct M oder Z, welcher nicht auf dem Umfange des Grundkreiſes liegt, einen größten Kreis zu ziehen, welcher mit dem Grundkreiſe den gegebenen Winkel g mache, beſchreibe man aus C und M oder aus C und Z als Mittelpuncten mit den durch eine einfache Conſtruction zu erhaltenden Halbmeſſern r tang g und r sec g Kreiſe. Dieſe ſchneiden einander in dem geſuchten Mittelpuncte I, welcher, wenn die Kreiſe einander ſchneiden, zweyfach iſt. Berühren die Kreiſe blos einander, ſo giebt es nur einen Mittelpunct; treffen die Kreiſe einander gar nicht, ſo iſt die Aufgabe unmöglich.

28. Durch einen gegebenen Punct der Projection einen größten Kreis zu ziehen, der auf einem andern Kreiſe ſenkrecht ſey.

Man ſuche die Pole des gegebenen Kreiſes, und beſchreibe durch dieſelben und den vorgegebenen Punct einen Kreis, welcher in dem Falle, daß der gegebene Kreis der Grundkreis iſt, ſich in eine gerade Linie verwandelt, ſo iſt das verlangte, wie leicht zu ſehen iſt, geſchehen.

29. Durch zwey gegebene Puncte der Projection einen größten Kreis zu ziehen.

Iſt einer der beiden Puncte der Mittelpunct des Grundkreiſes, ſo iſt der Durchmeſſer deſſelben, welcher durch den andern Punct geht, der geſuchte Kreis. Sonſt ſuche man zu dem einen der beiden gegebenen Puncte P den ihm diamentral entgegengeſetzten p (24[b]), und ziehe durch P, p und den andern gegebenen Punct M einen Kreis; dieſer iſt der verlangte. Denn er iſt ein größter, weil er durch zwey einander gerade entgegenſtehende Puncte geht.

30. Einen größten Kreis zu beſchreiben, deſſen Pol P in der Projection gegeben iſt.

Man ziehe durch P den Durchmeſſer AB des Grundkreiſes, und ſetze auf denſelben den Durchmeſſer NO ſenkrecht, ziehe OP, welche den Umfang des Grundkreiſes in F trifft, nehme den Bogen FD = FE = 90°, und ziehe OD, OE, welche dem Durchmeſſer AB in G, H begegnen, und beſchreibe um den Durchmeſſer GH den Kreis GNHO. Dieſer iſt der verlangte. (23. 24[a].).

31. An einen Punct der Projection, welcher weder der Mittelpunct noch ein Punct im Umfange des Grundkreiſes iſt, einen gegebenen Winkel zu ſetzen.

Es ſey P der gegebene Punct. Man beſchreibe den größten Kreis NGOH, deſſen Pol P iſt (30.). Um nun an den ſenkrechten Kreis PCA einen Winkel von gegebener Größe in dem Puncte P zu legen, nehme man den Bogen AS des Grundkreiſes nach der gehörigen Seite von ſo viel Graden als der gegebene Winkel faßt, ziehe PS, welche den Kreis NGO in Q ſchneidet, und be=

ſchreibe durch P, Q (29) einen größten Kreis, ſo hat der Winkel APQ die verlangte Größe. Soll aber der gegebene Winkel an den ſchiefen Kreis PMp in dem Puncte P getragen werden, ſo ziehe man durch den Durchſchnitt M des ſchiefen Kreiſes und des auf ihn ſenkrechten NGO die gerade PM, und verlängere ſolche bis an den Umfang des Grundkreiſes in W, nehme nun den Bogen WS nach der gehörigen Seite von ſo viel Graden, als der zu zeichnende Winkel haben ſoll, ziehe PS, die dem Kreiſe NGO in Q begegnet, und beſchreibe durch P und Q einen größten Kreis PQp, ſo iſt an PM ein Winkel MPQ von der verlangten Größe geſetzt. Es iſt nämlich QM die Projection eines dem WS gleichen Bogens (25), und das Maß des Winkels MPQ, weil PM, PQ Quadranten ſind.

32. Durch eine leichte Umkehrung der Auflöſungen in (25), (23) und (27) kann man jeden Bogen eines größten ſenkrechten oder ſchiefen Kreiſes der Projection und jeden Winkel, der ſeine Spitze nicht im Mittelpuncte des Grundkreiſes hat, ausmeſſen, indem man jenen auf einen Bogen des Grundkreiſes, dieſen auf einen Winkel am Mittelpuncte deſſelben zurückführt. Und nun iſt man im Stande, vermittelſt der bisherigen Vorſchriften alle Aufgaben der ſphäriſchen Trigonometrie graphiſch zu löſen. Da aber bey aſtronomiſchen Aufgaben oft die Zeichnung und Eintheilung von Parallelkreiſen vorkommt, ſo ſoll das nöthige davon hier noch beygebracht werden.

33. Zu einem gegebenen größten Kreiſe der Projection einen Parallelkreis zu zeichnen.

Der gegebene größte Kreis ſey NGOH (Fig. 47.). Man ziehe durch den Mittelpunct des Grundkreiſes C den Durchmeſſer GH deſſelben, und NO durch C ſenkrecht auf GH, ferner OG, OH, welche den Umfang des Grundkreiſes in D und E ſchneiden, und mache jeden der Bogen DL, EM, dem Abſtande des Parallels von dem größten Kreiſe an der gehörigen Seite gleich, ziehe

OL, OM, welche dem Durchmeſſer AB des Grundkrei-ſes in Q und R begegnen, ſo iſt QR der Durchmeſſer der Projection des Parallelkreiſes, wie aus (4) und (22) erhellt.

34. Um den gegebenen Pol einen Parallelkreis oder überhaupt einen kleineren Kreis, deſſen Abſtand vom Pole gegeben iſt, zu beſchreiben.

P ſey der innerhalb des Grundkreiſes fallende Pol. Man ziehe dadurch den Durchmeſſer des Grundkreiſes AB und einen andern auf AB ſenkrechten NO, ferner OP bis an den Umfang des Grundkreiſes in F, nehme die Bogen FL, FM, ſo groß als der Abſtand des Parallels von dem über der Tafel erhabenen Pole auf der Kugel iſt, ziehe OL, OM, ſo ergiebt ſich durch deren Durchſchnitte Q, R mit AB der Durchmeſſer des Parallelkreiſes QR.

Für einen Parallel des Grundkreiſes fällt F mit N, ſo wie D und E mit A und B zuſammen.

35. Durch einen gegebenen Punct der Projection den Parallelkreis zu einem gegebenen größten Kreiſe zu ziehen.

Der gegebene Punct ſey T, und der gegebene größte Kreis NGOH. Man ſuche den Pol deſſelben P, und beſchreibe durch P und T einen größten Kreis, meſſe den Bogen PT deſſelben, ſo hat man den Abſtand des Parallels von ſeinem Pole, und kann denſelben nach (34) zeichnen.

36. Auf der Projection eines Parallelkreiſes oder überhaupt eines kleineren Kreiſes von einem gegebenen Puncte aus einen Bogen von gegebener Größe abzuſchneiden.

Der Parallelkreis ſey TQR und P die Projection des über der Tafel erhabenen Pols deſſelben, der gegebene Punct auf ſeinem Umfange Y. Man nehme den Bogen OS des Grundkreiſes, wo O wie in (34) gefunden wird, gleich FL oder dem Abſtande des Pa-

rallels von dem nächſten Pole, ziehe die Chorde OS, welche verlängert dem Durchmeſſer AB des Grundkreiſes in V begegne. Mit dem Halbmeſſer CV beſchreibe man um C einen Kreis, ziehe PY bis an den Umfang deſſelben in W, nehme den Bogen WX nach der gehörigen Seite von der verlangten Größe, und ziehe PX, welche dem Umfange des Parallels in Z begegnet, ſo iſt YZ der verlangte Bogen.

Denn es iſt, den Bogen $NF = g$, $FL = OS = u$ geſetzt, $CP = r \tang \frac{1}{2} g$, $CV = r \cot \frac{1}{2} u$; und wenn CW gezogen, VCW oder der Bogen $VW = \omega$ geſetzt wird, ſo hat man im Dreyecke CWP

$$\tang CPW = \frac{r \cdot \cot \frac{1}{2} u \sin \omega}{r \tang \frac{1}{2} g + r \cot \frac{1}{2} u \cos \omega}$$
$$= \frac{\cot \frac{1}{2} u \sin \omega}{\tang \frac{1}{2} g + \cot \frac{1}{2} u \cos \omega}$$

folglich iſt QY die Projection eines dem VW ähnlichen Bogens (21.). Eben ſo iſt QZ die Projection eines dem VX ähnlichen Bogens, mithin YZ die Projection eines dem Bogen WX auf der Kugel ähnlichen Bogens, alſo von der verlangten Größe.

Der Kreis VXW iſt ein Theilkreis für den kleineren Kreis QZRY, wie es der Grundkreis AOBN für den größten Kreis NGOH iſt (26.). Beſchreibt man um C mit einem Halbmeſſer $= r \tang \frac{1}{2} u$ einen Kreis, ſo dient ſolcher gleichfalls, den Kreis QZRY durch gerade, welche in den entfernteren Pol p laufen, einzutheilen (21.).

Man kann aber auch den Kreis QZRY ſelbſt als Theilkreis gebrauchen. Man verlängere nämlich YP rückwärts bis an den Umkreis in y, nehme den Bogen yz nach der entgegengeſetzten Seite von der verlangten Größe, und ziehe zP, welche verlängert dem Umkreiſe in Z begegnet, ſo iſt YZ der Bogen, welcher abgeſchnitten werden ſollte.

Denn zieht man die Halbmeſſer Iy, Iz des kleineren Kreiſes, ſo iſt in den vorigen Bezeichnungen $CI = \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u}$, und $Iy = IR = Iz = \frac{r \sin u}{\cos g + \cos u}$ (9). Mithin $PI = \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u} - \frac{r \sin g}{1 + \cos g} = \frac{r \sin g (1 - \cos u)}{(1 + \cos g)(\cos g + \cos u)}$, und $yI : IP = \frac{\sin u}{1 - \cos u} : \frac{\sin g}{1 + \cos g} = \cot \tfrac{1}{2} u : \tang \tfrac{1}{2} g$, alſo, wenn $RIy = \omega$ iſt, $\tang QPY = \tang RPy = \frac{\cot \frac{1}{2} u \sin \omega}{\tang \frac{1}{2} g + \cot \frac{1}{2} u \cos \omega}$ mithin QY die Projection eines dem Bogen Ry ähnlichen Bogens (21.). Eben ſo iſt Qz die Projection eines dem Bogen Rz ähnlichen Bogens, folglich YZ die Projection eines dem Bogen yz ähnlichen Bogens, mithin von der verlangten Größe.

37. Ein anderer Theilkreis des Parallels HQLR (Fig. 48), welcher dadurch, daß ſein Halbmeſſer nicht zu groß ausfällt, vorzügliche Bequemlichkeit gewährt, findet ſich ſo. Man beſchreibe durch den Pol P einen größten auf AB ſenkrechten Kreis, welcher alſo durch die Endpuncte des auf AB ſenkrechten Durchmeſſers N und O geht. Dieſer ſchneide den Kreis HQLR in H und L: zieht man nun die Chorde HL, welche AB in K durchſchneidet, und beſchreibt aus K mit KH oder KL den Kreis HML, ſo iſt dieſer ein Theilkreis zu HQLR. Um nämlich von dem Puncte Y aus auf dem Kreiſe HQLR einen Bogen von gegebener Größe nach L zu abzuſchneiden, ziehe man Pγ bis an den Umfang des Kreiſes HML in S, nehme den Bogen ST nach der angedeuteten Seite hin von der gegebenen Größe, und ziehe PT, welche dem Umfange

des Kreiſes HQLR in Z begegnet, ſo iſt YZ der verlangte Bogen.

Denn für den Punct H ſind, weil APH = 90°, PH aber die Projection des Bogens u auf der Kugel iſt, die Werthe der Coordinaten CK, HK oder KL dieſe

$$CK = \frac{r \sin g \cos u}{1 + \cos g \cos u}$$

$$KH = KL = \frac{r \sin u}{1 + \cos g \cos u}$$

alſo

$$KP = \frac{r \sin g}{1 + \cos g} - \frac{r \sin g \cos u}{1 + \cos g \cos u}$$

$$= \frac{r \sin g\,(1 - \cos u)}{(1 + \cos g)\,(1 + \cos g \cos u)}$$

und $\left\{\begin{matrix} KS \\ KT \end{matrix}\right\} : KP = KH : KP = (1 + \cos g) \sin u : \sin g\,(1 - \cos u).$

Demnach ſind (21) QY und QZ die Projectionen von Bogen auf der Kugel, welche den Bogen MS und MT ähnlich ſind. Folglich iſt YZ die Projection eines dem Bogen ST auf der Kugel ähnlichen Bogens.

Ohne den Kreis NPO zu beſchreiben findet man den Durchmeſſer HL des Theilkreiſes ſo. Man mache jeden der Bogen QV, QW einem Quadranten gleich, ziehe VP, WP, und verlängere ſolche bis an den Umfang des Kreiſes, welcher getheilt werden ſoll, in H und L, ſo iſt die verbundene HL der geſuchte Durchmeſſer. Dies Verfahren beruht darauf, daß man den Kreis VQWR als einen ſchiefen größten Kreis, deſſen Pol P iſt, betrachtet, und dazu den Grundkreis ſucht. Da nun WR, RV Quadranten ſind, ſo ſind (26. und 36) QH, QL die Projectionen von Quadranten, alſo HQL die Projection eines Halb-

kreiſes, mithin HL der Durchmeſſer des Grundkreiſes für VQWR als ſchiefen größten Kreis. Daß HML alsdann aber einen Theilkreis zu VQMR abgiebt, erhellt aus (25).

Lambert hat dieſen Theilkreis bey ſeiner in den Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik Theil II. S. 720 und folgg. angegebenen Entwerfungsart der Sonnenfinſterniſſe und weiterhin auch der Sternbedekkungen in Anwendung gebracht.

38. Der Erfinder der ſtereographiſchen Projection iſt der bekannte griechiſche Aſtronom Hipparch. Wenigſtens eignet ihm der Biſchof von Ptolemais, Syneſius, in der Vorrede zu ſeiner Schrift: De dono astrolabii die Erfindung derſelben zu. Nach Hipparch hat Ptolemäus über die ſtereographiſche Projection geſchrieben. Seine Abhandlung darüber, welche nur in einer lateiniſchen aus dem Arabiſchen des Maſlem gemachten Überſetzung vorhanden iſt, hatte den Titel: *ἁπλωσις ἐπιφανειας σφαιρας* (Explicatio superficiei sphaericae in planum). Die Eigenſchaft, daß alle Kreiſe, deren Ebenen nicht durch's Auge gehen, wieder in Kreiſe projicirt werden, wird darin mehr angenommen als bewieſen. Nach der Wiederherſtellung der Wiſſenſchaften hat die ſtereographiſche Projection an den Jeſuiten, Clavius, (Astrolabium beſonders Rom, 1593. 4. und im dritten Bande der Opp. mathematicor. Christophori Clavii. Maynz, 1612.) Aguilonius, (Opticorum libri VI. Antwerpiae, 1613.) Tacquet (Opera mathematica. Antwerpiae, 1669.) und Dechales (Tractatus de Astrolabiis im IVten Bande des 1690 zu Lyon erſchienenen Cursus s. Mundus mathematicus) fleißige Bearbeiter gefunden. Clavius Werk iſt ſo weitſchweifig und die Figuren ſo bunt und verwirrt, daß Tacquet ſelbſt ſagt, er glaube nicht, daß Jemand das ganze Buch durchgeleſen habe. Sein eigener Vortrag, iſt ſo wie der

von Dechales deſto kürzer und netter. Von Aguilonius rührt die Benennung ſtereographiſche Projection her. Alle dieſe Schriftſteller lehren den Gebrauch der Theilkreiſe, deren Erfindung Clavius ſich zueignet. Die andere merkwürdige Eigenſchaft der ſtereographiſchen Projection, daß die Winkel der Kreiſe in der Projection und auf der Kugel dieſelben ſind, iſt indeß dieſen Geometern trotz der Mühe, welche ſie ſich um jene Entwerfungsart gegeben haben, entgangen, und erſt ſpäterhin aufgefunden worden. Halley, welcher davon in ſeinem Aufſatze: An easy demonstration of the analogy of the logarithmick Tangents to te Meridian Line or sum of the Secants. (Philosoph. Trans. Vol. XVIII. nro. 219) Gebrauch macht, ſagt, daß er ſolche von Moivre erhalten, ſeitdem aber erfahren habe, daß ſie ſchon von Hook der Societät mitgetheilt worden ſey. Die Anwendung der ſtereographiſchen Projection zu Landkarten hat Haſe, theils dadurch, daß er ſie in ſeiner Schrift: Sciagraphia integri tractatus de constructione mapparum omnis generis. Lipsiae, 1717. dazu beſonders empfahl, theils aber vornehmlich dadurch, daß er ſelbſt viele nach der ſtereographiſchen Entwerfungsart gezeichnete Karten herausgab, vorzüglich befördert. Da Haſens in der obigen Abhandlung angekündigtes Werk nicht erſchienen, und ſonſt keine vollſtändige Theorie der ſtereographiſchen Entwerfungsart bekannt war, ſo wurde Käſtner daurch veranlaßt, dieſe Theorie vermittelſt der analytiſch-trigonometriſchen Rechnung zu entwickeln, und ſolche in ſeinen Dissertt. mathem. et physic. Altenburgi, 1771 bekannt zu machen. In derſelben Manier und ſehr umſtändlich hat auch Karſten im 7ten Theile ſeines Lehrbegriffs die ſtereographiſche Projection abgehandelt. Nach der ſynthetiſchen Methode hat Klügel in einer kleinen Schrift: geometriſche Entwickelung der Eigenſchaften der ſtereographiſchen Projection. Berlin und Stettin, 1788. die Hauptſätze und Hauptaufgaben über dieſelbe vorgetragen. In dieſem Artikel wird man einiges finden, das

die Abhandlungen dieſer Schriftſteller, ſo wie die von Mayer im 4ten Th. ſeiner praktiſchen Geometrie und von Delambre im 3ten Th. ſeiner Aſtronomie, ergänzt.

Stereometrie, wörtlich: Körpermeſſung, iſt der Theil der Geometrie, in welchem die Unterſuchung nicht auf Linien und Figuren, die in einer Ebene liegen, beſchränkt iſt. Für die Stereometrie gehört alſo zunächſt die Lehre von der Lage gerader außerhalb einer Ebene gezogenen Linien gegen dieſe Ebene, und von der Lage der Ebenen gegen einander, worunter die Lehre von den körperlichen Winkeln begriffen iſt, worauf dann die Betrachtung der Körper und ihrer Oberflächen ſelbſt, ſo wie der Linien, welche in dieſen Oberflächen durch die Durchſchnitte derſelben mit ebenen oder krummen Flächen entſtehen oder ſonſt nach irgend einem Geſetze gezogen werden können, folgt. Die Stereometrie iſt theils eine niedere theils eine höhere, über welche Eintheilung der Artikel Geometrie Auskunft giebt, in welchem auch der Umfang der Elementarſtereometrie beſtimmt iſt, in die man gewöhnlich auch noch, dem obigen Begriffe nicht zuwider, die erſten und leichteſten Lehren der Sphärik von den Kugelſchnitten aufnimmt. Häufig wird das Wort Stereometrie in ſeiner eigentlichen Bedeutung für Ausmeſſung der Körper ihrem Inhalte nach genommen. So ertheilt die praktiſche Stereometrie Vorſchriften zur Berechnung des Inhalts von allerley im gemeinen Leben vorkommenden Körpern, womit dann auch Vorſchriften zur Berechnung ihrer Oberflächen, in ſo fern dieſe nicht ſchon nach den Regeln der Planimetrie gefunden werden können, verbunden werden.

Da die Berechnung des Inhalts eckiger Körper theils ſchon in den Art. Prisma und Pyramide enthalten iſt, theils noch in dem Artikel vieleckiger Körper vorkommen wird, ſo gebe ich hier noch einige Nachträge zu den Artikeln, Cubirung und Complanation.

1. Wenn X die Area des Schnittes eines Körpers bezeichnet, welcher ſenkrecht auf eine gegebene oder angenommene Abſciſſenaxe in dem unbeſtimmten Abſtande x vom Anfange der Abſciſſen geführt iſt, ſo giebt $\int X\partial x$ den Inhalt von dem Stücke des Körpers, welches zwiſchen den beiden parallelen durch die Endpuncte der x gelegten Ebenen enthalten iſt. Der Beweis hiervon wird eben ſo geführt wie in dem Artikel Cubirung.

Exempel. Es iſt ABCDF (Fig 49) ein Körper, deſſen Grundfläche ABCD ſo wie alle mit ihr parallele Schritte Quadrate ſind, die beiden auf die Grundfläche durch die Mitte der gegenüberliegenden Seiten ſenkrechten Schnitte GFH, IFK ſeyn Halbkreiſe, man ſucht den Inhalt dieſes Körpers.

Es ſey LMNO irgend ein der Grundfläche paralleler Schnitt, welcher der Axe FE, dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte der Ebenen GFH, IFK in P begegne. Man ſetze $FP = x$, und den Halbmeſſer $EG = EF = EH = a$, ſo daß 2a die Seite der Grundfläche iſt, ſo iſt vermöge der Natur des Kreiſes $PQ = \sqrt{(2ax - x^2)}$, und die Area $LMNO = 8ax - 4x^2$. Bezeichnet nun Z das unbeſtimmte Stück des Körpers LMNOF, ſo iſt

$$\partial Z = 8\,ax\partial x - 4\,x^2\partial x$$
$$Z = 4\,ax^2 - \tfrac{4}{3}\,x^3$$

wo keine Conſtans hinzuzuſetzen iſt, weil für $x = o$, auch $Z = o$ wird. Hiernach wird, wenn man $x = a$ ſetzt, der Inhalt des ganzen Körpers $= \frac{(2a)^3}{3}$, mithin ſo groß als der einer Pyramide von derſelben Grundfläche, aber von der doppelten Höhe.

Die gefundene Formel dient den leeren Raum eines Kloſtergewölbes mit quadratiſcher Grundfläche und elliptiſchen Grathen oder Kanten AFC, BFD zu berechnen. — Es können die Schnitte GFH, IFK auch

andere Curven als Halbkreiſe ſeyn, immer wird ſich der Körper AFC zu dem runden Körper, welcher durch Umdrehung von FEH um die Axe FE entſteht, verhalten wie das umſchriebene Quadrat zu der Kreisfläche.

Das Stück EFHD des vorhin betrachteten Körpers iſt die Hälfte eines cylindriſchen Hufs, deſſen Inhalt nach nro. 2 Artikel Hufförmiger Abſchnitt $= \frac{1}{3} aa \times HD = \frac{1}{3} a^3$ iſt. Das 8fache hiervon giebt den ganzen Körper wie vorhin. Die krumme Oberfläche wird nach nro. 3 des angeführten Artikels $= 8 a^2$.

3. Es ſey nun N (Fig. 50) ein Punct einer krummen Fläche, für welche eine Gleichung zwiſchen den drey rechtwinkligen Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, $MN = z$ gegeben iſt, und es bezeichne V den körperlichen Inhalt des Solidums, welches über dem Rechtecke AM als Grundfläche ſteht, die über AQ, QM, MP, PA ſenkrechten Ebenen zu Seitenflächen und das zwiſchen dieſen enthaltene Stück der krummen Fläche zur oberen Grundfläche hat, ſo iſt V im allgemeinen eine Function von x und y. Man laſſe AP oder x um $Pp = \Delta x$ wachſen, ſo wächſt das Solidum um ein Stück über dem Rechtecke Pm als Grundfläche, und es iſt der Inhalt dieſes Stücks

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 V}{1.2.\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^3 V}{1.2.3\,\partial x^3} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

wo $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial \partial V}{\partial x^2}$ Differentialquotienten in Beziehung auf x allein genommen ſind.

Eben ſo iſt, wenn man $y = AQ = PM$ allein um $Qq = \Delta y$ wachſen läßt, das über dem Rechtecke qM ſtehende Solidum

$$= \frac{\partial V}{\partial x} \Delta y + \frac{\partial \partial V}{1.2\,\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^3 V}{1.2.3.\partial y^3}. \Delta y^3 + \text{etc.}$$

läßt

Läßt man aber x und y zugleich, jenes um Δx, dieſes um Δy, wachſen, ſo wird nach dem auf Functionen zweyer veränderlichen Größen erweiterten Taylorſchen Lehrſatze das Solidum über dem Gnomon PMQqsp

$$= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial\partial V}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^2} \Delta x^2$$

$$+ \frac{\partial\partial V}{1 \cdot 2 \cdot \partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \text{etc.}$$

wo $\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}$ den Differentialquotienten anzeigt, welchen man erhält, wenn man V zweymal hinter einander und zwar ſo, daß x allein als veränderlich betrachtet wird, differentiirt, $\frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y}$ aber denjenigen, welchen man bekommt, wenn man zuerſt $\frac{\partial V}{\partial x}$, wo x allein veränderlich iſt, ſucht, und alsdann dieſen Differentialquotienten aufs neue, indem man bloß y als veränderlich betrachtet, differentiirt, wobey man auch die Folge der Operationen umkehren kann.

Hierdurch ergiebt ſich das Solidum Mt über dem Rechtecke Musm als Grundfläche

$$= \frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^3 V}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y$$

$$+ \frac{\partial^3 V}{1 \cdot 2 \cdot \partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \text{etc.}$$

Eben dieſes Solidum fällt nun auch zwiſchen zwey rechtwinklige, über der Grundfläche Musm errichtete Parallelepipeda, von denen das eine die kleinſte, das andere die größte der vier Ordinaten MN, mn, ur, st zur Höhe hat, vorausgeſetzt, daß z innerhalb

des Raums Mt beſtändig zu- oder abnimmt, welches immer dadurch erhalten werden kann, daß man Δx und Δy klein genug nimmt. Die Werthe der vier Ordinaten ſind

$$MN = z$$

$$mn = z + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial x^2}\Delta x^2 + \text{etc.}$$

$$ur = z + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial y^2}\Delta y^2 + \text{etc.}$$

$$st = z + \frac{\partial z}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}.\Delta y + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial y^2}\Delta y^2 + \text{etc.}$$

Hiernach wird das erſte den Ausdrücken für die beiden Gränzen des Solidums Mt gemeinſchaftliche Glied $z\Delta x\Delta y$, welchem alsdann entweder bloß in dem einen oder in beiden Ausdrücken noch andere in $\Delta x^2\Delta y$, $\Delta x\Delta y^2$ u. ſ. w. multiplicirte Glieder folgen. Demnach fällt dem obigen zufolge

$$\frac{\partial\partial V}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^3 V}{1.2.\partial x^2\partial y}\Delta x + \frac{\partial^3 V}{1.2.\partial x\partial y^2}\Delta y + \text{etc.}..$$

zwiſchen zwey Gränzen, deren erſtes Glied z iſt, die ihnen etwa folgenden aber die Form $p\Delta x^m\Delta y^n$ haben.

Da nun $\frac{\partial\partial V}{\partial x\partial y}$, ſo wie V, gar nicht von Δx und Δy abhängt, als welche ganz willkührlich ſind, ſondern allein eine Function von x, y iſt, welches auch z iſt, ſo muß ſeyn

$$\frac{\partial\partial V}{\partial x\partial y} = z$$

weil in den Gränzausdrücken außer z weiter keine von Δx, Δy unabhängige Glieder ſind.

Man ſetze den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x} = W$, ſo iſt W eine Function von x, y, und

$$\frac{\partial W}{\partial y} = z$$

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit ∂y, ſo erhält man linker Hand das Differential von W, y allein veränderlich geſetzt, und durch Integration

$$W = \int z \partial y$$

wo $\int z \partial y$, wie gewöhnlich, das Integral von z∂y in Bezug auf y, deſſen Differential der Factor zu z iſt, anzeigt, und die Conſtante, welche im Allgemeinen eine beliebige Function von x, das bey der Integration als unveränderlich betrachtet wurde, ſeyn kann, unter dem Zeichen $\int z \partial y$ mit begriffen wird.

Es iſt demnach

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int z \partial y$$

alſo, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt, wodurch linker Hand das Differential von V als einer bloßen Function von x erhalten wird, durch Integration

$$V = \int \partial x \int z \partial y$$

wo das Zeichen $\int \partial x \int z \partial y$ dem einfachen Zeichen $\int z \partial y$ analog iſt, und die durch die Integration nach x hineingebrachte, unter $\int \partial x \int z \partial y$ mit zu verſtehende Conſtante im Allgemeinen eine willkührliche Function von y iſt. Ganz auf ähnliche Art wird auch $V = \int \partial y \int z \partial x$ gefunden.

Man erhält alſo V, wenn man die Formel z∂x∂y, worin ſtatt z ſein Werth in x und y geſetzt iſt, zweymal nach einander, nämlich einmal in Bezug auf y, das andere Mal in Bezug auf x, oder auch umgekehrt das erſte Mal in Beziehung auf x, das andere Mal in Beziehung auf y, das iſt, ſo integrirt, daß jedesmal nur die eine der beiden unbeſtimmten x, y

als veränderlich, die andere hingegen als conſtant betrachtet wird. Dieſe gedoppelte Integration zeigt man dadurch an, daß man $V = \int\int z\partial x\partial y$ ſchreibt, welches Zeichen alſo den obigen $\int\partial x\int z\partial y$ und $\int\partial y\int z\partial x$ gleichgeltend iſt. Die zur Vervollſtändigung der ſucceſſiven Integrale beyzufügenden Conſtanten erhalten ihre Beſtimmung dadurch, daß V ſowohl für $x = o$, als für $y = o$ verſchwinden muß. Dieſes hat zur Folge, daß, wenn man mit der Integration nach y anfängt, nicht allein $\int z\partial y$ für $y = o$, ſondern auch $\int\partial x\int z\partial y$ für $x = o$ verſchwinden muß. Verſchwindet nämlich $\frac{\partial V}{\partial x}$ oder $\int z\partial y$ für $y = o$, ſo verſchwindet auch V oder $\int\partial x\int z\partial y$ für $y = o$, weil y in V nicht anders vorkommt als in $\frac{\partial V}{\partial x}$. Daß eben ſo, wenn man mit der Integration nach x anfängt, $\int z\partial x$ für $x = o$ verſchwinden müſſe, iſt leicht einzuſehen.

Wenn man, wie bisher angenommen iſt, das über dem Rechtecke $APMQ = xy$ ſtehende Solidum ſucht, ſo ſind x und y nicht weiter von einander abhängig. Das iſt aber nicht mehr der Fall, ſobald die Baſis des Körpers innerhalb des Winkels YAX anders als durch die den geraden AX, AY parallelen geraden QM, PM begränzt wird. Indeß drücken auch in dieſem Falle die Formeln $\int\partial x\int z\partial y$ und $\int\partial y\int z\partial x$ das Volumen eines Körpers, welcher ganz oder zum Theil von der durch N gehenden krummen Fläche begränzt wird, oder eines Abſchnittes deſſelben aus. Sieht man nämlich x in der Gleichung für die krumme Fläche als unveränderlich an, ſo gilt ſie für die Curve, welche der Durchſchnitt der krummen Fläche mit der Ebene PMN iſt. Die Ordinate dieſer Curve iſt NM oder z, die Abſciſſe PM oder y, alſo $\int z\partial y$ im allgemeinen die Area eines Schnittes des Körpers mit einer auf die Axe der x in dem unbeſtimmten Abſtande x vom An-

fange der Abſciſſen ſenkrechten Ebene. Daher ſtellt nach (1) $\int \partial x \int z \partial y$ den Inhalt eines unbeſtimmten Stücks des Körpers, welches zwiſchen zwey auf die Axe der x ſenkrechten und parallelen Ebenen enthalten iſt, dar, nur mit dem Unterſchiede, daß $\int z \partial x$ jetzt, eine Function von x wird, deren vollſtändige Beſtimmung von der Figur der Baſis des Körpers abhängt. Auf gleiche Weiſe drückt $\int \partial y \int z \partial x$ den Inhalt eines unbeſtimmten Stücks des Körpers zwiſchen zwey auf der Axe der y ſenkrechten und unter ſich parallelen Ebenen aus. Die Formel $\int\int z \partial x \partial y$ ſtellt alſo in allen Fällen das Volumen eines Körpers oder eines körperlichen Abſchnittes zwiſchen zwey parallelen Ebenen dar, wofern nur die ſucceſſiven Integrale zwiſchen den gehörigen durch die Begränzung des Körpers beſtimmten Gränzen genommen werden. — Daß die Formeln $\int\int x \partial y \partial z$, $\int\int y \partial x \partial z$ daſſelbe leiſten, wird man leicht aus dem Vorigen abnehmen.

4. Exempel. Es iſt ADB (Fig. 51.) ein gleichſeitiger Kegel, welcher mit der Axe DC parallel in LKL geſchnitten iſt. Man ſucht das Kegelſtück KLBL, deſſen Gränzen der hyperboliſche Schnitt LKL, das Segment der Grundfläche LBL und das Stück der Kegelfläche KLBL ſind.

Man nehme den auf LL ſenkrechten Durchmeſſer der Grundfläche, AB zur Abſciſſenaxe, den Mittelpunct der Grundfläche C zum Anfange der Coordinaten, ſo iſt, wenn h die Höhe des Kegels, CD, und a den Halbmeſſer der Grundfläche bezeichnet, die Gleichung für die Kegelfläche

$$aa(h-z)^2 = hh(xx+yy)$$

wie man aus 35. in dem Artikel, Krumme Fläche, leicht findet, wenn man daſelbſt h — z ſtatt x und z ſtatt x ſchreibt. Hieraus iſt

$$z = \frac{h}{a}\left(a - \sqrt{(xx+yy)}\right)$$

Es ſey EDE ein Schnitt durch die Axe dem Schnitte LKL parallel, ſo iſt, wenn V den Inhalt des Solidums ECDKPL bezeichnet,

$$V = \frac{h}{a} \int\int \partial x \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right)$$

Man ſehe zuerſt x und ∂x als unveränderlich an, integrire alſo nach y, ſo daß

$$V = \frac{h}{a} \int \partial x \int \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right)$$

ſo iſt aus dem Art., Integralformel, 57. u. 50.

$$\int \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right) = ay - \frac{1}{2} y \sqrt{(xx + yy)}$$

$$- \frac{1}{2} xx \log \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{\text{const.}}$$

Die Conſtante kann hier eine Function von x seyn. Um das Stück des Kegels zu haben, welches über dem unendlich ſchmalen trapezförmigen Streifen PLlp der Grundfläche ſteht, muß man das gefundene Integral von y = o bis y = PL = $\sqrt{(aa - xx)}$ erſtrecken, wodurch

$$\int \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right) = \frac{1}{2} a \sqrt{(aa - xx)}$$

$$- \frac{1}{2} x^2 \log \frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x}$$

folglich

$$V = \frac{1}{2} h \int \partial x \sqrt{(aa - xx)} - \frac{h}{2a} \int x^2 \partial x \log \frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x}$$

wird.

Den erſten Theil des Integrals hat man aus 57. 49. in dem Art., Integralformel; den andern Theil ſucht man nach der Formel $\int Z \partial X = ZX - \int X \partial Z$, indem man $\partial X = x^2 \partial x$ nimmt. So wird

$$\int x^2 \partial x \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x} = \frac{1}{3} x^3 \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

$$-\frac{1}{3} \int x^3 . \partial . \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x} + \frac{1}{3} a \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Das in $\frac{1}{3}$a multiplicirte Integral ſetze man unter die Form $aa\int \frac{(xx:aa)(\partial x:a)}{\sqrt{(1-xx:aa)}}$, ſo ergiebt ſich das Integral $\int \frac{(xx:aa)(\partial x:a)}{\sqrt{(1-xx:aa)}}$ aus Integralformel, 62., wenn man $\frac{x}{a}$ ſtatt des dortigen x, alſo $\sqrt{\left(1-\frac{xx}{aa}\right)}$ ſtatt z ſchreibt. Man erhält auf dieſe Weiſe

$$V = \frac{1}{3} hx \sqrt{(aa-xx)} + \frac{1}{6} aah . \text{Ang. sin} \frac{x}{a}$$

$$-\frac{1}{6} \frac{hx^3}{a} \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

Das Integral verſchwindet für $x = 0$ wie es ſeyn muß, wenn das Solidum in EDE anfangen ſoll. Man bemerke hiezu, daß der Logarithme einer unendlich großen Zahl zwar ſelbſt unendlich, aber ein Unendliches von einem unendlich niedrigen Grade iſt, und in 0^3 multiplicirt wird.

Setzt man $x = a$, ſo erhält man den vierten Theil des Kegels, DCBE, $= \frac{1}{2}\pi aah$. Hiervon V abgezogen, ſo bleibt das Solidum KPBL, welches verdoppelt das Segment KLBL giebt. Es wird

$$\text{Segm. KLBL} = \frac{1}{3} aah \text{ Ang. cos} \frac{x}{a} - \frac{2}{3} hx \sqrt{(aa-xx)}$$
$$+ \frac{1}{3} \frac{hx^3}{a} \log \frac{a + \sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

Hier iſt $aa \text{ Ang. cos} \frac{x}{a} - x \sqrt{(aa-xx)}$ der Inhalt des Kreisabſchnittes LBL, und $h \sqrt{(aa-xx)} - \frac{hx^2}{a} \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$ der Inhalt des hyperboliſchen Abſchnittes LKL: daher iſt

Segm. KLBL

$$= \frac{1}{3} CD \times \text{Segm. LBL} - \frac{1}{3} CP \times \text{Segm. LKL}$$

ſo groß nämlich, als der Unterſchied der beiden Kegelſtücke DLBL und DLKL, wovon jenes die Grundfläche LBL, Höhe CD, dieſes die Grundfläche LKL, Höhe CP hat.

5. Kepler hat ſich viele Mühe gegeben, einen ſolchen Abſchnitt eines geraden Kegels wie KLBL zu cubiren, allein es iſt ihm nicht damit geglückt. Man ſehe ſeine Noua Stereometria doliorum Blatt O3. und ſeinen Auszug aus der uralten Meſſe-Kunſt Archimedis. S. 43. Nr. 55.

Noch Dechales ſagt Geom. pract. Lib. XI. Prop. XXIX. Cor. 2. im zweyten Theile des Mund. math. Esset optabilius, cognoscere soliditatem portionis conicae comprehensae plano axi parallelo. Und doch ſcheint es, als habe dieſem Schriftſteller die zuletzt gegebene geometriſche Beſtimmung des Raums KLBL nicht entgehen können, da er Lib. VIII. Propos. XII. den Satz hat: Omnis quantitas, cuius elementa decrescunt in ratione duplicata altitudinum est tertia pars quantitatis inte-

grae, und das Corollarium beyfügt: Omne cylindricum omnis conici eiusdem altitudinis triplum est. Freylich fehlte es an der Beſtimmung der hyperboliſchen Area, von welcher Kepler ſagt, daß ſie noch nicht erfunden ſey. Kepler ſowohl als Dechales ſuchten die Cubirung eines ſolchen Abſchnittes, wie KLBL, zum Behuf der Viſirung liegender, nicht voller Fäſſer.

6. Es ſey jetzt der Inhalt des über dem Rechtecke AM (Fig. 50.) ſich ausbreitenden, von den Ebenen ZAQ, NMQ, NMP, ZAP eingeſchloſſenen Theils der krummen Fläche S, ſo iſt S eine Function von x und y, und es wird auf ähnliche Art wie vorhin dargethan, daß das krummlinige Viereck Nrtn

$$= \frac{\partial\partial S}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^3 S}{1.2.\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y$$

$$+ \frac{\partial^3 S}{1.2.\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta x^2 + \text{etc.} \ldots$$ iſt. Man lege durch N (Fig. 52, wo die Bezeichnungen dieſelben wie in Fig. 50 ſind) eine berührende Ebene, welche die Ebenen Mr, rs, sn, nM in den geraden NR, RT, TV, VN ſchneide, und ziehe noch die Chorden Nr, rt, tn, nN, ſo wie auch Nt. Sind nun Δx, Δy klein genug genommen, daß das Stück Nrtn der krummen Fläche gegen die Ebene der x, y entweder durchaus hohl, welchen Fall die Zeichnung darſtellt, oder durchaus erhaben iſt, ſo fällt das krummlinige Trapezium Nrtn zwiſchen zwey Gränzen, von denen die kleinere die Summe der beiden Dreyecke Nnt und Nrt, die größere die Summe der drey Vierecke NRTV, RTtr, TVnt und der beiden Dreyecke NRr und NVn iſt.

Wir wollen mit der Beſtimmung der größeren Gränze den Anfang machen.

Wenn ϑ den Neigungswinkel der berührenden Ebene gegen die Ebene der x, y bezeichnet, ſo iſt der

Inhalt des Vierecks NRTV = Muſm × sec ϑ (Projection, 13.) = $\Delta x \Delta y$ sec ϑ. Iſt nun

$$\partial z = p\partial x + q\partial y$$

die Differentialgleichung für die krumme Fläche, wo p und q Functionen von x und y ſind, ſo iſt tang $\vartheta = \sqrt{(p^2 + q^2)}$ (Krumme Fläche, 114.), alſo sec $\vartheta = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ und NRTV $= \Delta x \Delta y \sqrt{(1+p^2+q^2)}$. Ferner iſt

ΔNVn $= \frac{1}{2}$Vn. Mm

Trap. RTtr $= \frac{1}{2}$(Rr + Tt). us $= \frac{1}{2}$(Rr + Tt). Mm

alſo ΔNVn + Trap. RTtr $= \frac{1}{2}$(Vn + Rr + Tt). Mm

und eben ſo

ΔNRr + Trapez VTtn $= \frac{1}{2}$(Vn + Rr + Tt). Mu

alſo ΔNVn + ΔNRr + Trap. RTtr + Trap. VTtn $= \frac{1}{2}$(Vn + Rr + Tt) (Mm + Mu).

Da für die berührende Ebene, in ſo fern der Punct N ſich nicht ändert, $\frac{\partial z}{\partial x}$, und $\frac{\partial z}{\partial y}$ unveränderlich ſind, ſo ſind die Werthe der Coordinaten Vm, Ru, Ts folgende

$$\text{Vm} = z + \frac{\partial z}{\partial x}.\Delta x$$

$$\text{Ru} = z + \frac{\partial z}{\partial y}.\Delta y$$

$$\text{Ts} = z + \frac{\partial z}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}.\Delta y$$

Hieraus und aus den Werthen von mn, ur, ts, welche in (3) gegeben ſind, werden die Werthe von Vn, Rr, Tt, erhalten, und es wird

$$\tfrac{1}{2}(\text{Vn} + \text{Rr} + \text{Tt})(\text{Mm} + \text{Mu}) =$$

$$-\tfrac{1}{2}(\Delta x + \Delta y)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\Delta y^2 + \text{etc.}\right)$$

Die höchſten Glieder dieſes gehörig entwickelten Ausdrucks ſind von der dritten Ordnung in Beziehung auf Δx, Δy: daher iſt die größere Gränze

$$\Delta x \Delta y \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} + L\Delta x^3 + M\Delta x^2 \Delta y + N\Delta x \Delta y^2 + O\Delta y^3 + \ldots$$

wo L, M, N, O Functionen von x und y ſind.

Die kleinere Gränze zu finden bemerke man, daß weil $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus der Gleichung für die krumme Fläche $= p$ und $\frac{\partial x}{\partial y} = q$ iſt,

$$mn = z + p\Delta x + \frac{\partial p}{1.2.\partial x}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 p}{1.2\,3\partial x^2}\Delta x^3 + \ldots$$

$$ur = z + q\Delta y + \frac{\partial q}{1.2.\partial y}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 q}{1.2.3\partial y^2}\Delta y^3 + \ldots$$

$$st = z + p\Delta x + q\Delta y + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x^2 + 2\frac{\partial p}{\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial q}{\partial y}\Delta y^2\right) + \text{etc.}\ldots$$

wird.

Den Inhalt des Dreyecks Nnt kann man nach (Projection, 16.) finden, wenn man bemerkt, daß $\frac{1}{2}$ Mm (ts — mn) die Area der Projection des Dreyecks Nnt auf die Ebene Mn, $\frac{1}{2}$ ms (mn — MN) die Area der Projection auf die Ebene Mt iſt. Es wird nämlich

$$\Delta\, Nnt = \tfrac{1}{2}\sqrt{(Mm^2 . ms^2 + Mm^2 (ts - mn)^2 + ms^2 (mn - MN)^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta x\Delta y \sqrt{\left(1 + \left(q + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta x + \tfrac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial y}\Delta y + \ldots\right)^2 + \left(p + \frac{\partial p}{1.2.\partial x}\Delta x + \ldots\right)^2\right)}$$

$= \frac{1}{2}\Delta x\Delta y\sqrt{(1+p^2+q^2)} + P\Delta x^2\Delta y + Q\Delta x\Delta y^2$
$+ \text{etc.}..$

wo P, Q Functionen von x und y ſind.

Eben ſo wird die Area des Dreyecks Nrt

$$= \frac{1}{2}\Delta x\Delta y\sqrt{\left(1+\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\Delta y+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(q+\frac{\partial q}{1.2.\partial y}\Delta y+\ldots\right)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta x\Delta y\sqrt{(1+p^2+q^2)} + P'\Delta x^2\Delta y + Q'\Delta x\Delta y^2 + \text{etc.}\ldots$$

Daher iſt die kleinere Gränze

$$\Delta x\Delta y\sqrt{(1+p^2+q^2)} + (P+P')\Delta x^2\Delta y + (Q+Q')\Delta x\Delta y^2 + \text{etc.}\ldots$$

Hieraus wird auf ähnliche Art wie in (3) geſchloſſen

$$\frac{\partial\partial S}{\partial x\partial y} = \sqrt{(1+p^2+q^2)} = \sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)},$$

mithin

$$S = \iint\partial x\partial y\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

wo wegen der gedoppelten Integration das in (3) bemerkte zu berückſichtigen iſt.

Auch hier läßt ſich zeigen, daß $\iint\partial x\partial y\sqrt{(1+pp+qq)}$ durch die gehörige Begränzung der Integrale in allen Fällen den Inhalt der ganzen krummen Oberfläche eines Körpers oder eines Theils derſelben ausdrückt, nicht bloß in dem hier zum Grunde gelegten Falle einer rectangulären Baſis. Die Ausführung davon findet aber in dem gegenwärtigen Werke wegen ihrer Umſtändlichkeit keinen Platz.

7. Exempel. Es iſt ABCD (Fig. 53.) ein Rechteck, auf deſſen Ebene das bey C rechtwinklige Dreyeck BCE über BC ſenkrecht errichtet iſt. Eine gerade Linie, welche ſich an AD und BE ſo hinbewegt, daß ſie AD und BE immer proportionirt ſchneidet, beſchreibt eine krumme Fläche, deren Inhalt geſucht wird.

Es ſey PR die beſchreibende gerade in irgend einer Lage. Man ziehe RQ ſenkrecht auf BC und verbinde PQ. Weil vermöge der Vorausſetzung AP : PD = BR : RE, und nach der Conſtruction BR : RE = BQ : QC, ſo iſt AP : PD = BQ : QC, und, weil AD = BC, AP = BQ, QC = PD, alſo PQ der CD parallel. Mithin iſt die Ebene PQR der Ebene ECD parallel, folglich BQP ein rechter Winkel, ſo wie APQ. Von einem willkührlichen Puncte N der PR ziehe man an PQ die ſenkrechte NM, ſo iſt NM auch auf der Ebene ABCD perpendikular. Man ſetze AP = x, PM = y, MN = z, ſo iſt, weil BC : CE = AP (= BQ) : RQ, wenn BC : CE = 1 : m geſetzt wird, RQ = mx. Ferner iſt AB (= PQ) : RQ = PM : MN, alſo AB = a geſetzt, $z = \frac{mxy}{a}$ die Gleichung für die krumme Fläche. Hieraus folgt

$$p = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{my}{a}$$

$$q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{mx}{a}$$

folglich, wenn das unbeſtimmte Stück der krummen Fläche, deſſen Projection auf ABCD das Rechteck AP × PM iſt, S heißt

$$S = \frac{1}{a}\iint \partial x \partial y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}$$

Man integrire zuerſt in Beziehung auf y, ſo wird

$$S = \frac{1}{a}\int \partial x \int \partial y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}$$

Nun iſt (Integralformel, 57. 50.)

$$\int \partial y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)} = \tfrac{1}{2} y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}$$

$$\frac{aa + mmxx}{2m} \log \frac{my + \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}}{\sqrt{(aa + mmxx)}}$$

welches Integral für $y = 0$ verſchwindet, wie es ſeyn muß, wenn die Fläche von AD an verlangt wird. Um durch die zweyte Integration die ganze über APQB ſtehende Fläche, welche N heißen mag, zu erhalten, muß man noch $y = a = AB$ ſetzen, und es wird

$$N = \tfrac{1}{2}\int \partial x \sqrt{((1+m^2)a^2 + m^2x^2)}$$
$$+ \frac{1}{2ma}\int \partial x (aa + mmxx) \times$$
$$\log \frac{ma + \sqrt{((1+m^2)a^2 + m^2x^2)}}{\sqrt{(a^2 + m^2x^2)}}$$

Die Integration giebt, wenn man zur Abkürzung $(1+m^2)a^2 = cc$ macht

$$\int \partial x \sqrt{(c^2 + m^2x^2)} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(c^2 + m^2x^2)}$$
$$+ \frac{cc}{2m} \log \frac{mx + \sqrt{(c^2 + m^2x^2)}}{c.}$$

$$\int \partial x (aa + mmxx) \times \log \frac{ma + \sqrt{(c^2 + m^2x^2)}}{\sqrt{(a^2 + m^2x^2)}}$$
$$= (a^2x + \tfrac{1}{3}mx^3) \log \frac{ma + \sqrt{(c^2 + m^2x^2)}}{\sqrt{(a^2 + m^2x^2)}}$$
$$+ \frac{ax\sqrt{(c^2 + m^2x^2)}}{6}$$
$$- \frac{(m^2 - 5m + 2)a^3}{6} \log \frac{mx + \sqrt{(c^2 + m^2x^2)}}{c}$$
$$- \frac{(3m - 1)a^3}{m} \text{Arc. sin} \frac{max}{c\sqrt{(a^2 + m^2x^2)}}$$

wo die Integrale ſo genommen ſind, daß ſie für $x = 0$ verſchwinden, wie ſich gehört, wenn die Fläche von AB an gerechnet werden ſoll.

Hierdurch kommt

$$N = \frac{(3m + 1)x}{12m} \sqrt{(cc + mmxx)}$$

$$+ \frac{(2mm + 5m + 1)a^2}{12m} \log \frac{mx + \sqrt{(cc + mmxx)}}{c}$$

$$+ \frac{(3aa + mxx)x}{6ma} \log \frac{ma + \sqrt{(cc + mmxx)}}{\sqrt{(aa + mmxx)}}$$

$$- \frac{(3m - 1)aa}{2mm} \text{Ang. sin} \frac{max}{c\sqrt{(aa + mmxx)}}$$

Wird in dieſem Ausdrucke $x = AD$ geſetzt, ſo erhält man die ganze krumme Fläche über dem Rechtecke AC.

8. Ein Beyſpiel zu haben, wo die Gränzen des erſten Integrals in Abſicht auf y veränderlich ſind, ſey (Fig. 54.) ADCB der Octant einer Kugel, und über dem Halbmeſſer CA als Durchmeſſer in der Ebene des Quadranten ACB der Halbkreis CLA beſchrieben. Dieſer Halbkreis ſey die Grundfläche eines halben geraden Cylinders, deſſen gekrümmte Seitenfläche den Octanten der Kugelfläche in der Curve DRA durchſchneidet. Man ſucht das Stück der Kugelfläche zwiſchen den Quadranten DB, BA und der Curve DRA.

Setzt man den Halbmeſſer der Kugel $CA = CB = CD = a$, die rechtwinkligen Coordinaten eines Puncts N der Kugelfläche aber $CP = x$, $PM = y$, $MN = z$, ſo iſt für die Kugelfläche

$$z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$$

Die Ebene PMN ſchneide die Kugelfläche in OQ, die Cylinderfläche, ſo weit ſolche innerhalb der Kugelfläche enthalten iſt, in RL, ſo daß R auf dem gemeinſamen Durchſchnitte beider Flächen ſich befindet. Bezeichnet nun S das unbeſtimmte Stück DBQR der Fläche DRAB,

$$\text{ſo iſt } S = \iint \partial x \partial y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}.$$

$$\text{Da nun } \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{x}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$$

ſo wird $S = a\iint \frac{\partial x \partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$

Integrirt man hier zuerſt in Bezug auf y, ſo wird

$$S = a\int \partial x \int \frac{\partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$$

Es iſt

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}} = \text{Arc. sin} \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}} + \text{Const.}$$

und das Integral von $y = PL = \sqrt{(ax - xx)}$ bis $y = PQ = \sqrt{(aa - xx)}$ zu erſtrecken. Dadurch erhält man

$$S = a\int \partial x \, \text{Arc. cos} \sqrt{\frac{x}{a + x}}$$

Es iſt

$$\int \partial x \, \text{Arc. cos} \sqrt{\frac{x}{a+x}} = x \, \text{Arc. cos} \sqrt{\frac{x}{a+x}}$$
$$+ \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} \partial x}{a + x}$$

Dadurch wird

$$S = ax \, \text{Arc. cos} \sqrt{\frac{x}{a+x}} + a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^2 \, \text{Arc. sin} \sqrt{\frac{x}{a+x}}$$

wo keine Conſtans hinzukommt, weil für $x = o$, auch $S = o$ iſt. Setzt man $x = a$, ſo erhält man das von den Quadranten AB, BD und der Curve DRA eingeſchloſſene Stück der Kugelfläche $= aa$, wie in dem Artikel, Florentiniſche Aufgabe, 7. gefunden iſt, wo aber zur Vergleichung bemerkt werden muß, daß dort der Quadrant, welcher hier DCA heißt, zur Grundfläche gemacht worden iſt.

9.

9. Es kann zum Behuf der Integration oder in anderer Hinſicht nöthig oder nützlich ſeyn, in die Formeln

$$\iint z\partial x\partial y \text{ und } \iint \partial x\partial y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$$

ſtatt x, y ein Paar andere veränderliche Größen t, u, wovon jene Functionen ſind, wodurch dann auch z eine Function dieſer Größen wird, einzuführen, und dann die Integration zuerſt entweder nach t und darauf nach u oder umgekehrt vorzunehmen. Hierbey darf man aber nicht in den obigen Formeln ſtatt ∂x, ∂y gerade zu ihre in t, u, ∂t, ∂u ausgedruckten Werthe ſubſtituiren, ſondern es müſſen die zu ſubſtituirenden Werthe der Bedingung untergeordnet ſeyn, daß bey der jedesmaligen Integration eine der veränderlichen Größen als conſtant betrachtet wird.

Bezieht man die Puncte einer Curve BM durch rechtwinklige Coordinaten AP = x, PM = y, auf die Axe AX, und zieht der Ordinate PM die pm unendlich nahe, ferner MR, mr, innerhalb der Parallelen PM, pm der AX parallel, ſo iſt das Element des Flächenraums der Curve das Elementarrechteck PMRp = y∂x. Dies ſelbſt aber beſteht aus unendlich vielen Elementarrechtecken, wie MRrm = ∂x∂y. Der Flächenraum der Curve iſt alſo das Doppelintegral ∬∂x∂y, wo offenbar, wenn man zuerſt nach y integrirt, ∂x als conſtant zu betrachten iſt.

Bezieht man hingegen die Puncte der Curve durch Ordinaten CM = u, die von einem Puncte C ausgehen, und durch veränderliche Winkel ACM = t auf die der Lage nach unveränderliche ACX, ſo iſt, wenn Cm der CM unendlich nahe gezogen wird, und aus C mit CM, Cm innerhalb des Winkels MCm die unendlich kleinen Kreisbogen MN, mn beſchrieben werden, das Element der Area der Elementarſector CMN = $\frac{1}{2}u^2\partial t$; dieſer ſelbſt aber beſteht wieder aus unendlich vielen krummlinigen Elementartrapezen MNmn

$= u\partial u\partial t$; ſo daß der Flächenraum der Curve das Doppelintegral $\int\int u\partial u\partial t$ iſt, wo ∂t bey der Integration nach u als conſtant zu betrachten iſt.

Setzt man AC = h, ſo iſt

$$x = h - u\cos t$$
$$y = u\sin t$$

alſo

$$\partial x = -\partial u\cos t + u\sin t\partial t$$
$$\partial y = \partial u\sin t + u\cos t\partial t.$$

Offenbar würde man ſtatt $u\partial u\partial t$ ganz etwas anders erhalten, wenn man die vorigen Werthe von ∂x, ∂y in $\partial x\partial y$ ſubſtituiren wollte. Aber das Elementartrapez MNmn läßt ſich im Allgemeinen auch nicht dem Elementarrechtecke MRmr gleich ſetzen; es iſt hierbey vielmehr auf eine Vertauſchung der Formen der Elemente der Area der verſchiedenen Entſtehungsart derſelben gemäß, als auf Gleichmachung derſelben abgeſehen.

Da, wenn man von dem Puncte M zu dem Puncte N übergeht, t allein ſich ändert, x und y aber allgemein Functionen von t und u ſind, ſo ſind die Coordinaten von N: $AQ = x + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial t$, $QN = y + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\partial t$ nach der bekannten Bezeichnung der partiellen Differentiale. Eben ſo ſind die Coordinaten von n: $Aq = x + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\partial u$, $qn = y + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\partial u$, endlich von m: $Ap = x + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\partial u$, $pm = y + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\partial u$.

Hieraus folgt die unendlich kleine Sehne MN =
$\partial t \sqrt{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right)}$ = der unendlich kleinen Sehne mn. Daher iſt das unendlich kleine von der Sehne MN, mn und von Mn, Nm begränzte gerad=linige Viereck, welchem das krummlinige Trapez MNmn gleich iſt, ein Parallelogramm deſſen Inhalt nach einem nicht ſchwer abzuleitenden Satze von der Berechnung der Area eines Dreyecks aus den Coordinaten ſeiner Winkelpuncte =
$nq.Pp - MP.qp - mp.Pq = MP.Qp + mp.PQ - NQ.Pp$
$= \partial t \partial u \left(\frac{\partial x}{\partial t} . \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial t} . \frac{\partial x}{\partial u}\right)$ iſt.

Da in dem vorliegenden Falle $\frac{\partial x}{\partial t} = u \sin t$,
$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin t$, $\frac{\partial x}{\partial u} = -\cos t$, $\frac{\partial y}{\partial t} = u \cos t$ iſt, ſo wird ganz richtig das ſtatt $\partial x \partial y$ zu ſubſtituirende Element der Area = $u \partial u \partial t$.

Es iſt hier zugleich der Werth gefunden, welcher in den Formeln für das Volumen und die Oberfläche
$\int\int z \partial x \partial y$ und $\int\int \partial x \partial y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$ ſtatt $\partial x \partial y$ zu ſubſtituiren iſt, wenn ſtatt x, y zwey neue veränderliche Größen t, u, wovon jene Functionen ſind, eingeführt werden. Denn obgleich in Beziehung auf eine Curve y eine Function von x und u eine Function von t iſt, ſo ſind doch im Vorhergehenden ſowohl y und x als t und u ſo behandelt worden, als ſeyen ſie von einander unabhängig. Die Formeln für das Volumen und die Oberfläche werden dadurch folgende:

$$\int\int z \partial t \partial u \left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right)$$

und $\iint \partial t \partial u \times$

$$\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right)\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$$

wo z, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ auch Functionen von t und u ſind, die durch die Subſtitutionen der in t und u ausgedruckten Werthe von x und y erhalten werden.

Die Werthe von $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ laſſen ſich auch aus denen von $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ zuſammenſetzen. Es iſt nämlich, in ſo fern z eine Function von x und y iſt,

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y$$

und in ſo fern x und y Functionen von t und u ſind

$$\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\partial u$$

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\partial u$$

alſo

$$\partial z = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right)\partial t$$
$$+ \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right)\partial u$$

Aber wenn z eine Function von t und u iſt, ſo hat man

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\partial u$$

folglich, weil t und u nicht von einander abhängen,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

Hieraus wird

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}$$

Werden dieſe Werthe ſubſtituirt, ſo wird der Aus-druck für die Oberfläche

$$\iint \partial t \partial u \sqrt{\Big[\Big(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\Big)^2 + \Big(\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Big)^2 + \Big(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\Big)^2\Big]}.$$

10. Exempel. In der Gleichung für den geraden Kegel (4)

$$z = \frac{h}{a}(a - \sqrt{(xx + yy)})$$

ſetze man $x = a \sin t \cos u$, $y = a \sin t \sin u$, ſo wird $z = h - h \sin t$ und das Volumen $a^2 h \iint \partial u \partial t \sin t \cos t (1 - \sin t)$; die Oberfläche $a(aa + hh)^{\frac{1}{2}} \iint \partial t \partial u \sin t \cos t$, wo die Integrale, wie man leicht findet, von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}\pi$ und von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ zu erſtrek-

ken ſind, um das ganze Volumen und die ganze gekrümmte Seitenfläche zu haben.

Integrirt man zuerſt nach t, ſo werden die Integrale innerhalb der angegebenen Gränzen $\frac{1}{6}a^2h\int\partial u$ und $\frac{1}{2}a(aa+hh)^{\frac{1}{2}}\int\partial u$; hiervon geben die Integrale von $u=o$ bis $u=2\pi$ das Volumen $\frac{1}{3}\pi a^2h$ und die gekümmte Seitenfläche $\pi a\sqrt{(aa+hh)}$ wie bekannt.

Der Körper ſey ein gerades paraboliſches Konoid mit elliptiſcher Grundfläche, für welchen

$$\frac{xx}{aa}+\frac{yy}{bb}+\frac{z}{c}=1$$

wo a und b die halben Axen der Grundfläche, c die Höhe des Körpers ſind. Setzt man $x=a\sin t\cos u$, $y=b\sin t\sin u$, ſo wird $z=c\cos t^2$; und das Volumen $abc\int\int\partial t\partial u\sin t\cos t^3$. Hiervon iſt das erſte Integral von $t=o$ bis $t=\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}abc\int\partial u$ und das zweyte Integral nach u von $u=o$ bis $u=2\pi$, $\frac{1}{2}\pi abc$.

Die gekrümmte Oberfläche des Konoids wird
$\int\int\partial u\partial t\sin t\cos t\sqrt{(a^2b^2+4c^2\sin t^2(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2))}$
wenn die Integrale innerhalb der vorigen Gränzen genommen werden. Das Doppelintegral iſt aber eben ſo wenig als das in dem Art. Sphäroid, 32. durch einen endlichen Ausdruck angebbar.

Iſt $a=b$, alſo das Konoid ein durch Drehung einer halben Parabel um ihre Axe entſtandenes, ſo wird

die vorige Formel $a\int\int\partial u\partial t \sin t \cos t \sqrt{(a^2 + 4c^2 \sin t^2)}$. Es iſt $a\int\partial t \sin t \cos t \sqrt{(a^2 + 4c^2 \sin t^2)}$ von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{a}{12c^2}(a^2 + 4c^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^4}{12c^2}$. Dies mit ∂u multiplicirt und dann von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ integrirt giebt die gekrümmte Oberfläche des Konoids $= \frac{\pi a}{6c^2}(a^2 + 4c^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi a^4}{6c^2}$, welches mit Complanation, Ex. 2. bey gehöriger Vergleichung übereinſtimmt.

11. Da die in (9) gewieſene Transformation der Formel $\partial x\partial y$ oder allgemeiner dieſer $M\partial x\partial y$, wo M eine Function von x, y iſt, auf geometriſchen Gründen beruht, ſo folgt hier die analytiſche Herleitung derſelben, welche Euler zuerſt gelehrt hat.

Geſetzt alſo, man führe ſtatt der veränderlichen Größe y, in Beziehung auf welche man die Formel $M\partial x\partial y$ zuerſt zu integriren vorhat, eine neue u ein, indem man ſtatt y eine gegebene Function von x, welches bey der erſten Integration als unveränderlich betrachtet wird, und von u ſubſtituirt, ſo iſt allgemein

$$\partial y = P\partial x + Q\partial u$$

wo P und Q Functionen von x und u ſind; hier aber, wo x während der Integration nach y als unveränderlich angeſehen wird, $\partial y = Q\partial u$. Dadurch verwandelt ſich die Formel $M\partial x\partial y$ in $M'Q\partial x\partial u$, wo M' der Werth iſt, welcher aus M durch Subſtitution des Werths von y in x und u hervorgehet. Die Formel $M'Q\partial x\partial u$ iſt nun zweymal nach einander ſo zu integriren, daß bey der Integration nach einer der beiden veränderlichen x, u jedesmal die andere als unveränderlich angeſehen wird.

Führt man aber, ehe man die Integration nach x unternimmt, noch eine neue veränderliche t ein, indem man ſtatt x eine gewiſſe Function dieſer veränder-

lichen und der bey der Integration nach x als conſtant betrachteten u ſetzt, ſo iſt wieder allgemein

$$\partial x = R\partial t + S\partial u$$

wo R und S Functionen von t und u ſind, hier aber wegen der momentanen Unveränderlichkeit von u, $\partial x = R\partial t$. Hierdurch wird, wenn M'' und Q' die Werthe von M und Q ſind, welche durch Elimination von x entſtehen, aus der Formel $M'Q\partial x\partial u$ dieſe $M''Q'R\partial t\partial u$, in der nun weiter keine veränderlichen Größen als t und u ſind, und welche zweymal, nämlich einmal in Beziehung auf u, das andere mal in Beziehung auf t, oder auch in umgekehrter Ordnung zu integriren iſt.

Führt man nun ſtatt x, y zugleich zwey neue veränderliche t, u, von denen jene Functionen ſind, ein, ſo iſt

$$\partial x = R\partial t + S\partial u$$
$$\partial y = T\partial t + V\partial u$$

Vorher war $\partial y = P\partial x + Q\partial u$, alſo wenn man ſtatt x ſeinen Werth in t, u ſubſtituirt, wodurch Q zu Q', und $\partial x = R\partial t + S\partial u$ wird,

$$\partial y = PR\partial t + (Q' + PS)\partial u.$$

Wird dieſe Formel mit $\partial y = T\partial t + V\partial u$ identiſch gemacht, ſo ergiebt ſich daher der Werth von Q'. Es iſt nämlich wegen der Unabhängigkeit der beiden t und u von einander

$$T = PR$$
$$V = Q' + PS$$

und daraus $Q' = \frac{RV - ST}{R}$, alſo $Q'R\partial t\partial u = \partial t\partial u(RV - ST)$, und dies iſt der geſuchte ſtatt $\partial x\partial y$ in die Formel $M\partial x\partial y$ zu bringende Werth.

Da

$$R = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right),\ V = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right),\ S = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right),\ T = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

ſo iſt $\partial t \partial u (RV - ST) =$

$$\partial t \partial u \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \right\}$$

welches mit (9) übereinſtimmt.

Vertauſcht man in der gefundenen Formel t und u gegenſeitig, welches wegen der Gleichungen

$$\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\partial u$$

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\partial u$$

die dadurch nicht geändert werden, verſtattet iſt, ſo erhält man $\partial t \partial u \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) \right\}$ welche Formel das Entgegengeſetzte der vorigen iſt. Man hat es alſo immer durch Vertauſchung der Benennungen in ſeiner Gewalt, ſtatt $\partial x \partial y$ eine poſitive Formel in t und u zu ſetzen. Man kann aber dieſer Vertauſchung ſich ganz überheben, wenn man die Formel jedesmal poſitiv nimmt, weil dieſes in dem Falle einer negativen Formel mit der Vertauſchung auf eins hinausläuft.

12. Die vorigen Formeln für das Volumen und die Oberfläche eines Körpers begreifen diejenigen für die ähnlichen Beſtimmungen an einem durch Drehung entſtandenen Körper unter ſich, wie ſich ſchon aus den Benſpielen in (10) abnehmen läßt, und jetzt noch beſonders gezeigt werden ſoll.

Es ſey alſo BND (Fig. 56.) irgend eine einfach gekrümmte Curve *), durch deren Drehung um die in ihrer Ebene liegende Axe der z, AZ, ein runder Kör-

*) Sollte auch urſprünglich eine doppelt gekrümmte Curve der Entſtehung einer Drehungsfläche zum Grunde gelegt ſeyn, ſo läßt ſich ihr immer eine einfach gekrümmte Curve, durch deren Drehung um eine in ihrer Ebene liegende Axe dieſelbe Fläche erzeugt werden kann, ſubſtituiren.

per entſteht, deſſen Volumen und Oberfläche geſucht werden. Die Gleichung für die begränzende krumme Fläche iſt in dieſem Falle $z = \varphi(xx + yy)$, wo φ das Functionszeichen iſt, wie aus: Krumme Fläche, 39, folgt.

Man ſetze ſtatt der veränderlichen x, y ein Paar neue t, u, wovon dieſe den Abſtand NQ = AM irgend eines Puncts der krummen Fläche von der Drehungsaxe anzeigt, t aber den Winkel MAP bedeutet, unter welchen die u gegen die Ebene der x, z geneigt iſt. Man hat alſo $x = u\cos t$, $y = u\sin t$, mithin $z = \varphi(u^2)$. Ferner iſt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -u\sin t;\quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \cos t$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \sin t;\quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = u\cos t$$

und es wird $\partial t\partial u \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right\} =$ $-u\partial t\partial u$, wofür man $+u\partial t\partial u$ nimmt (11.). Daher iſt für das Volumen $\int\!\!\int z\partial x\partial y = \int\!\!\int uz\partial u\partial t = 2\pi\int uz\partial u$, wenn man das Integral nach t von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ nimmt, um es über die ganze Oberfläche rings um AZ zu erſtrecken. Integrirt man jetzt nach u theilweiſe, ſo wird

$$2\pi\int uz\partial u = \pi u^2 z - \pi\int u^2\partial z.$$

Dieſer Ausdruck giebt das Volumen des ringförmigen durch die Drehung des Trilineums BMN um AZ beſchriebenen Körpers. Der erſte Theil deſſelben iſt der durch die Drehung des Rechtecks AMNQ beſchriebene Cylinder, daher iſt der durch Drehung von ABNQ beſchriebene runde Körper $= \pi\int u^2\partial z$.

Die Oberfläche des runden Körpers wird, weil $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = 0$ alſo $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\partial u = \partial z$ iſt, aus (9) =

$$\int\int u \partial t \sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)} = 2\pi \int u \sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)}$$

wenn das erſte Integral nach t innerhalb der angegebenen Gränzen genommen wird. Hier iſt $\sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)}$ das Element des Bogens BN.

Die gefundenen Formeln ſtimmen mit denen in den Artikeln, Cubirung und Complanation, nach gehöriger Vertauſchung der Bezeichnungen überein.

13. Zuweilen kann es zur Berechnung des Volumens und der Oberfläche eines Körpers vortheilhafter ſeyn, ſtatt parallelepipedaler Elemente pyramidale oder auch keilförmige zu betrachten, und den Körper aus ſolchen zuſammen zu ſetzen. Obwohl nun die hierauf Bezug habenden Differentialformeln ſich unmittelbar aus der zum Grunde gelegten Entſtehungsart des Körpers, und zwar gemeiniglich kürzer als vermittelſt des in (11) auseinander geſetzten Princips aus den für parallelepipedale Elemente geltenden Formeln herleiten laſſen, ſo ſoll doch hier, um die Anwendung jenes Princips noch mehr ins Licht zu ſetzen, in den nun noch folgenden Beyſpielen ſolches allein gebraucht werden.

14. Es iſt ACB (Fig. 57.) einer der drey Quadranten, welche den Octanten einer Kugelfläche, deren Mittelpunct C, Halbmeſſer CA = CB iſt, begränzen, und zugleich die orthographiſche Projection dieſes Octanten auf die Fläche jenes Quadranten. FG, DE ſind die Halbmeſſer und zugleich die Projectionen von Quadranten zweyer kleineren auf ACB ſenkrechten Kugelkreiſe, deren Pol B iſt. FE iſt ein Stück des Durchmeſſers und zugleich die Projection von einem Theile eines kleineren gleichfalls auf ACB ſenkrechten Kreiſes, deſſen Pol H iſt, und der den Kreis DE in E berührt, den Kreis FG aber in dem Puncte F, wo dieſer dem Quadranten BC begegnet, ſchneidet. Man ſucht den Inhalt des Stücks der Kugelfläche, welches dem Trilineum EFG der Projection entſpricht.

Es ſey BMN die Projection des Quadranten eines größten Kugelkreiſes, welcher den Kreiſen FG, FE, CA in L, M, N begegne. Man ſetze den Bogen BM $=$ t, den Winkel CBN $=$ u, den Halbmeſſer der Kugel Kürze halber $= 1$, ſo ſind die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes M, BCA zur Ebene der y, z genommen $x = \sin t \cos u$, $y = \sin t \sin u$, $z = \cos t$, folglich

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \cos t \cos u; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\sin t \sin u$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \sin t \cos u; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \cos t \sin u$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \sin t \cos t$$

mithin ſtatt $\partial x \partial y$ zu ſetzen $\partial t \partial u \sin t \cos t$. Nun iſt, wenn S das unbeſtimmte Stück FLM der Kugelfläche bezeichnet, aus (8.)

$$S = \int\!\!\int \frac{\partial x \partial y}{z}$$

alſo

$$\begin{aligned} S &= \int\!\!\int \partial t \partial u \sin t \\ &= \int \partial u \int \partial t \sin t \end{aligned}$$

wenn zuerſt nach t integrirt werden ſoll. Integrirt man wirklich, und nimmt das Integral ſo, daß es für $t = BL = BG = BF = a$ verſchwindet, ſo wird

$$S = \int \partial u (\cos a - \cos t).$$

Man verbinde HF, HM durch Bogen größter Kreiſe, ſetze BH $=$ b, HM $=$ HE $=$ HF $=$ c, und den Winkel BHM $= \omega$, ſo giebt das ſphäriſche Dreyeck BHM

$$\cos t = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega$$

alſo

$$\begin{aligned} S &= \int \partial u (\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \omega) \\ &= u (\cos a - \cos b \cos c) - \sin b \sin c \int \partial u \cos \omega \end{aligned}$$

In demſelben ſphäriſchen Dreyeck BHM, worin der Winkel HBM $= 90^\circ - u$, iſt

$$\text{tang}\, u = \frac{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \omega}{\sin c \sin \omega}$$

folglich

$$\frac{\partial u}{\cos u^2} = \frac{(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \omega)\partial \omega}{\sin c \sin \omega^2}$$

Aber

$$\cos u = \frac{\sin c \sin \omega}{\sin t}$$

Daher

$$\partial u = \frac{\sin c(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \omega)\partial \omega}{\sin t^2}$$

und

$$- \partial u \sin b \sin c \cos \omega =$$

$$- \frac{\partial \omega \sin b \sin c^2 \cos \omega (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \omega)}{1 - (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega)^2}$$

Sondert man in dem Differentialfactor zu $\partial \omega$ die darin enthaltenen Ganzen vermittelſt der Diviſion des Zählers durch den Nenner ab, und zerlegt den rückſtändigen ächten Bruch in Partialbrüche, deren Nenner die Factoren des Nenners ſind, ſo wird

$$- \partial u \sin b \sin c \cos \omega = - \partial \omega \cos c$$

$$+ \frac{(\cos b + \cos c)(1 + \cos b \cos c)\partial \omega}{2(1 + \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega)}$$

$$- \frac{(\cos b - \cos c)(1 - \cos b \cos c)\partial \omega}{2(1 - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \omega)}$$

und durch Integration nach (Integralformel, 123.)

$$S = u(\cos a - \cos b \cos c) - \omega \cos c$$

$$+ \frac{1 + \cos b \cos c}{2} \text{Ang.}\cos \frac{\sin b \sin c + (1 + c\text{ſ}b\, c\text{ſ}c)c\text{ſ}\omega}{1 + \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega}$$

$$-\frac{1-\cos b\cos c}{2}\,\text{Ang.}\cos\frac{-\sin b\sin c+(1-\text{cſ}b\,\text{cſ}c)\,\text{cſ}\omega}{1-\cos b\cos c-\sin b\sin c\cos\omega}$$
$$+\ \text{Const.}$$

Heißt der Winkel BHF α, ſo iſt für $u = 0$, $\omega = \alpha$, alſo weil S mit u zugleich verſchwindet, überdies $\cos\alpha = \tang b \cot c$,

$$\text{Const.} = \alpha\cos c - \frac{1+\cos b\cos c}{2}\,\text{Ang.}\cos\frac{\sin b}{\sin c}$$
$$+\frac{1-\cos b\cos c}{2}\,\text{Ang.}\cos\frac{-\sin b}{\sin c.}$$

Der Winkel BFH ſey β, ſo iſt

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \sin\beta = \cos\left(\frac{1}{2}\pi-\beta\right)$$
$$= -\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\beta\right)$$

wo $\frac{1}{2}\pi$ den rechten Winkel oder $90°$ bezeichnet, und

$$\text{Const.} = \alpha\cos c - \left(\frac{1+\cos b\cos c}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\pi-\beta\right)$$
$$+\left(\frac{1+\cos b\cos c}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\pi+\beta\right)$$
$$= \alpha\cos c + \beta - \frac{1}{2}\pi\cos b\cos c$$

Um das Trilineum EFG zu haben, muß man $u = \frac{1}{2}\pi$ ſetzen, wodurch $\omega = \pi$ wird. Man bekommt

$$\text{Trilin. EFG} = \frac{1}{2}\pi(\cos a - \cos b\cos c) - \pi\cos c$$
$$+\frac{1}{2}\pi(1+\cos b\cos c) - \frac{1}{2}\pi(1-\cos b\cos c)$$

$$+ \alpha \cos c + \beta - \frac{1}{2}\pi \cos b \cos c$$

$$= \frac{1}{2}\pi \cos a - (\pi - \alpha)\cos c + \beta.$$

Man kann dieſes Ergebniß auch durch die bekannte Meſſung eines ſphäriſchen Dreyecks und eines Abſchnitts der Kugelfläche finden. Es iſt nämlich aus dem Art. Kugel, 37. 39.

$$\triangle \ BFH = \alpha + \beta - \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{Segm. HFE} = (\pi - \alpha)(1 - \cos c)$$

$$\text{Segm. BFG} = \frac{1}{2}\pi(1 - \cos a).$$

Daraus ergiebt ſich für das Trilineum EFG $= \triangle$ BFH + Segm. HFE — Segm. BFG derſelbe Ausdruck, wie vorhin.

Iſt der Halbmeſſer der Kugel nicht 1, ſo iſt der vorige Ausdruck für EFG in das Quadrat des Halbmeſſers zu multipliciren.

Sind ſtatt der Abſtände der Parallelkreiſe FG, DE von ihrem Pole auf der Kugelfläche ihre Halbmeſſer $FG = r$, $DE = R$, und der Abſtand ihrer Mittelpuncte $FD = h$ gegeben, ſo läßt ſich das Trilineum GFE dadurch auf folgende Art ausdrucken.

Der Kugel Halbmeſſer $CA = CB$ ſey ϱ, ſo iſt

$$CF^2 + r^2 = \varrho^2 = CD^2 + R^2$$

alſo

$(CF + CD)(CF - CD)$ d. i. $(CF + FD)DF = R^2 - r^2$

mithin

$$CF + CD = \frac{R^2 - r^2}{h}$$

und

$$CF = \frac{R^2 - r^2}{2h} + \frac{1}{2}h = \frac{RR - rr + hh}{2h}$$

$$CD = \frac{R^2 - r^2}{2h} - \frac{1}{2}h = \frac{RR - rr - hh}{2h}$$

folglich

$$\varrho = \sqrt{\left(\left(\frac{RR - rr + hh}{2h}\right)^2 + r^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{[(R + r)^2 + h^2][(R - r)^2 + h^2]}}{2h}$$

Ferner iſt

$$\sin a = \sin BG = \frac{FG}{CA} = \frac{r}{\varrho}$$

$$\cos a = \cos BG = \frac{CF}{CA} = \frac{RR - rr + hh}{2h\varrho}$$

$$\cos b = \cos BH =$$

$$\cos BCH = \cos FED = \frac{DE}{FE} = \frac{R}{\sqrt{(RR + hh)}}$$

$$\text{tang}\, b = \text{tang}\, BH = \frac{FD}{DE} = \frac{h}{R}$$

und aus dem bey B rechtwinkligen ſphäriſchen Dreyeck BFH,

$$\text{tang}\, \beta = \frac{\text{tang}\, b}{\sin a} = \frac{h\varrho}{Rr}$$

$$\cos c = \cos a \cos b = \frac{R(RR - rr + hh)}{2h\varrho\sqrt{(RR + hh)}}$$

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{\cot \beta}{\cos c} = \frac{2r\sqrt{(RR + hh)}}{RR - rr + hh}$$

alſo

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang}\, \alpha^2)}} = \frac{RR - rr + hh}{RR + rr + hh}$$

und

und

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{(RR+hh)}}{r}.$$

Hierdurch wird, wenn man zur Abkürzung $CF = \frac{RR - rr + hh}{2h} = e$ ſetzt, und zugleich bemerkt, daß $(\pi - \alpha)\cos c = 2(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha)\cos c$ iſt, erhalten

$$\text{Trilin. } EFG = \tfrac{1}{2}\pi\varrho e - \frac{2R\varrho e}{\sqrt{(RR+hh)}}\,\text{Arc. tang}\,\frac{\sqrt{(RR+hh)}}{r} + \varrho\varrho\,\text{Arc. tang}\,\frac{h\varrho}{Rr}.$$

In den Aufgaben aus der Körperlehre von Lehmus (Halle und Berlin, 1811. 8.) iſt dieſe Aufgabe die letzte. Ihre Auflöſung nimmt dort 6 Octavſeiten ein. Zur Vergleichung iſt zu bemerken, daß die hier gefundene Fläche FGE die Hälfte des dortigen F iſt.

15. In (Fig. 58.) iſt ABCD der Octant einer Kugel. Über AE, einem Stücke des Halbmeſſers AC, iſt in der Ebene des Quadranten ACB der Halbkreis AME beſchrieben, und über dieſem als Grundfläche ein halber gerader Cylinder errichtet, deſſen gekrümmte Seitenfläche der Kugelfläche in der Curve GNA begegnet. Man ſucht den Inhalt des von GNA und dem Bogen GA des Quadranten DA begränzten Stücks der Kugelfläche.

Durch N, einen beliebigen Punct des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts der Kugel- und Cylinderfläche führe man den Kugelſchnitt LNOP dem Quadranten DCB parallel, alſo ſenkrecht auf ACB und ACD, ſo ſchneidet die Ebene deſſelben die Cylinderfläche in der Seitenlinie NM, und, wenn NP verbunden wird, ſo iſt der Kugelfläche Durchſchnitt mit einer durch CA und NP gelegten Ebene

der Quadrant eines größten Kreiſes, ANQ, und CQ der NP, ſo wie PL der CD parallel.

Der Bogen AN heiße t, der Winkel NAB, deſſen Maaß der Bogen BQ iſt, u, der Halbmeſſer der Kugel a, ſo ſind die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes N

$$x = CP = a\cos t$$
$$y = PM = a\sin t\ \cos u$$
$$z = MN = a\sin t\ \sin u$$

alſo

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -a\sin t;\quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -a\sin t\ \sin u;\quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = a\cos t\cos u$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = aa\sin t^2\ \sin u$$

alſo kommt $aa\partial t\partial u \sin t^2 \sin u$ ſtatt $\partial x\partial y$.

Wird nun das Bilineum NA durch S bezeichnet, ſo iſt (8.)

$$S = a\iint\frac{\partial x\partial y}{z}$$

d. i. nach Subſtitution der Werthe von $\partial x\partial y$ und z

$$S = aa\iint\partial t\partial u \sin t:$$

und wenn man das Integral nach t zuerſt und ſo nimmt, daß es für $t = 0$ verſchwindet,

$$S = aa\int\partial u(1 - \cos t).$$

Nennt man den Abſtand CF des Mittelpuncts F der Grundfläche des Cylinders vom Mittelpuncte der Kugel b, ſo iſt $FA = FE = FM = a - b$, $FP = b - x = b - a\cos t$, folglich im Kreiſe um F

$$(b - a\cos t)^2 + a^2\sin t^2\cos u^2 = (a - b)^2$$

woraus

$$a(1+\cos t)\sin u^2 = 2b$$

alſo

$$1+\cos t = \frac{2b}{a\sin u^2}$$

ſich ergiebt.

Da nun $1-\cos t = 2-(1+\cos t)$, ſo wird

$$S = 2aau - 2ab\int\frac{\partial u}{\sin u^2}$$

alſo nach (Integralformel, 109.)

$$S = 2aau + 2ab\cot u + \text{Const.}$$

Zur Beſtimmung der Conſtans bemerke man, daß in A, wo die Fläche anfängt, $t = 0$, alſo aus der obigen Gleichung zwiſchen u und t, $\sin u^2 = \frac{b}{a}$ iſt.

Dieſes giebt $\cot u = \sqrt{\frac{a-b}{b}}$ und

$$\text{Const.} = -2aa\,\text{Arc.}\sin\sqrt{\frac{b}{a}} - 2a\sqrt{(a-b)b}$$

Es iſt alſo vollſtändig

$$S = 2aa\left(u - \text{Arc.}\sin\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + 2ab\cot u - 2a\sqrt{(a-b)b}.$$

Für $u = \frac{1}{2}\pi$ erhält man hiernach

$$\text{Bilin. GLANG} = 2aa\,\text{Arc.}\cos\sqrt{\frac{b}{a}} - 2a\sqrt{(a-b)b}.$$

Fällt E in C, ſo iſt $b = a - b = \frac{1}{2}a$, und man erhält die Fläche DRAO (Fig. 54.) $= \frac{1}{2}\pi aa - aa$, alſo weil der Octant der Kugelfläche $= \frac{1}{2}\pi aa$, DRAB $= aa$, wie in (8.).

16. Verlangt man die in der Kugel enthaltene cylindriſche Fläche GNAME ſelbſt, ſo ſetze man den Winkel EFM $= \varphi$, ſo iſt $x = b - (a-b)\cos\varphi$, $y = (a-b)\sin\varphi$, alſo

$$z = \sqrt{(aa - xx - yy)} = 2(a-b)^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{2}\varphi$$

Da die Cylinderfläche ſich abwickeln und in eine Ebene ausbreiten läßt, ſo findet man das Differential des unbeſtimmten Stücks derſelben GEMN, welches W heißen mag, wie einer einfach gekrümmten Curve, deren Abſciſſe der Bogen EM des Umfangs der Grundfläche, die zuſtimmende ſenkrechte Ordinate aber NM $= z$ iſt. Es iſt alſo, weil EM $= (a-b)\varphi$

$$\partial W = x(a-b)z\partial\varphi$$
$$= 2(a-b)^{\frac{3}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{2}\varphi\partial\varphi$$

alſo

$$W = 4(a-b)^{\frac{3}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2}\varphi$$

ohne Conſtans, weil W mit φ zugleich verſchwindet. Für $\varphi = \pi$ erhält man hieraus die Fläche GNAME $=$ $4(a-b)^{\frac{3}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}$, alſo, wenn $b = \frac{1}{2}a$, die Fläche DRALC (Fig. 54.) $= aa =$ DAB.

17. Um das Volumen des in der Kugel enthaltenen Theils des Cylinders, GEMA, zu finden, heiße der veränderliche Winkel EAM t, und der Radius AM u, ſo iſt

$$x = CP = a - u\cos t$$
$$y = PM = u\sin t$$
$$z = NM = \sqrt{(2au\cos t - uu)}$$

alſo

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = u\sin t; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\cos t$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \sin t; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = u \cos t$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = u,$$ mithin ſtatt $\partial x \partial y$ zu ſubſtituiren $u \partial t \partial u$. Nun iſt, wenn das unbeſtimmte Stück des Cylinders GNAME durch Z bezeichnet wird

$$Z = \int\int z \partial x \partial y$$

d. i.

$$Z = \int\int u \partial t \partial u \sqrt{(2au\cos t - uu)}$$
$$= \int \partial t \int u \partial u \sqrt{(2au\cos t - uu)}$$

Da für ein unveränderliches t

$$\partial . (2au\cos t - uu)^{\frac{3}{2}} = 3a\cos t \partial u (2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$
$$- 3u\partial u (2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$

ſo wird

$$\int u \partial u (2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}} = a\cos t \int \partial u (2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{1}{3}(2au\cos t - uu)^{\frac{3}{2}}$$

Aber (Integralformel, 58. 55.)

$$\int \partial u (2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}} = \frac{u - a\cos t}{2}(2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{aa\cos t^2}{2} \text{Ang. cos} \frac{a\cos t - u}{a\cos t}$$
$$+ \text{Const.}$$

Demnach

$$\int u \partial u \sqrt{(2au\cos t - uu)} = \frac{1}{2} a^3 \cos t^3 \text{Ang. cos} \frac{a\cos t - u}{a\cos t}$$
$$- \frac{1}{6}(3a\cos t - 2u)(a\cos t + u)\sqrt{(2au\cos t - uu)}$$
$$+ \text{Const.}$$

In A, wo Z anfängt, iſt $u = 0$, daher Const. $= 0$. In M iſt $u = AE \cdot \cos EAM = 2(a-b)\cos t$. Dadurch wird innerhalb dieſer Gränzen

$$\int u\partial u\sqrt{(2au\cos t - uu)} = \frac{1}{2}a^3\cos t^3 \text{ Ang.}\cos\frac{2b-a}{a}$$

$$-\frac{1}{3}(4b-a)(3a-2b)(a-b)^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\cos t^3.$$

Dieſes mit ∂t multiplicirt, dann integrirt, und das Integral ſo genommen, daß es für $t = 0$ verſchwindet, giebt Z. Da nun

$$\int\partial t\cos t^3 = \int\partial t\left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sin t + \frac{1}{12}\sin 3t = \sin t - \frac{1}{3}\sin t^3$$

welches für $t = 0$ verſchwindet, ſo wird

$$Z = (\sin t - \frac{1}{3}\sin t^3)\left\{\frac{1}{2}a^3 \text{ Ang.}\cos\frac{2b-a}{a}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}(4b-a)(3a-2b)\sqrt{(a-b)b}.\right\}$$

Für $t = \frac{1}{2}\pi$ erhält man hieraus das Volumen des ganzen in der Kugel enthaltenen Cylinderſtücks GNAME

$$= \frac{1}{3}a \text{ Ang.}\cos\frac{2b-a}{a} - \frac{2}{9}(4b-a)(3a-2b)\sqrt{(a-b)b}$$

welches für $b = \frac{1}{2}a$ wird $\frac{1}{6}\pi a^3 - \frac{2}{9}a^3 = CLAODR$ (Fig. 54.). Demnach, weil $\frac{1}{6}\pi a^3$ der Octant der Kugel, das Stück deſſelben $DRALCB = \frac{2}{9}a^3$, wie Boſſut gefunden hat. Man ſehe den Art. Florentiniſche Aufgabe, 16—19.

18. Die bisherigen Beyſpiele werden hinreichend ſeyn, um die Anwendung des in (11.) nach Euler erklärten Subſtitutionsverfahrens zu erläutern. Ich bemerke nur noch, daß man, anſtatt die in (14.) und (15.) zum Grunde gelegten Ausdrücke für S zu gebrauchen, welche ſchon auf die Kugel ſich beziehen, auch die Formeln für S aus dem allgemeinen Ausdrucke für die Oberfläche eines Körpers in (9.) vermittelſt der Ausdrücke der Coordinaten x, y, z in t und u hätte finden können, welches freylich etwas weitläufiger geweſen wäre.

19. Um Abſchnitte von Körpern und krummen Flächen zu meſſen iſt es nicht immer nöthig, Integralrechnung anzuwenden: man gelangt oft kürzer und netter zum Ziele, wenn man ſie in meßbare Theile zerlegen oder ſie als Theile eines für ſich und in ſeinen übrigen Theilen meßbaren Ganzen darſtellen kann. Die oben in (4.) und (14.) vorgekommenen Beyſpiele beſtätigen dieſes. Hier zu ihnen noch ein drittes.

Es iſt ABCD (Fig. 59.) wieder der Octant einer Kugel, deren Mittelpunct C, Halbmeſſer CA = CB = CD. EFG, HKL ſind ein Paar den Quadranten ACD, BCD parallel geführte Schnitte, welche einander in MN ſchneiden. Man ſucht ſowohl den Inhalt des zwiſchen ihnen und dem Quadranten BA enthaltenen Stücks der Kugelfläche, KMF, als das Volumen des durch ſie und jenen Quadranten abgeſchnittenen Kugelſtücks KMFN.

Man ziehe von B und A, als den Polen der Kugelkreiſe GMF, KML die Bogen BM, AM größter Kreiſe, und verlängere den letzteren bis an den Quadranten BD in O, ſo iſt AO auch ein Quadrant. Man ſetze die Bogen BK = α, AF = β und den Halbmeſſer der Kugel = r, ferner die Winkel MAB = γ, MBA = δ, BMO = ζ, ſo iſt CH = EN = r sin α, CE = HN = r sin β und

$$\text{Trilin. KMF} = \text{Trilin. BMF} + \triangle \text{BOM} - \text{Quadril. BKMO}$$
$$= r\delta(r - r\sin\beta) + r^2(\zeta - \delta) - r^2\gamma\sin\alpha$$
$$= r^2(\zeta - (\gamma\sin\alpha + \delta\sin\beta))$$

Für das Volumen des Kugelſtücks KMFN ziehe man noch die Halbmeſſer CF, CK, CM und ſtelle ſich an alle Puncte der Bogen KM, MF dergleichen gezogen vor, ſo entſteht ein Kugelausſchnitt, begränzt von dem Sector KCF und den beiden Ausſchnitten von Kegelflächen CKM, CMF. Derſelbe iſt, wie man leicht einſieht, einer Pyramide gleich, deren Grundfläche ſo groß als das Stück der Kugelfläche KMF, und deren Höhe dem Halbmeſſer der Kugel gleich iſt. Er iſt demnach $= \frac{1}{3} r^3 (\zeta - (\gamma \sin\alpha + \delta \sin\beta))$. Hiervon ſind die beiden Kegelſtücke CMFN, und CMKN abzurechnen, um das Solidum KMFN zu erhalten. Die Grundfläche des erſten Kegelſtücks iſt ein halber Kreisabſchnitt MNF, ſeine Höhe CE. Das halbe Segment MNF findet ſich aus dem ihm zugehörigen Winkel am Mittelpuncte MEF $= \delta$, und dem Halbmeſſer EF $= r\cos\beta$, $= \frac{1}{2} r^2 \cos\beta^2 (\delta - \sin\delta\cos\delta)$.

Alſo iſt das Kegelſtück CMFN $= \ldots \frac{1}{6} r^3 \sin\beta\cos\beta^2 \times (\delta - \sin\delta\cos\delta)$. Eben ſo iſt das Kegelſtück CMKN $= \frac{1}{6} r^3 \sin\alpha\cos\alpha^2 (\gamma - \sin\gamma\cos\gamma)$. Daher das Kugelſtück KMFN

$$= \frac{1}{6} r^3 (2\zeta - \gamma\sin\alpha(3 - \sin\alpha^2) - \delta\sin\beta(3 - \sin\beta^2) + \sin\alpha\cos\alpha^2\sin\gamma\cos\gamma + \sin\beta\cos\beta^2\sin\delta\cos\delta)$$

Es iſt nun noch zu zeigen, wie die hier vorkommenden von α und β abhängigen Größen γ, δ und ζ durch dieſe beſtimmt werden. Dieſes geſchieht mittels

des ſphäriſchen bey O rechtwinkligen Dreyecks BOM, in welchem die Seite BO $= \gamma$, OM $= \alpha$, MB $= 90° - \beta$, und die Winkel OBM $= 90 - \delta$ BMO $= \zeta$. Aus demſelben iſt

$$\cos\gamma = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

$$\cos\delta = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

$$\cos\zeta = \text{tang}\,\alpha\;\text{tang}\,\beta = \cos\gamma\cos\delta.$$

Sind ſtatt der Abſtände auf der Kugel BK und AF die Abſtände der Kreiſe KLH und EFG vom Mittelpuncte der Kugel, CH $= a$, und CE $= b$, gegeben, ſo iſt $r\sin\alpha = a$, $r\sin\beta = b$, und es wird

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{(rr - aa)}}$$

$$\cos\delta = \frac{a}{\sqrt{(rr - bb)}}$$

$$\cos\zeta = \frac{ab}{\sqrt{(rr - aa)(rr - bb)}}$$

Dadurch findet ſich

$$\text{Trilin. KMF} = rr\,\text{Arc.}\cos\frac{ab}{\sqrt{(rr - aa)(rr - bb)}}$$

$$- ar\,\text{Arc.}\cos\frac{b}{\sqrt{(rr - aa)}} - br\,\text{Arc.}\cos\frac{a}{\sqrt{(rr - bb)}}$$

$$\text{Solid. KMFN} = \frac{1}{3}ab\sqrt{(rr - aa - bb)} + \frac{1}{3}r^3\zeta$$

$$- \frac{1}{6}a(3rr - aa)\gamma$$

$$- \frac{1}{6}b(3rr - bb)\delta$$

wo der Kürze wegen die Benennungen γ, δ, ζ beybehalten ſind.

Man vergleiche die 45. und 46ſte Aufgabe der in (14.) angezogenen Schrift.

20. Läßt ſich die Formel X∂x, welches das Differential eines unbeſtimmten Stücks eines Körpers darſtellt (1.), nicht integriren oder giebt die Integration derſelben kein für die Praxis brauchbares Reſultat, ſo muß man ſich der in dem Artikel, Quadratur, mitgetheilten Annäherungsmethoden bedienen.

Iſt z. B. ein nicht ganz volles, gewöhnliches Faß, deſſen Axe horizontal iſt, zu viſiren, ſo ſtelle man ſich dieſe Axe als ein Stück der Abſciſſenlinie einer paraboliſchen Curve vor, und nehme die Ordinate derſelben in irgend einem Puncte der Axe dem Kreisabſchnitte proportional, welcher der Durchſchnitt des vollen Faßraums mit einer in jenem Puncte auf die Axe ſenkrechten Ebene iſt, ſo iſt der angefüllte Raum des Faſſes dem von der Axe, den beiden äußerſten Ordinaten, und der Curve zwiſchen dieſen eingeſchloſſenen Flächenraume proportional. Da ſich nun bey einem Faſſe wohl nicht leicht mehr als drey Ordinaten, nämlich die beiden äußerſten und die mittlere beſtimmen laſſen, ſo muß man es bey der Beſtimmung des Inhalts nach der erſten Coteſiſchen Formel bewenden laſſen, und den Inhalt des Faſſes, ſoweit es angefüllt iſt, gleich ſetzen dem Producte aus der Summe der beiden Kreisabſchnitte, welche die Durchſchnitte des vollen Raums mit den Böden ſind, und des vierfachen Kreisabſchnitts, welcher der Durchſchnitt deſſelben Raums mit einer mitten durch die Axe den Böden parallel gelegten Ebene iſt, in den ſechsten Theil der Axe oder der Länge des Faſſes. Dieſes iſt die von Lambert (Beyträge, Th. I., S. 334.) gefundene Regel.

21. Zur Beſtimmung des Inhalts einer krummen Fläche oder eines Stücks derſelben kann man auf ähnliche Art verfahren, welches hier an der ſchiefen Kegelfläche erläutert werden ſoll.

In dem Artikel, Kegel, 22. iſt das Differential eines Sectors der gekrümmten Seitenfläche eines ungleichſeitigen Kegels gefunden worden. Wenn nämlich in der dortigen Figur (Fig. 3. des III. Th.) $AC = CB = a$, die Höhe des Kegels $DE = b$, der Abſtand des Fußpuncts derſelben vom Mittelpuncte der Grundfläche $CE = g$, der veränderliche Winkel am Mittelpuncte der Grundfläche $ACM = \varphi$, der dazu gehörige Sector der Kegelfläche $ADM = S$ geſetzt wird, ſo iſt

$$\partial S = \frac{1}{2} a \partial \varphi \sqrt{(h^2 + (a - g \cos \varphi)^2)}$$

Dieſes iſt das Differential des Flächenraums einer Curve, an welcher die Abſciſſe $x = a\varphi$ und die ihr entſprechende (ſenkrechte) Ordinate $y = \frac{1}{2}\sqrt{(h^2 + (a - g \cos\varphi)^2)}$. Um alſo die halbe Kegelfläche zu haben muß man die Area jener Curve, welche zwiſchen den zu $x = 0$ und $x = a\pi$ gehörigen Ordinaten enthalten iſt, ſuchen. Dieſes auf eine annähernde Art nach den in dem Artikel, Quadratur, 144. 145. mitgetheilten Formeln, wovon die erſte von Gauß herrührt, zu verrichten, hat man vor allen Dingen die Ordinaten $y^{(0)}$; $y^{(1)}$; ${}^1y$; $y^{(2)}$; y^1; $y^{(3)}$ und $y^{(4)}$, welche beziehungsweiſe den Abſciſſen 0; $\frac{1}{10}\pi a(5 - \sqrt{15})$; $\frac{1}{10}\pi a(5 - \sqrt{5})$; $\frac{1}{2}\pi a$; $\frac{1}{10}\pi a(5 + \sqrt{5})$; $\frac{1}{10}\pi a(5 + \sqrt{15})$ und πa zugehören, zu berechnen; für welche der Winkel φ die Werthe 0; $\frac{1}{10}\pi(5 - \sqrt{15})$; $\frac{1}{10}\pi(5 + \sqrt{5})$; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{10}\pi(5 + \sqrt{5})$; $\frac{1}{10}\pi(5 + \sqrt{15})$ und π hat. Dieſe Berechnung erleichtert man ſich dadurch, daß man

$\frac{a - g\cos\varphi}{h} = + \tang\psi$ oder $-\tang\psi$ macht, je nachdem $a >$ oder $< g\cos\varphi$ iſt, als wodurch $y = \frac{1}{2} a \sec\psi$ wird.

Nun ſey zu einem Zahlenbeyſpiel $a = 1$, $h = 4$, $g = 3$, ſo gehören nach der Decimaleintheilung des Quadranten oder des rechten Winkels folgende Werthe von φ und y zuſammen.

φ	y
0^R, 0000000	2, 236068 $= y^{(0)}$
0, 2254033	2, 196036 $= y^{(1)}$
0, 5527864	2, 054293 $= {}^{1}y$
1, 0000000	2, 061553 $= y^{(2)}$
1, 4472136	2, 481625 $= y^{1}$
1, 7745967	2, 763420 $= y^{(3)}$
2, 0000000	2, 828427 $= y^{(4)}$

Dieſe Werthe geben in die Formeln des angezogenen Art., in welchen f (wegen $a = 1$) $= \pi$ iſt, gebracht für die halbe Kegelfläche zwey Gränzen, eine kleinere und eine größere, welche verdoppelt die ganze Kegelfläche zwiſchen

$$\frac{5(y^{(1)} + y^{(3)}) + 8\,y^{(2)}}{9}\pi$$

und

$$\frac{y^{(0)} + y^{(4)} + 5({}^{1}y + y^{1})}{6}\pi$$

einſchließen. Die ausgeführte Rechnung giebt dieſe Werthe der Kegelfläche 14, 4492 und 14, 5268, zwiſchen welchen man, da die Fehler der angewandten Annäherungsformeln nahe gleich ſind, das arithmetiſche Mittel nehmen, und ihm die Kegelfläche gleich ſetzen kann. Dieſes giebt für dieſelbe 14, 4880. Man kommt aber dem wahren Werthe näher, wenn man, weil das Ver-

hältniß der entgegengeſetzten Fehler der Annäherungsformeln 3:4 iſt, die Summe von $\frac{4}{7}$ der kleineren und von $\frac{3}{7}$ der größeren Gränze nimmt. Hierdurch findet ſich die Kegelfläche 14,4825. In Mayers praktiſcher Geom. Th. V. §. 93. nro. 25. iſt durch eine mühſamere Berechnung aus Gränzen, die etwas weiter als die obigen auseinander liegen, für dieſelbe 14,4817 gefunden.

22. Von den Methoden, welche vor Erfindung der Integralrechnung angewandt worden ſind, Körper und ihre Oberflächen auszumeſſen, ſind die Artikel: Exhauſtionsmethode, Cavaleri's Methode des Untheilbaren, Centrobaryca methodus, Ringförmiger Körper, nachzuſehen. Der Guldin'ſchen Regel hat man ſich auch wohl nach Erfindung der Integralrechnung da bedient, wo man mit der Integration einer irrationalen Differentialformel nicht fertig zu werden wußte. Haſe gebraucht dieſelbe z. B. noch, um den Inhalt eines Faſſes, wenn die Krümmung der Dauben kreisförmig angenommen wird, zu berechnen, §. 76. u. folgg. ſeiner Doliorum Dimensio. Einen vortrefflichen Lehrbegriff der praktiſchen Stereometrie enthält Mayers praktiſche Geometrie in ihrem 5ten Theile, wovon die zweyte Ausgabe zu Göttingen 1820. erſchienen iſt. Zu bemerken ſind noch:

Aufgaben aus der Körperlehre von Lehmus. Halle und Berlin, 1811. 8.

Hoßfelds niedere und höhere praktiſche Stereometrie. Leipzig, 1812. 4.

Mancherley brauchbare Aufgaben zur Ausmeſſung der Körper und ihrer Oberflächen finden ſich auch im 2ten Theile von Meier Hirſch's Sammlung geometriſcher Aufgaben. Berlin, 1807. 8.

Stereotomie, wörtlich: Körperſchnitt, von στερεον, solidum, und τεμνω, seco, iſt derjenige Theil der Stereometrie oder Körperlehre, welcher von den Durchſchnitten der Oberflächen von Körpern, die einander ganz oder zum Theil durchdringen, handelt. Sie iſt vorzüglich für die Lehre von den Gewölben in der Baukunſt wichtig, findet aber auch in den Künſten mannichfache Anwendung.

Die Methode, welche in der Stereotomie vorzugsweiſe angewandt wird, iſt die conſtruirende oder graphiſche, da dieſe dem arbeitenden Künſtler, welcher die Ergebniſſe der Stereotomie benutzen will, am meiſten zuſagt, ſowohl wegen der Anſchaulichkeit, die ſie mit ſich führt, als auch wegen der Leichtigkeit, womit die Uebertragung der Ergebniſſe derſelben in die Praxis geſchieht, indem dazu weiter keine Vorbereitung nöthig iſt. Weil aber bey den Körpern und ihren Oberflächen alle drey Dimenſionen des Raums in Betracht kommen, ſo ſind zur vollſtändigen Darſtellung der Oberflächen und ihrer Durchſchnitte im allgemeinen immer die Projectionen derſelben auf zwey nicht parallele Ebenen erforderlich, welche der größern Einfachheit und Leichtigkeit wegen auf einander ſenkrecht genommen werden, und davon die eine in Beziehung auf die Ausübung horizontal, die andere vertical iſt, dem ſchon längſt eingeführten Gebrauche der Grund- und Profilriſſe gemäß.

Um das Verfahren einigermaßen an einem Beyſpiele kennen zu lernen, ſey der Durchſchnitt zweyer geraden aber ungleichen Cylinder, deren Axen ſich rechtwinklicht ſchneiden, zu beſtimmen.

Zu dem Ende ſey das Rechteck ABCD (Fig. 60.) ein Durchſchnitt des einen und andern Cylinders mit der Ebene durch die Axen EF, und GH, welche horizontal ſey. Über AB, BC ſeyn aus den Mittelpuncten E und G mit den Halbmeſſern EA = EB, und GB = GC, Halbkreiſe beſchrieben: dieſe ſind die um AB und BC gedreheten und in die horizontale Ebene

niedergelegten Durchſchnitte der über ABCD ſtehenden halben Cylinder mit verticalen über AB, BC aufgerichteten Ebenen. Auf den Verlängerungen von AB, CB ſey BK = Bk ſo groß als BG der Halbmeſſer des kleineren Cylinders genommen, und durch K, k die LK, kI den Durchmeſſern AB, BC parallel gemacht, ſo berührt die letztere den Halbkreis BIC in I, ſo daß GI ſenkrecht auf BC iſt. Durch L ziehe man mit der Axe EF eine parallele, welche der AB in M, der HG in N und der DC in O begegne, ſo iſt N die horizontale Projection des höchſten Puncts in dem Durchſchnitte beider Cylinderflächen, und MNO die Projection der den Durchſchnitt in jenem Puncte berührenden.

Denn denkt man ſich die Halbkreiſe ALB, BIC über AB, BC auf der Ebene der Zeichnung oder des Rechtecks ABCD ſenkrecht aufgerichtet, ſo fallen BK, Bk zuſammen, LK, kI ſind in einer horizontalen Ebene, welche die größere Cylinderfläche in der durch L gehenden Seitenlinie ſchneidet, die kleinere aber in der durch I gehenden Seitenlinie berührt. Dieſe Seitenlinien liegen zugleich in den verticalen Ebenen LMO, IGH, wovon jene der Axe EF parallel, dieſe durch die Axe HG ſelbſt geht. Ihre Projectionen auf die Ebene des Rechtecks ABCD ſind alſo die geraden MO, HG, folglich iſt N die Projection ihres Durchſchnitts, d. h. des höchſten Puncts des Durchſchnitts beider Cylinderflächen auf dieſelbe Ebene ABCD. Daß aber MO die horizontale Projection der dieſen Durchſchnitt in ſeinem höchſten Puncte berührenden iſt, erhellt ſo. Die Ebene der LK, kI berührt bey der verticalen Lage der Halbkreiſe ALB, BIC den kleineren Cylinder; eine Ebene, welche den größeren Cylinder in der durch L gehenden Seitenlinie deſſelben berührt, iſt auf den Halbmeſſer EL ſenkrecht, und wird von der berührenden Ebene durch I in jener Seitenlinie durch L geſchnitten, die alſo den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt beider Cylinderflächen in ſeinem

höchſten Puncte berührt. Nun iſt MO die Projection dieſer Seitenlinie, folglich die Projection der den Durchſchnitt der Cylinderflächen in ſeinem höchſten Puncte berührenden. Zugleich erhellt, daß auch MO die horizontale Projection des Durchſchnitts berühre.

Um noch andere Puncte der horizontalen Projection des Durchſchnitts der beiden Cylinderflächen zu erhalten, ſchneide man auf BK und Bk von B aus die gleicher Stücke BP und Bp ab, ziehe durch P und p die PQ, pq parallel mit AB, BC bis an die Umringe der Halbkreiſe ALB und BIC. Durch Q und q ziehe man mit den Axen, EF, GH, parallelen, welche den Durchmeſſern AB, BC in R und r begegnen, einander ſelbſt aber in S ſchneiden, ſo iſt S in der geſuchten Projection.

Der Beweis iſt dem vorigen, wodurch gezeigt ward, daß N in der horizontalen Projection des Durchſchnitts der Cylinderflächen ſey, ganz ähnlich.

Wird die horizontale Projection der berührenden an einem Puncte des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts der Cylinderflächen, welcher nicht der höchſte iſt, verlangt, ſo hat man die Durchſchnitte der Ebenen, welche die Cylinderflächen in jenem Puncte berühren, mit der horizontalen Ebene ABCD zu ſuchen, welche man dadurch erhält, daß man die Durchſchnitte der berührenden an zuſammengehörigen Puncten Q, q der Halbkreiſe ALB, BIC mit den verlängerten AB und BC ſucht, und durch dieſe parallelen mit den Axen EF und HG legt. Der Durchſchnitt dieſer parallelen iſt ein Punct der geſuchten Projection, und da man einen zweyten in dem mit dem Puncte Q, q verbundenen Puncte S hat, ſo ergiebt ſich die geſuchte Projection ſehr leicht.

Die Kenntniß der horizontalen Abſciſſen und Ordinaten Gr, rS oder ER, RS ſo wie der zugehörigen verticalen Ordinaten qr oder QR an die verſchiedenen

Puncte

Puncte des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts der Cylinderflächen reicht nebſt der Kenntniß von der Lage der berührenden an jenen Puncten in ſehr vielen Fällen für die Praxis hin. Oft iſt aber auch die Abwickelung einer oder beider Cylinderflächen mit der darauf gezeichneten Curve des Durchſchnitts nöthig. Dieſe auf den abgewickelten Cylinderflächen zu entwerfen iſt mittelſt der vorigen Zeichnung leicht. Die Bogen Bq, oder BQ werden die Abſciſſen, und rs oder RS die dazu gehörigen ſenkrechten Ordinaten der abgewickelten Curve.

Dieſes Beyſpiel wird den Gebrauch und Nutzen einer ſyſtematiſchen Abhandlung der Lehre von den Projectionen auf zwey coordinirte Ebenen der ſogenannten Géometrie descriptive, hinlänglich vor Augen legen. Die Aufgabe, wovon hier ein beſonderer Fall aufgelöſt iſt, läßt ſich auch ſo abfaſſen: Aus der Projection einer doppelt gekrümmten Linie auf zwey Ebenen, die auf einander ſenkrecht ſind, ihre Projection auf eine dritte auf jenen beiden ſenkrechte Ebene herzuleiten.

Die Curve des Durchſchnitts beider Cylinderflächen iſt übrigens ein Cykloimber, der Erklärung gemäß, welche davon in dem Artikel, Cykloimber, gegeben iſt. Ihre auf die Kreisebene BIC ſenkrechten, den Bogen Bq als Abſciſſen zugehörigen Ordinaten ſind nämlich diejenigen der durch die Endpuncte des Durchmeſſers BC gehenden einfach gekrümmten Curve BSNSC, welche den Abſciſſen Br zugehören, die mit denen an den Bogen Bq übereinkommen.

Die horizontale Projection des Durchſchnitts der Cylinderflächen oder die Curve BSNSC näher kennen zu lernen, nehme man den Anfang der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in T, dem Durchſchnitte der Axen, laſſe TN die Axe der Abſciſſen x, und TE die Axe der horizontalen Ordinaten y ſeyn, ſo iſt, wenn der Halbmeſſer des größern Cylinders a, des kleineren b heißt, die Gleichung für die krumme Oberfläche des größeren Cylinders

$$xx + zz = aa$$

die für die krumme Oberfläche des kleineren aber

$$yy + zz = bb$$

Hieraus folgt die Gleichung für die Projection des Durchſchnitts beider Cylinderflächen auf die Ebene der x, y, d. i. für die Curve BSNSC

$$yy = xx - (aa - bb)$$

welche einer gleichſeitigen Hyperbel angehört, deren Mittelpunct T, halbe Zwerchaxe TN iſt.

Der hier betrachtete Fall des Durchſchnitts zweyer ſenkrechten Cylinder kommt in der Baukunſt vor, wenn ein kleineres Tonnengewölbe ſenkrecht an ein größeres, das von derſelben Grundfläche aus ſich erhebt, anläuft, und ſolches durchbricht, um in das größere Licht vermittelſt des kleineren zu bringen.

Über die Stereotomie hat man ein weitläufiges Werk von Frezier unter dem Titel: La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou traité de Steréotomie. Strasbourg und Paris, 1737 — 39. in 3 Quartbänden. Dieſes Werk umfaßt aber, wie ſchon der Titel zeigt, viel mehr, als die eigentliche Stereotomie. Ein daraus vom Verf. ſelbſt beſorgter Auszug iſt unter dem Titel: Elémens de Steréotomie zu Paris, 1760. in 2 Octavbänden erſchienen. Die Hälfte des erſten Theils hievon, von Kosmann überſetzt, iſt zu Berlin, 1801. herausgekommen.

Sternfiguren, oder auch ſchlechthin **Sterne**, können diejenigen ebenen oder körperlichen Figuren genannt werden, welche entſtehen, wenn auf die Seiten regulärer Vielecke gleiche gleichſchenklige Dreyecke, oder auf die Seitenflächen der regulären Körper gleiche gleichſeitige Pyramiden ſo geſetzt werden, daß daraus ein Polygon oder ein Polyeder mit regelmäßig abwechſelnden aus- und einwärtsgehenden Winkeln und Ek-

ken, worunter die von jeder Art einander gleich ſind, hervorgeht.

Es ſey ABCDE (Fig. 61.) ein regelmäßiges Vieleck von n Seiten, über welchen die gleichen gleichſchenkligen Triangel AFB, BGC, CHD, DIE, EKA errichtet ſind. Damit nun an den Winkelpuncten A, B, ... E einwärtsgehende Winkel entſtehen, muß, wenn der Winkel an der Grundlinie der gleichſchenkligen Dreyecke α geſetzt wird, $2\alpha + \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ >$ ſeyn als 180°, alſo $\alpha > \frac{180^\circ}{n}$, d. i. größer als der halbe Centriwinkel des Vielecks. Wird alſo der Halbmeſſer des um das Polygon ABCDE beſchriebenen Kreiſes a geſetzt, ſo muß $AF = \frac{1}{2} AB \cdot \sec\alpha >$ ſeyn als $a . \tang \frac{180^\circ}{n}$, nämlich größer als die halbe Seite des um den Kreis beſchriebenen Polygons von n Seiten, wie ſich auch ſonſt leicht ergiebt. Iſt dieſe Bedingung erfüllt, ſo iſt AFBGCHDIEKA eine Sternfigur oder ein (ebener) Stern mit 2 n Seiten und n auswärts- und eben ſo vielen einwärtsgehenden Winkeln, von denen jene ſowohl als dieſe, jede für ſich, unter einander gleich ſind. Dieſe Gleichheit iſt eine Folge von der Congruenz der Dreyecke AFB, BGC, ... u. ſ. w.

Die Spitzen des Sterns F, G, ... K ſind, wie ſich leicht erweiſen läßt, vom Mittelpuncte L des um das Polygon ABCDE beſchriebenen Kreiſes gleichweit entfernt, alſo auf dem Umfange eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer FL = GL .... = KL. Auch ſind die Entfernungen FG, GH ..... KF je zweyer benachbarten Spitzen von einander gleich, geben alſo ein dem Polygon ABCDE ähnliches regelmäßiges Vieleck.

Die Summe der ausſpringenden Winkel $F + G + \ldots + K$ beträgt $n(180^\circ - 2\alpha) = n.180^\circ - 2n\alpha$. Nun iſt $2n\alpha > 360^\circ$, alſo jene Summe $< (n-2).180^\circ$. Die einſpringenden Winkel an $A, B \ldots E$ betragen zuſammen $n(2\alpha + \frac{n-2}{n}.180^\circ) = 2n\alpha + (n-2)180^\circ$. Alſo die Summe aller Winkel des Sterns $= (2n-2)180^\circ$, wie es nach (Figur, 3.) ſeyn muß.

Wenn $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, alſo ſo groß als der Centriwinkel des Vielecks ABCDE iſt, ſo werden die Seiten des Sterns AF, FB, BG u. ſ. w. die Verlängerungen je zweyer an zwey nächſten Winkelpuncten des Polygons liegenden, nicht zuſammenſtoßenden Seiten deſſelben bis zu ihrem Durchſchnitt. Sterne dieſer Art können, wenn die Anzahl ihrer Seiten ungerade iſt, auch als eine beſondere Art regelmäßiger Vielecke angeſehen werden. S. Vieleck. Da bey ihnen jeder der auswärtsgehenden Winkel $= \frac{n-4}{n} . 180^\circ$, ſo läßt ſich aus dem gleichſeitigen Dreyecke und dem Quadrat kein ſolcher Stern bilden.

Eine andere Art von Sternen als die bisher betrachtete entſteht, wenn (Fig. 62.) zwey ähnliche regelmäßige Vielecke ABCD und EFGH dergeſtalt in und um einen Kreis beſchrieben ſind, daß die Seiten des äußern den Kreis in den Winkelpuncten des innern berühren, und alsdann jede Seite des innern Vielecks ſo weit verlängert wird, bis ſie die durch die ihr nächſten Winkelpuncte gehenden und gleichfalls verlängerten Seiten des äußeren Vielecks ſchneidet. Die ſo gebildete Sternfigur QAIFK ..... PEQ unterſcheidet ſich von den vorhin betrachteten dadurch, daß die Seiten

und die Entfernungen der Spitzen nicht alle unter einander gleich ſind, ſondern von jenen, wenn man ſie nach der Ordnung zählt, die 1ſte, 4te, 5te, 8te, 9te u. ſ. w., ſo wie die 2te, 3te, 6te, 7te u. ſ. w., dieſe aber, eine um die andere.

Man wird aus dem, was jetzt von den ebenen Sternen geſagt iſt, ſich leicht eine Vorſtellung von den aus den regulären Körpern entſtehenden körperlichen Sternen machen, und alsdann bey einiger Aufmerkſamkeit finden, daß ſolcher Sterne, wo die Seitenflächen der auf eine Seitenfläche des regulären Körpers aufgeſetzten Pyramiden Erweiterungen der Ebenen von den anſtoßenden Seitenflächen des regulären Körpers ſind, es nur zwey giebt, welche aus dem Dodekaeder und Jkoſaeder ihren Urſprung nehmen. Der erſte dieſer Sterne läßt ſich aber auch als ein Dodekaeder betrachten, deſſen Seitenflächen reguläre Fünfecke der zweyten Art ſind, dergleichen (Fig. 62.) eins zeigt, und worin jede Seite wie AB zweyen anderen DC, DE begegnet. Ein Stern anderer Art entſteht noch aus dem Jkoſaeder, wenn man die an den drey Winkelpuncten jeder Seitenfläche des Jkoſaeders liegenden Seitenlinien bis zu ihrem Durchſchnitt verlängert, und dieſe Durchſchnitte für die Gipfel der aufzuſetzenden Pyramiden nimmt. Auch dieſer Stern läßt ſich als ein Dodekaeder, deſſen Seitenflächen reguläre Fünfecke der zweyten Art ſind, anſetzen. Es unterſcheidet ſich von dem nur gedachten darin, daß es zwanzig dreyſeitige Ecken hat, da das vorige zwölf fünfſeitige enthält. S. Vieleckiger Körper.

Litterariſche Nachrichten über die Sterne finden ſich in Käſtners geom. Abhandl. Samml. I. Abh. 45. Käſtner erwähnt der körperlichen Sterne nicht, da doch Kepler der beiden vorhin erwähnten regelmäßigen Sterne aus dem Dodekaeder und Jkoſaeder in der Harmonice Mundi gedenkt, welche von Käſtner angeführt wird.

Stetig, ſ. Continuum. Dem dort bemerkten füge man noch bey: 5) Die Stetigkeit einer Function beſteht darin, daß ihre Werthe für unendlich kleine Änderungen der veränderlichen Größe ſich unendlich wenig ändern. Gegentheils wird die Stetigkeit unterbrochen. Die Function tang x z. Exempel folgt von $x = 0$ bis $x = 90^\circ - \omega$, wo ω ſo klein als man will ſeyn kann, dem Geſetze der Stetigkeit, für $x = 90^\circ$ aber wird die Stetigkeit unterbrochen.

Storchſchnabel, ſ. Pantograph.

Subcontraria sectio heißt der Wechſelſchnitt des ſchiefen Cylinders und Kegels, worüber die Artikel, Cylinder und Kegel, nachzuſehen ſind.

Subdupla ratio heißt bey den Alten ein Verhältniß wie a : 2a, deſſen Vorderglied die Hälfte des Hintergliedes iſt.

Subduplicata ratio iſt das aus der Theilung eines Verhältniſſes in zwey gleiche hervorgehende Verhältniß. Z. E. das Verhältniß $a : a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, oder $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ iſt das ſubduplicirte von a : b.

Subnormale iſt an einer Curve derjenige Theil der Abſciſſenlinie, welcher zwiſchen der Ordinate zu dem Berührungspuncte und der Normale enthalten iſt. S. Normale.

Subſecante iſt an einer Curve das Stück der Abſciſſenaxe, welches die Ordinate zu dem Berührungspuncte und eine durch den Berührungspunct gezogene ſchneidende zwiſchen ſich abſchneiden. L'Huilier hat dieſe nicht unſchickliche Benennung eingeführt. Principior. calc. different. et integral. expositio elementar. cap. V. §. 38.

Subſtitution beſteht in der Einführung des ſonſt woher gegebenen oder angenommenen Werths einer

Größe in einen analytiſchen Ausdruck, welcher von derſelben abhängig iſt.

In der Algebra laſſen ſich die Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen auf dem Subſtitutionswege, d. i. dadurch auflöſen, daß man den Werth einer dieſer Größen durch die übrigen aus einer der gegebenen Gleichungen ausdruckt, und denſelben in den andern Gleichungen, worin jene Größe vorkommt, ſubſtituirt, wodurch die Zahl der unbekannten Größen und der Gleichungen um eins vermindert wird.

Bey analytiſchen Zuſammenſetzungen können wiederholte Subſtitutionen vorkommen. Um z. E. $(a + b + c + d)^2$ zu entwickeln, macht man erſt $(a + b)^2$, ſetzt darin $b + c$ ſtatt b, und erhält ſo $(a + b + c)^2$, hierin ſetzt man $c + d$ ſtatt c, und gelangt dadurch zu $(a + b + c + d)^2$. Die combinatoriſche Analyſis macht in dem hier erwähnten Falle und in allen ihm verwandten die ſucceſſiven Subſtitutionen entbehrlich. Bey der Subſtitution von Reihen in Reihen bewährt ſich ihr ausgedehnter Nutzen ebenfalls.

Wiederholte Subſtitutionen werden auch oft angewandt, um eine Größe, welche in einer ſehr verwickelten Relation zu andern ſteht, und daher auf directem Wege nur ſehr mühſam oder vielleicht gar nicht beſtimmt werden kann, nach und nach durch immer weiter getriebene Annäherung zu beſtimmen, indem man ſtatt des wahren Werths einen ihm nahe kommenden ſubſtituirt, und dadurch einen noch näheren Werth oder die Verbeſſerung des ſubſtituirten findet.

Subsuperparticularis ratio heißt in der älteren Arithmetik ein Verhältniß $m : m + 1$, deſſen Hinterglied das Vorderglied, welches eine ganze Zahl und größer als 1 iſt, um 1 übertrifft. Es iſt das umgekehrte von superparticularis ratio, oder von

m + 1 : m. Im Lateiniſchen werden dieſe Verhältniſſe nach dem Theile $\frac{1}{m}$ mit vorgeſetztem sesqui benennt. Z. E. 5 : 4 heißt ratio sesquiquarta, 4 : 5 aber ratio subsesquiquarta. Man gebraucht dieſe Benennungen, ſo wie die im nächſten Art. angezeigten, nicht mehr.

Subsuperpartiens ratio iſt ein Verhältniß wie m : m + n, wo m und n relative Primzahlen, jede > 1, ſind, und m > n iſt. Es iſt das umgekehrte von superpartiens ratio oder von m + n : m. Die Benennung wird in beiden Fällen nach dem Bruche $\frac{n}{m}$ eingerichtet. Z. E. 5 : 3 heißt ratio superbipartiens tertias, 3 : 5 hingegen subsuperbipartiens tertias.

Subtangente iſt an einer krummen Linie das Stück der Abſciſſenaxe, welches zwiſchen der bis zum Durchſchnitt mit derſelben verlängerten berührenden und der Ordinate zu dem Berührungspuncte liegt. S. berührende Linie. Den Ausdruck Subtangente hat nach Leibnitzens Bemerkung, Opp. T. III. p. 280., Huyghens zuerſt gebraucht. — Werden die Ordinaten aus einem Puncte oder Pole gezogen, ſo verſteht man unter Subtangente das Stück des im Pole auf die Ordinate an den Berührungspunct errichteten Perpendikels, welches die berührende abſchneidet.

Subtraction, Abziehen, iſt ein Rechnungsverfahren, wodurch aus einem Ganzen und dem einen Theile deſſelben der andere Theil gefunden wird. Dieſer Theil iſt der Unterſchied des Ganzen und des erſteren Theils, oder der Überſchuß jenes über dieſen. Die Subtraction iſt das entgegengeſetzte der Addition. Sie wird entweder mit beſtimmten Zahlen,

oder mit allgemeinen Größenzeichen vorgenommen. Die Größe, von welcher eine andere abgezogen wird, oder das Ganze heißt der Minuendus; die abzuziehende oder der gegebene Theil der Subtrahendus; der Unterſchied, Überſchuß oder der andere Theil heißt der Reſt.

Bey der Subtraction beſtimmter ganzen Zahlen, unbenannter oder benannter, wird der Unterſchied auch in derſelben Form ausgedruckt, welche das Ganze und der gegebene Theil haben, alſo in der dekadiſchen, wenn jene dekadiſch ausgedruckt ſind; in der dodekadiſchen, wenn Minuend und Subtrahend von dieſer Form ſind. Daß dieſes auf die kürzeſte und einfachſte Weiſe geſchehe, iſt der Zweck der Rechnungsvorſchriften, welche hier an einigen Beyſpielen erläutert werden ſollen.

785364	935478	640004
362152	871693	239479
423212	63785	400525

Die Einer werden unter die Einer geſetzt, damit alle gleichartigen Ziffern unter einander kommen. Man zieht die Einheiten jeder Claſſe oder Stelle, indem man bey den Einern anfängt, von den darüberſtehenden ab, und ſetzt den Reſt in dieſelbe Stelle. Sind in einer Stelle des Minuendus nicht ſo viel Einheiten vorhanden, daß der Abzug geſchehen kann, ſo nimmt man eine Einheit der nächſt höheren Gattung, welche 10 ſolcher Einheiten gilt, als wovon der Abzug geſchehen ſoll, hinzu. Fehlt die nächſt höhere Gattung, ſo nimmt man eine Einheit der um zwey Stufen höheren Gattung, und bringt ſolche mit 9 Einheiten der nächſt höheren Gattung und 10 Einheiten der Gattung, in welcher der Abzug geſchieht, in Rechnung. Fehlt auch die um zwey Stufen höhere Gattung, ſo verfährt man auf eine ähnliche Art, indem man von den Einheiten der um drey Stufen höheren Gattung eine nimmt u. ſ. w. —

Statt die einer Ziffer des Minuendus, wovon der Abzug nicht geſchehen kann, zugelegten 10 Einheiten als eine Einheit der nächſt höheren Gattung von den Einheiten dieſer oder der folgenden Gattungen des Minuendus abzurechnen, kann man ſie auch mit der nächſthöheren Ziffer des Subtrahendus zugleich wieder wegnehmen, indem man dieſe um eins vermehrt abzieht.

Dieſes Verfahren gewährt mehr Gleichförmigkeit und erfordert weniger Aufmerkſamkeit als das erſte, iſt alſo für die Ausübung bequemer.

Beyſpiele für die dodekadiſche Form.

9.	6.	11.	5.	10.	4	10.	6.	0.	0.	4.	7
4.	2.	4.	3.	6.	1	4.	2.	0.	10.	8.	11
5.	4.	7.	2.	4.	3	6.	3.	11.	1.	7.	8

Beyſpiele für die dyadiſche Form.

110010110	1001110010 1
10110011	11011011 1
11100011	10000001011 0

Die Probe der Subtraction zu machen addire man die ſubtrahirte Zahl zu dem Reſte, ſo muß die Summe dem Minuendus, als dem Ganzen, gleich ſeyn.

Von der Neuner- und Eilferprobe der Subtraction ſ. Rechnungsprobe.

Daß die Subtraction ſich bequem in eine Addition der arithmetiſchen Complemente oder Ergänzungen verwandeln laſſe, iſt in dem Art., Complement, in Bezug auf Logarithmen erinnert. Es können aber auch ſonſt Fälle vorkommen, wo jene Verwandlung vortheilhaft iſt. Z. E.

A	23478	D	14325
B	9543	E	8704
C	86204	F	24398
G	85675		
H	91296		
I	75602		
	371798		

Um von der Summe der Zahlen A, B, C, die Summe der Zahlen D, E, F zu ſubtrahiren, werden ſtatt deſſen zu A, B, C die arithmetiſchen Ergänzungen von D, E, F zu 100000, welche ſind G, H, I, adſdirt und von der Summe 100000 ſo viel mal weg geworfen, als arithmetiſche Ergänzungen ſind, ſo entſteht das Geſuchte. Man wird den Grund hiervon bald auffinden, wenn man bemerkt, daß z. E. 8 von 15 ſubtrahirt eben ſo viel läßt als 8 + 2 von 15 + 2, wo 2 die arithmetiſche Ergänzung von 8 zu 10 iſt.

Das Zeichen der Subtraction iſt —, welches zwiſchen den Minuendus und Subtrahendus geſetzt wird.

Subtraction benannter Zahlen. Man ſubtrahirt die gleichnamigen Größen von einander, indem man bey den Einheiten der geringſten Sorte anfängt, und nach und nach zu den höheren fortgeht. Kann der Abzug bey einer Sorte nicht geſchehen, ſo nimmt man eine Einheit der nächſthöheren Sorte, von welcher bekannt ſeyn muß, wie viel Einheiten der geringeren Sorte darauf gehen, dazu, und rechnet dieſelbe von den Einheiten der nächſthöheren Sorte des Minuendus ab, oder nimmt ſie wieder mit den Einheiten der nächſthöheren Sorte des Subtrahendus zugleich weg.

8347 Rthl.	1 ß	7 ₰	648°	7′	11″
4958 ″	20 ″	10 ″	293 ″	9 ″	8 ″
3388 Rthl.	18 ß	9 ₰	354°	10′	3″

Im zweyten Exempel ſind die Einheiten: Ruthe, Fuß und Zoll des Duodecimalmaßes.

Subtraction der Brüche. S. Bruchrechnung und Decimalbruch.

Subtraction allgemeiner Größen oder algebraiſche. S. Buchſtabenrechnung.

Subtraction der Verhältniſſe, ſchicklicher Zerlegung der Verhältniſſe. S. Verhältniß.

Subtrahendus. S. Subtraction.

Subtrahiren heißt den Unterſchied zweyer gleichartigen Größen, oder, um wie viel die eine größer als die andere iſt, finden.

Subtensa ſ. Chorde.

Subtriplicata ratio iſt das durch Theilung eines Verhältniſſes in drey gleiche entſtehende Verhältniß. Wenn z. E. das Verhältniß a:b durch Einſchaltung zweyer Mittelproportionalen in drey gleiche Verhältniſſe getheilt wird, ſo entſteht die Progreſſion a, $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, b, wo $a : a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} : b = a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ das ſubtriplicirte Verhältniß von a:b iſt.

Subtriplum iſt ſo viel als ein Drittel. Z. E. 2 iſt das Subtriplum von 6. — Subtripla ratio iſt ein Verhältniß, wie 2:6 oder 3:9, überhaupt jedes, das = 1:3 iſt.

Summe iſt eine Größe, welche mehreren anderen als ihren Theilen zuſammengenommen gleich iſt. Dieſe Summe, bey welcher jeder Theil durch ſein Hinzukommen die anderen vergrößert, iſt die Summe im eigentlichen Sinne, und heißt daher auch die arithmetiſche zum Unterſchiede von der algebraiſchen Summe, welche in uneigentli-

chem Sinne Summe heißt, indem ſie, bey dem Zuſammenkommen entgegengeſetzter Größen, auch eine Differenz ſeyn kann. Man gebraucht die algebraiſche Summe vorzüglich, um Sätze, welche man ſonſt theilen oder der beyzufügenden Einſchränkungen und Bedingungen wegen ſehr weitläufig ausdrucken müßte, kurz und doch allgemein auszudrucken. So wird in der Statik geſagt: daß beym Gleichgewichte mehrerer an einem Hebel wirkenden und in einer Ebene liegenden Kräfte die Summe ihrer Momente Null iſt.

Summe einer Reihe von irgend einer endlichen Anzahl Glieder iſt ein analytiſcher aus dieſer Zahl und gegebenen Größen zuſammengeſetzter Ausdruck, deſſen Werth dem Aggregat von ſo vielen Gliedern der Reihe, als die Zahl angiebt, gleich iſt. — Die Summe einer Reihe von unendlich vielen Gliedern, wenn ſie eine endliche Größe hat, iſt entweder eine abſolute Zahl, welcher ſich das Aggregat der Glieder (die algebraiſche Summe, wenn die Glieder nicht durchaus einerley Vorzeichen haben) immer mehr nähert, je mehr Glieder zuſammengenommen werden, oder wenn keine Annäherung zu einem beſtimmten Werthe Statt hat, der Unterſchied zweyer Reihen, deren Summen unendlich groß ſind. — Nimmt die Summe einer Reihe immer fort zu, je mehr Glieder genommen werden, ſo iſt die Summe der in's Unendliche fortgeſetzten Reihe zwar unendlich groß, mag aber doch mit der Anzahl der Glieder oder einer Potenz derſelben verglichen werden.

Beyſpiele. I. Die Summe der arithmetiſchen Reihe $a;\ a+d;\ a+2d;\ \ldots\ldots\ a+(x-1)d$ iſt $= \frac{1}{2}(2a+(x-1)d)x$.

Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $1+4+9+16+\ldots\ldots+x^2$ iſt $= \ldots\ldots \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$.

Die Summe der Producte je zweyer nächſten ungeraden Zahlen $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots\ldots$ $+ (2x - 1)(2x + 1)$ iſt $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(2x-1)(2x+1) \times (2x+3)$.

Die Summe der Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\ldots + \frac{1}{x(x+1)}$ iſt $= 1 - \frac{1}{x+1}$.

Die Summe der geometriſchen Reihe $a + ae + ae^2 + \ldots\ldots + ae^{x-1} = \frac{ae^x - a}{e - 1} = \frac{a(e^x - 1)}{e - 1}$.

II. In einer geometriſchen Reihe ſey der Exponent e ein eigentlicher Bruch, ſo iſt die Summe der ganzen ohne Ende fortgeſetzten Reihe $a + ae + ae^2$ $+$ etc. in inf. $= \frac{a}{1 - e}$

Die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$ etc. in inf. iſt $= \frac{1}{6}\pi^2$, wo π der halbe Umfang des Kreiſes für den Halbmeſſer, Eins, iſt.

Die Summe der reciproken Biquadrate der natürlichen Zahlenreihe $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} +$ etc. in inf. iſt $= \frac{1}{90}\pi^4$

Die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} +$ etc. in inf. iſt $= \frac{1}{12}\pi^2$

Die Summe der reciproken Biquadrate derſelben Zahlen, mit abwechſelnden Vorzeichen $\frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} +$ etc. in inf. iſt $= \frac{7}{720}\pi^4$

Die Summe der Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ + .. etc. in inf. deren Nenner die doppelten Trigonalzahlen ſind, iſt $= 1$

Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} +$ etc. in inf. iſt $= \frac{1}{12}$

III. Die Summe der Reihe $1 - e + e^2 - e^3 + e^4 -$ etc. in inf. iſt der Unterſchied der Brüche $\frac{1}{1-e^2}$ und $\frac{e}{1-e^2}$, welcher iſt $\frac{1-e}{1-e^2} = \frac{1}{1+e}$. Jeder von jenen beiden Brüchen iſt für $e = 1$ unendlich groß, die Summe der Reihe in dieſem Falle aber $= \frac{1}{2}$. Für $e > 1$ iſt die Reihe eine divergirende, und das Wort Summe in dieſem, wie in dem vorigen Falle ſo zu nehmen, wie in dem Artikel, Reihe, 34. angegeben iſt.

Die Summe der Reihe $1 - 8x + 27x^2 - 64x^3 + 125x^4 -$ etc. in inf. iſt der Unterſchied der Brüche

$\frac{(1+x^2)(1+22x^2+x^4)}{(1-x^2)^4}$ und $\frac{8x(1+4x+x^2)}{(1-x^2)^4}$, deren jeder für $x = 1$ unendlich wird. Da aber jener Unterſchied $= \frac{1-8x+23x^2-32x^3+23x^4-8x^5+x^6}{(1-x^2)^4}$ $= \frac{1-4x+x^2}{(1+x)^4}$, ſo iſt die Summe der Reihe für $x = 1$, $= -\frac{1}{8}$. Für $x > 1$ iſt die Reihe einer divergente.

IV. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $1+4+9+16+$ etc. wächſt ohne Gränzen. Da die Summe derſelben von 1 bis $x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$ iſt, ſo verhält ſie ſich zu $x.x^2$ d. i. zu x^3 wie $\frac{1}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2}$ zu 1, alſo für ein unendliches x wie $\frac{1}{3} : 1$ oder wie $1:3$.

Die Summe aller Würfel der natürlichen Zahlen von 1 bis x^3 verhält ſich zu x^4 deſto näher wie $1:4$, je größer x iſt.

Wegen der hier angeführten Summen ſ. die Artikel: arithmetiſche Reihe, geometriſche Reihe, Potenzen, rücklaufende Reihe.

Summirbare Reihe iſt, deren Summe durch einen endlichen Ausdruck ſich angeben läßt. Befaßt dieſer Ausdruck jede beliebige Anzahl von Gliedern vom erſten an, ſo iſt die Reihe allgemein ſummirbar. Aus dieſer allgemeinen Summe ergiebt ſich die Summe der ins Unendliche fortgeſetzten Reihe immer, aber nicht umgekehrt aus der Summe von einer unendlichen An-

Anzahl Glieder ſtets die von einer endlichen Anzahl. Z. E. aus der Summe der Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} +$ etc. in inf. welche $= 2$ iſt, läßt ſich die Summe von n Gliedern derſelben $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)}$ nicht ableiten. In andern Fällen aber kann dieſes geſchehen. Z. E. die Summe der ins Unendliche fortgeführten geometriſchen Reihe $1 + e + e^2 + e^3 +$ etc. in inf. iſt $= \frac{1}{1-e}$. Verlangt man die Summe der n erſten Glieder dieſer Reihe, ſo ſuche man die Summe der vom $(n+1)$ten Gliede an ins Unendliche fortgeſetzten Reihe, welche iſt $e^n + e^{n+1} + e^{n+2} +$ etc. in inf. $= e^n(1 + e + e^2 + e^3 +$ etc. in inf.$) = \frac{e^n}{1-e}$. Dieſe von jener abgezogen läßt die Summe der erſten n Glieder $1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1} = \frac{1-e^n}{1-e}$.

1. Da ſich die allgemeine Auflöſung des Problems: jede vorgelegte Reihe zu ſummiren, ſchwerlich je wird geben laſſen, ſo hat man ſchon längſt die Sache umgekehrt, und auf verſchiedenen Wegen Reihen geſucht, welche ſich ſummiren laſſen, um in dem, was ſich hierbey bemerken läßt, Mittel zur Summirung vorgegebener Reihen zu entdecken, wie man es ſonſt auch in der Mathematik macht. Die vorzüglichſten Verfahrungsarten zur Erfindung ſummirbarer Reihen möchten folgende ſeyn.

2. Wenn A, B, C, D, E, ... eine Reihe von Größen iſt, welche immerfort abnehmen, ſo bilden die Unterſchiede derſelben A — B, B — C, C — D, D — E .... eine neue Reihe, deren Summe dem Überſchuſſe des erſten über das letzte Glied der erſten Reihe gleich iſt, wie denn (A — B) + (B — C) + (C — D) + (D — E) = A — E. Verſchwindet alſo, wenn die Reihe A, B, C, D, ... ins Unendliche fortgeſetzt wird, das letzte Glied, ſo iſt die Summe der Unterſchiede (A — B) + (B — C) + (C — D) + etc. in inf. bloß dem erſten Gliede A der zum Grunde gelegten Reihe gleich. Ferner bilden die Unterſchiede A — C, B — D, C — E, ..., welche entſtehen, wenn man von jedem Gliede der Reihe A, B, C, D, E .... das zweyte nach ihm abzieht, eine neue Reihe, deren Summe gleich iſt dem Überſchuſſe der Summe der beiden erſten Glieder der Grundreihe über die der beiden letzten Glieder, da (A — C) + (B — D) + (C — E) + (D — F) + (E — G) = A + B — (F + G). Verſchwinden alſo bey Fortſetzung der erſten Reihe A, B, C, D .... ins Unendliche die beiden letzten Glieder derſelben, ſo iſt die Summe der Unterſchiede (A — C) + (B — D) + (C — E) + etc. in inf. bloß der Summe der beiden erſten Glieder A + B gleich. Eben ſo iſt, wenn man in der erſten Reihe die Unterſchiede zwiſchen jedem Gliede und dem rten nach ihm nimmt, die Summe derſelben ſo groß als die Summe der r erſten weniger der Summe der r letzten Glieder der erſten Reihe, folglich, wenn die letztere Summe bey Fortſetzung der Reihe ins Unendliche verſchwindet, bloß der erſteren Summe gleich. Hiernach laſſen ſich aus einer einzigen Grundreihe eine große Menge ſummirbarer Reihen ableiten.

3. Legt man z. E. die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ + etc. in inf. zum Grunde, ſo ſind die Unterſchiede

der Glieder $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$ und es iſt $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} +$ etc. in inf. $= 1$, alſo, wenn man auf beiden Seiten mit 2 multiplicirt, die Summe der reciproken Trigonalzahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} +$ etc. in inf. $= 2$. Bricht man die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ mit dem $(n + 1)$ten Gliede $\frac{1}{n+1}$ ab, ſo findet man auf dieſe Art die Summe der n erſten reciproken Trigonalzahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$.

Nimmt man in der Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ + etc. in inf. wieder die Unterſchiede, ſo wird $\frac{2}{3} + \frac{3}{18} + \frac{4}{60} + \frac{5}{150} +$ etc. in inf. $= 1$, alſo nach Multiplication mit $\frac{3}{2}$, die Summe der reciproken Pyramidalzahlen $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} +$ etc. in inf. $= \frac{3}{2}$. Die endliche Summe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)}$ findet ſich $= \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

Auf dieſe Weiſe laſſen ſich, wenn man weiter geht, die Summen der reciproken figurirten Zahlen von allen höheren Ordnungen finden.

4. Nimmt man in der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. in inf. die Unterſchiede zwiſchen jedem Gliede und dem zweyten nach ihm, ſo wird $\frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} +$ etc. in inf. $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, alſo durch Diviſion mit 2, $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} +$ etc. in inf. oder $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{5^2-1}$ + etc. in inf. $= \frac{3}{4}$, welches eine von Leibnitz gegebene Summation iſt, die Jakob Bernoulli nach einer dem hier angewandten Verfahren ähnlichen und mit ihm auf einerley Grunde beruhenden Methode fand.

5. Statt des von Jakob Bernoulli gebrauchten Verfahrens, von irgend einer angenommenen unendlichen Reihe, deren Glieder unendlich abnehmen, ſie ſelbſt mit Ausſchluß des erſten, oder der beiden erſten, oder der drey erſten Glieder u. ſ. w. zu ſubtrahiren, da dann der Unterſchied dem erſten, oder den beiden erſten, oder den drey erſten Gliedern u. ſ. w. zuſammen genommen gleich iſt, ſetzte Moivre ein mehr analytiſches, das er in den Miscell. anal. Lib. VI. cap. 3. erklärt. Es beſteht darin, irgend eine unendliche Reihe, deren Glieder nach den Potenzen der unbeſtimmten x fortſchreiten, und in welcher die Coefficienten unendlich abnehmen, mit einem aus beſtimmten

Größen und der unbeſtimmten x zuſammengeſetzten zwey- oder mehrtheiligen Factor zu multipliciren, dann dieſen Factor o zu ſetzen, wodurch ein Werth von x ſich ergiebt, welcher auch das Product aus der angenommenen Reihe in jenen Factor o macht. Legt man alſo der unbeſtimmten x dieſen Werth bey, und ſetzt die erſten Glieder des Products auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, ſo iſt die übrige unendliche Reihe den herübergeſetzten Gliedern gleich.

6. Multiplicirt man z. B. die Reihe $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 +$ etc. in inf. $= S$ mit $x - 1$, ſo wird $- 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^3 +$ etc. in inf. $= (x-1)S$, alſo $\frac{1}{1 \cdot 2}x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^3 + \ldots = 1 + (x - 1)S$. Setzt man nun $x - 1 = 0$, wodurch $x = 1$ wird, und dieſen Werth von x in die letzte Gleichung, ſo bekommt man $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots = 1$, wie in (3.).

Wird dieſelbe Reihe $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 +$ etc. in inf. $= S$, durch $x^2 - 1$ multiplicirt, und die beiden erſten Glieder des Products auf die andere Seite des Gleichheitszeichens geſchafft, ſo entſteht

$$\frac{2}{1 \cdot 3}xx + \frac{2}{2 \cdot 4}x^3 + \frac{2}{3 \cdot 5}x^4 + \text{etc.} = 1 + \frac{1}{2}x + (xx - 1)S$$

Setzt man nun $x = 1$, ſo wird erhalten

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \text{etc.} \ldots \text{in inf.} = \frac{3}{2}$$

wie in (4.). Die Multiplication von S mit $x^2 - 1$, und nachherige Annahme $x = 1$, führt alſo zu demſel-

ben Reſultate, als wenn man die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ + etc. .... mit Ausſchluß der beiden erſten Gliede von ſich ſelbſt abgezogen hätte.

Da $xx - 1$ auch für $x = -1$, Null wird, ſo erhält man noch, wenn man $x = -1$ macht,

$$\frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} - \frac{2}{4 \cdot 6} + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

Multiplicirt man die angenommene Reihe S mit $x^3 - 1$, und ſetzt nachher $x = 1$, ſo erhält man daſſelbe, als wenn man die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. vom vierten Gliede von ſich ſelbſt abzieht.

Wird die Reihe S mit $(x-1)^2$ oder mit $1-2x+x^2$ multiplicirt, und nachher $x = 1$ geſetzt, ſo iſt das ſo viel, als ob man erſt von der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. ſie ſelbſt weniger ihrem erſten Gliede abzöge, und mit der hervorgehenden Reihe wieder eben ſo verführe.

Man multiplicire die angenommene Reihe $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ etc. in inf. $= S$ mit $2x - 1$, ſo wird, wenn man das erſte Glied des Products auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt,

$$\frac{3}{1 \cdot 2}x + \frac{4}{2 \cdot 3}xx + \frac{5}{3 \cdot 4}x^3 + \frac{6}{4 \cdot 5}x^4 + \text{etc.}$$
$$= 1 + (2x - 1)S$$

Setzt man jetzt $2x - 1 = 0$, alſo $x - \frac{1}{2}$, ſo wird

$$\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{6}{4.5}\cdot\frac{1}{16}+\text{etc.}=1.$$

Wird dieſelbe Reihe $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\text{etc.}=S$ mit $(x-1)(2x-1)$, d. i. mit $1-3x+2xx$ multiplicirt, und nachher einmal $x=1$, und dann $2x=1$ gemacht, ſo entſtehen dadurch zwey ſummirbare Reihen. Es wird nämlich

$$\frac{5}{1.2.3}+\frac{6}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\text{etc. in inf.}=\frac{3}{2}$$

und

$$\frac{5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{6}{2.3.4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{3.4.5}\cdot\frac{1}{16}+\text{etc. in inf.}=\frac{1}{4}$$

7. Es iſt nöthig, daß in der angenommenen Reihe S, welche allgemein durch $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}$ vorgeſtellt werden kann, die Coefficienten A, B, C, D.... über alle Gränzen hinaus abnehmen, damit die Producte wie $(x-1)S$, $(x^2-1)S$ u. ſ. w. für den Werth $x=1$ ſelbſt in dem Falle, daß S für dieſen Werth $=\infty$ wäre, (wie, wenn $S=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\text{etc.}$, wirklich der Fall iſt) Null werden. Daß dieſes aber unter der vorausgeſetzten Bedingung Statt hat, erhellt für das Product $(x-1)S$ ſo. Es iſt

$(x-1)S=-1+(1-A)x+(A-B)x^2+(B-C)x^3+\text{etc.}$ alſo für $x=1$

$(x-1)S=-1+(1-A)+(A-B)+(B-C)+\text{etc.}$

Da aber vermöge der Vorausſetzung 1, A, B, C.... eine abnehmende Reihe bilden, deren letztes Glied bey Fortſetzung der Reihe ins Unendliche verſchwindet, ſo iſt nach (2.) die Summe der Unterſchiede $(1-A)+(A-B)+(B-C)+\text{etc.}=1$, alſo $(x-1)S=-1+1=0$. Eben ſo wird der Beweis mit

Hülfe von (2.) für die Producte $(x^2 - 1)S$, $(x^3 - 1)S$ u. ſ. w. geführt.

8. Es laſſen ſich nach derſelben Methode auch endliche ſummirbare Reihen finden. Multiplicirt man z. E. die Reihe $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}x + \frac{1}{n+3}x^2 + \text{etc.}$ $= S$ mit $x - 1$ und ſetzt nachher, nachdem das erſte Glied des Products, $-\frac{1}{n+1}$, auf die andere Seite der Gleichung gebracht iſt, $a = 1$, ſo wird

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \text{etc.}$$

in inf. $= \frac{1}{n+1}$.

Nun ſetze man $n = 0$, ſo wird $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots$ in inf. $= 1$. Von dieſer Reihe ſubtrahire man die vorige, ſo wird $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ $= 1 - \frac{1}{n+1}$.

9. Daß die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc. in inf.}$, wie in (7.) angedeutet iſt, unendlich groß ſey, erhellt daraus, daß $\log \frac{1}{1-x} =$

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.},$$

für $x = 1$ alſo, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$

$= \log \frac{1}{0} = \log \infty$ iſt.

Es iſt aber gar keine Frage, daß der Logarithme einer unendlich großen Zahl ſelbſt unendlich groß ſey, doch iſt derſelbe von einem unendlich niedrigern Grade als die Zahl ſelbſt, und verſchwindet gegen dieſe. — Hieraus folgt noch, daß die Summe irgend einer harmoniſchen Reihe $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} + \text{etc.}$ unendlich groß ſey. Denn drückt man ſie ſo aus $\frac{c}{a}\left\{\frac{1}{a:b} + \frac{1}{(a:b)+1} + \frac{1}{(a:b)+2} + \text{etc.}\right\}$ ſo iſt, wenn m die nächſtgrößere Zahl an $\frac{a}{b}$ iſt, die eingeklammerte Reihe $> \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \text{etc.}$ in inf. Dieſe aber iſt die natürliche harmoniſche, von welcher die $m-1$ erſten Glieder, deren Summe endlich iſt, weggekommen ſind, alſo iſt die Summe $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \text{etc.}$ gewiß unendlich groß, folglich um ſo mehr die eingeklammerte, und daher auch die urſprüngliche Reihe $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \text{etc.}$

10. Die Glieder der Reihe A, B, C, D etc. in (2.) können auch Producte von einer immer größer

werdenden Anzahl Factoren ſeyn. Dieſes führt auf folgende ſehr brauchbare Summation. Es ſey $A = 1$, $B = b$, $C = bc$, $D = bcd$. $E = bcde$, u. ſ. w. Nehmen nun auch hier 1, b, bc, bcd, u. ſ. w. über alle Gränzen hinaus ab, ſo iſt

$$(1-b) + b(1-c) + bc(1-d) + bcd(1-e) + bcde(1-f) + \text{etc. in inf.} = 1.$$

Wenn nun $b = \frac{m}{a}$, $c = \frac{m+p}{a+p}$, $d = \frac{m+q}{a+q}$, $e = \frac{m+r}{a+r}$, $f = \frac{m+s}{a+s}$ u. ſ. w., ſo iſt $1 - b = \frac{a-m}{m}$, $1 - c = \frac{a-m}{a+p}$, $1 - d = \frac{a-m}{a+q}$, $a - e = \frac{a-m}{a+r}$ etc.

folglich

$$\frac{a-m}{a} + \frac{m}{a}\cdot\frac{a-m}{a+p} + \frac{m}{a}\cdot\frac{m+p}{a+p}\cdot\frac{a-m}{a+q} + \frac{m}{a}\cdot\frac{m+p}{a+p}\cdot\frac{m+q}{a+q}\cdot\frac{a-m}{a+r} + \text{etc.} = 1$$

alſo, wenn mit $\frac{a}{a-m}$ auf beiden Seiten multiplicirt wird,

$$1 + \frac{m}{a+p} + \frac{m(m+p)}{(a+p)(a+q)} + \frac{m(m+p)(m+q)}{(a+p)(a+q)(a+r)} + \text{etc.} = \frac{a}{a-m}.$$

Die Bedingung, daß das Product bcde etc. in inf., d. i. $\frac{m(m+p)(m+q)(m+r)(m+s)\ldots\ldots}{a(a+p)(a+q)(a+r)(a+s)\ldots\ldots}$ verſchwinde, alſo das reciproke $\frac{a(a+p)(a+q)(a+r)\ldots\ldots}{m(m+p)(m+q)(m+r)\ldots}$ unendlich groß werde, wird erfüllt, wenn erſtlich jeder

der unendlich vielen Bruchfactoren $\frac{a}{m}, \frac{a+p}{m+p}, \frac{a+q}{m+q}$ u. ſ. w. > 1, alſo $a > m$ iſt. Setzt man alſo $a - m$ zur Abkürzung $= \Delta$, ſo muß zweytens

$$\left(1+\frac{\Delta}{m}\right)\left(1+\frac{\Delta}{m+p}\right)\left(1+\frac{\Delta}{m+q}\right)\left(1+\frac{\Delta}{m+r}\right)$$

etc. in inf. $= \infty$ ſeyn. Nun iſt das Product linker Hand entwickelt

$$1 + \Delta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{m+q} + \frac{1}{m+r} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \Delta^2\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{m(m+p)} + \frac{1}{m(m+q)} + \frac{1}{m(m+r)} + \text{etc.} \\ \quad + \frac{1}{(m+p)(m+q)} + \frac{1}{(m+p)(m+r)} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{(m+q)(m+r)} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$+ \text{etc.}$$

welches offenbar unendlich groß iſt, wenn die Summe $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{m+q} + \frac{1}{m+r} + \text{etc.}$ unendlich groß wird. Wenn alſo $a > m$, und die Summe der Brüche $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{m+q} + \frac{1}{m+r}$ + etc. in inf. unendlich groß iſt, ſo iſt

$$1 + \frac{m}{a+p} + \frac{m(m+p)}{(a+p)(a+q)} + \frac{m(m+p)(m+q)}{(a+p)(a+q)(a+r)}$$

$$+ \text{etc. in inf.} = \frac{a}{a-m}$$

welche Summation um ſo merkwürdiger iſt, weil die Größen p, q, r, s etc. gar nicht in den Summenausdruck eingehen.

11. Sind m, m+p, m+q, m+r etc. in arithmetiſcher Progreſſion, ſo iſt $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+p}+\frac{1}{m+q}+\frac{1}{m+r}+$ etc. in inf. gewiß unendlich groß (9.). Wird alſo q=2p, r=3p, s=4p u. ſ. w. genommen, und a+p=β geſetzt, ſo iſt

$$1+\frac{m}{\beta}+\frac{m(m+p)}{\beta(\beta+p)}+\frac{m(m+p)(m+2p)}{\beta(\beta+p)(\beta+2p)}+\text{etc. in inf.}$$
$$=\frac{\beta-p}{\beta-p-m}$$

12. Setzt man in (11.) p=1, ſo entſteht

$$1+\frac{m}{\beta}+\frac{m(m+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{m(m+1)(m+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\text{etc. in inf.}$$
$$=\frac{\beta-1}{\beta-1-m}$$

wo alſo, damit die Summe nicht unendlich groß werde, $\beta > m+1$ ſeyn muß.

Nimmt man hier m=1, und ſetzt n ſtatt β, ſo kommt

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1.2}{n(n+1)}+\frac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)}$$
$$+\frac{1.2.3.4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+\text{etc. in inf.}=\frac{n-1}{n-2}$$

Hieraus ergeben ſich, wenn man n nach und nach =3, 4, 5, ... ſetzt, die Summen der reciproken figurirten Zahlen von der 3ten Ordnung an ſucceſſive, und ſo kann man noch manche andere Summationen aus der gefundenen ableiten.

Setzt man z. E. m=p+1, β=p+f+1, und dividirt auf beiden Seiten mit (p+1)(p+2).....p+f, ſo wird

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+f)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)\ldots(p+f+1)}$$

$$+ \text{etc. in inf.} = \frac{1}{f-1}\cdot\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+f-1)}$$

Schreibt man hier $p+x$ ſtatt p, ſo wird

$$\frac{1}{(p+x+1)(p+x+2)\ldots(p+x+f)}$$

$$+\frac{1}{(p+x+2)(p+x+3)\ldots(p+xf+1)}$$

$$+ \text{etc. in inf.} = \frac{1}{f-1}\cdot\frac{1}{(p+x+1)(p+x+2)\ldots(p+x+f-1)}$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+f)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)\ldots(p+f+1)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{(p+x)(p+x+1)\ldots\ldots(p+x+f)}$$

$$=\frac{1}{f-1}\left\{\frac{1}{(p+1)\ldots(p+f-1)}-\frac{1}{(p+x+1)\ldots(p+x+f-1)}\right\}$$

13. Eine dritte Methode ſummirbare Reihen zu finden, iſt, irgend eine Function der Stellenzahl n für die Summe der Reihe anzunehmen, und das allgemeine Glied daraus zu ſuchen, welches leicht iſt. Denn da die Summen von $n-1$ Gliedern der Reihe und von n Gliedern ähnliche Functionen, jene von $n-1$, dieſe von n ſind, beider Summen Unterſchied aber das nte oder allgemeine Glied iſt, ſo giebt ſich ſolches ohne Schwierigkeit. Bezeichnet alſo S die für die Summe angenommene Function von n, s die ähnliche von $n-1$, und T das allgemeine Glied, ſo iſt $S-s=T$.

Beyſpiele. I. Es ſey $S = An^2 + Bn$, alſo $s=A(n-1)^2+B(n-1)$, ſo iſt $T=2An-A+B$.

Setzt man hier n nach und nach 1, 2, 3, etc., ſo wird die Reihe $A+B$, $3A+B$, $5A+B$ u. ſ. w., eine arithmetiſche der erſten Ordnung, in welcher die Differenz $2A$ iſt.

II. Es ſey $S=\frac{Ln}{A+Bn}$, alſo $s=\frac{L(n-1)}{A+B(n-1)}$, folglich $T=L\left\{\frac{n}{A+Bn}-\frac{n-1}{A+B(n-1)}\right\}=\frac{AL}{(A+(n-1)B)(A+nB)}$. Wird n nach und nach 1, 2, 3... geſetzt, ſo iſt

$$\frac{AL}{A(A+B)}+\frac{AL}{(A+B)(A+2B)}+\frac{AL}{(A+2B)(A+3B}+\ldots$$
$$+\frac{AL}{(A+(n-1)B)(A+nB)}=\frac{Ln}{A+Bn}$$

wo man noch auf beiden Seiten mit L dividiren kann. Nimmt man $n=\infty$, ſo iſt nach Diviſion mit AL,

$$\frac{1}{A(A+B)}+\frac{1}{(A+B)(A+2B)}+\text{etc. in inf.}=\frac{1}{AB}$$

III. Es ſey $S=Ak^n$, ſo iſt $s=Ak^{n-1}$, und $T=Ak^{n-1}(k-1)$. Da für $n=1$, $S=T$ werden muß, hier aber $S=Ak$, $T=Ak-A$ wird, ſo muß man die Conſtante A, auch von der allgemeinen Summe abziehen, und dieſe Ak^n-A annehmen. Die Reihe iſt $Ak-A$, Ak^2-Ak, Ak^3-Ak^2, etc. eine geometriſche mit dem Exponenten k.

Dieſes einfache und einleuchtende Verfahren, ſummirbare Reihe zu finden, hat weſentlichen Bezug auf die Differenzenrechnung.

14. Wenn die Glieder einer Reihe, deren Summe bekannt iſt, nach Potenzen einer unbeſtimmten Größe x fortſchreiten; ſo iſt die Summe ſelbſt eine Function

von x. Da nun die Gleichheit zwiſchen der Reihe und ihrer Summe für jeden Werth von x, alſo auch für $x + \partial x$ gilt, ſo iſt die Reihe mit ihrem Differential zuſammengenommen ſo groß als die Summe mit ihrem Differential, folglich das Differential der Reihe gleich dem Differential ihrer Summe. Sucht man alſo dieſe Differentiale und dividirt beiderſeits mit ∂x, ſo erhält man eine neue Reihe zugleich mit ihrer Summe. Durch wiederholte Anbringung dieſes Verfahrens laſſen ſich alſo aus einer ſchon ſummirten Reihe unzählig viele andere ſummirbare Reihen ableiten.

So folgt aus der geometriſchen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.} \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

auf die angegebene Weiſe dieſe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \text{etc.} \ldots = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

und aus dieſer wieder auf dieſelbe Art die Reihe

$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \text{etc.} \ldots = \frac{2}{(1 - x)^3}$$

oder

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots = \frac{1}{(1 - x)^3}$$

Man erhält hierdurch, wenn man weiter geht, alle Reihen, die aus der Entwickelung von $\frac{1}{(1 - x)^n}$ für ein ganzes n entſtehen, und in welchen die figurirten Zahlen der verſchiedenen Ordnungen die Coefficienten der Potenzen von x bilden.

15. Das angewieſene Verfahren läßt ſich auch dahin abändern, daß man vor der Differentiirung noch mit einer Potenz von x multiplicirt. Hierüber ſehe man Eulers Institt. Calc. Diff. P. II. Cap. II. §. 21.

et seqq. — Ferner iſt klar, daß, wenn die zum Grunde gelegte Reihe, deren Summe bekannt iſt, eine endliche Zahl Glieder hat, dieſes auch bey den abgeleiteten Reihen der Fall ſeyn werde. So findet ſich aus

$$x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

wenn man differentiirt, und nachher auf beiden Seiten mit ∂x dividirt

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

und hieraus, nachdem zuvor mit x multiplicirt worden, auf ähnliche Art

$$1 + 4x + 9x^2 + \ldots\ldots + n^2x^{n-1} = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2nn+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

Um hieraus die Summe $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$ zu haben, muß man $x = 1$ ſetzen. Alsdann aber wird der Ausdruck für die Summe $\frac{0}{0}$. Man macht daher $1 - x = \omega$, alſo $1 - \omega = x$, ſo wird der Ausdruck für die Summe $= \frac{n+1.n}{1.2} + \frac{n+1.n.n-1}{1.3}\omega$ + etc., alſo für $\omega = 0$, $\frac{n+1.n}{1.2}$, wie gehörig.

16. Euler giebt a. a. O. §. 26. eine allgemeine Formel, wodurch ſich in mehreren Fällen ſummirbare Reihen finden laſſen. Sie iſt folgende:

Wenn $a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} = S$

und $Aa + A'a'x + A''a''x^2 + A'''a''x^3 + \text{etc.} = Z$

ſo iſt

$$Z = AS + \frac{x.\Delta A}{1}\cdot\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{x^2.\Delta^2 A}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{x^3.\Delta^3 A}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

d. i.

d. i. hat man die Summe der Reihe $a + a'x + a''x^2$ + etc. . . und multiplicirt die Glieder derſelben mit den gleichſtelligen der Reihe A, A′, A″ etc. . . ſo iſt die dadurch entſtehende Reihe $Aa + A'a'x + A''a''x^2$ + etc. ſummirbar, wenn die Reihe A, A′, A″ . . . . zuletzt auf verſchwindende Differenzen führt. Der Satz ſelbſt wird in dem Art., Umbildung der Reihen, erwieſen werden. Hier nur ein Beyſpiel zur Erläuterung deſſelben.

Es ſey $S = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.}$

$= \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x}$ und die Reihe A, A′, A″ . . . . die der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . ſo iſt $A = 1$, $\Delta A = 1$, $\Delta^2 A$ und alle folgenden Differenzen $= 0$. Daher wird, weil $\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{1}{xx} \log \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}$

$$Z = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.} \ldots = \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x}$$

$$- \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

wie bekannt.

17. Moivre hat außer der Differentiation auch die Integration angewandt, ſummirbare Reihen zu finden, Miscell. Analyt. Lib. VI. c. 1. Daß dieſe hier, und wie ſie angewandt werden könne, erhellt aus (14). Wenn nämlich $A + A'x + A''x^2 + A'''x^3$ + etc. $= \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ die Function von x bezeichnet, aus deren Entwickelung die Reihe $A + A'x + A'''x^2$ + etc. hervorgeht, ſo iſt, wenn auf beiden Seiten mit $x^{n-1}\partial x$ multiplicirt, und integrirt wird, $\frac{Ax^n}{n}$

$$+ \frac{A' x^{n+1}}{n+1} + \frac{A'' x^{n+2}}{n+2} + \frac{A''' x^{n+3}}{n+3} + \text{etc.} =$$

$\int x^{n-1} \partial x . \varphi(x)$, wo die Conſtans offenbar ſo beſtimmt werden muß, daß $\int x^{n-1} \partial x . \varphi(x)$ für $x = 0$ verſchwindet. Man erhält auf dieſem Wege ſowohl unbeſtimmte als beſtimmte ſummirbare Reihen, wie die folgenden Beyſpiele zeigen werden.

18. Es iſt $x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \text{etc.} =$ $\log \frac{1}{1 - x}$ alſo, wenn man mit ∂x auf beiden Seiten multiplicirt und integrirt

$$\frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1}{3.4} x^4 + \frac{1}{4.5} x^5 + \text{etc.} = \int \partial x \log \frac{1}{1-x}$$

Das Integral $\int \partial x \log \frac{1}{1-x}$ wird gefunden, wenn man theilweiſe integrirt. Es iſt nämlich $\int \partial x \log \frac{1}{1 - x}$

$$= x \log \frac{1}{1-x} - \int x \partial . \log \frac{1}{1-x} = x \log \frac{1}{1-x} - \int \frac{x \partial x}{1-x}$$

$$= x \log \frac{1}{1-x} + \int \partial x - \int \frac{\partial x}{1-x} = x - (1-x) \log \frac{1}{1-x}$$

wo keine Conſtans hinzukommt, weil das Integral ſchon für $x = 0$ verſchwindet. Setzt man nun $x = 1$, in welchem Falle $(1-x) \log \frac{1}{1-x}$ Null wird (7), ſo entſteht die Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \text{etc. in inf.}$ $= 1$.

Auf ähnliche Art wird, wenn man dieſelbe Reihe mit $x^{n-1} \partial x$ multiplicirt, nach vollbrachter Integration

$$\frac{x^{n+1}}{1(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{3(n+3)} + \text{etc. in inf.} =$$
$$\frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots + x\right] - \frac{1-x^n}{n} \log \frac{1}{1-x}$$

alſo, wenn man $x = 1$ ſetzt,

$$\frac{1}{1(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)} + \frac{1}{4(n+4)}$$
$$+ \text{etc. in inf.} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right\}$$

Iſt n gerade und $= 2r$, ſo wird $\frac{1-x^n}{n} \log \frac{1}{1-x}$ auch o für $x = -1$. In dieſem Falle hat man alſo

$$-\frac{1}{2r+1} + \frac{1}{2(2r+2)} - \frac{1}{3(2r+3)} + \frac{1}{4(2r+4)} - \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2r}\left\{\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r-1} + \frac{1}{2r-2} - \ldots - 1\right\}$$

Setzt man aber in der vorigen Reihe $n = 2r$, ſo iſt

$$\frac{1}{2r+1} + \frac{1}{2(2r+2)} + \frac{1}{3(2r+3)} + \text{etc. in inf.} =$$
$$\frac{1}{2r}\left\{\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r-1} + \frac{1}{2r-2} + \ldots + 1\right\}$$

Aus dieſer und der eben gefundenen entſteht durch Subtraction die neue Reihe

$$\frac{1}{1(2r+1)} + \frac{1}{3(2r+3)} + \frac{1}{5(2r+5)} + \text{etc. in inf.} =$$
$$\frac{1}{2r}\left\{\frac{1}{2r-1} + \frac{1}{2r-3} + \ldots + 1\right\}$$

19. Nimmt man die vorhin gefundene Reihe

$$\frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{3.4}x^4 + \frac{1}{4.5}x^5 + \text{etc. in inf.}$$

$$= x - (1-x)\log\frac{1}{1-x}$$

wieder vor, und multiplicirt auf beiden Seiten mit ∂x, ſo entſteht durch Integration

$$\frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4}x^4 + \frac{1}{3.4.5}x^5 + \text{etc. in inf.} =$$

$$\frac{3}{4}xx - \frac{1}{2}x + \frac{1-2x+xx}{2}\log\frac{1}{1-x}$$

Setzt man hier $1-2x+xx=0$, wodurch $x=1$ wird, ſo entſteht die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \text{etc. in inf.} = \frac{1}{4}$$

Macht man aber $1-2x=0$, alſo $x=\frac{1}{2}$, ſo wird

$$\frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{8} + \frac{1}{2.3.4}.\frac{1}{16} + \frac{1}{3.4.5}.\frac{1}{32} + \text{etc. in inf.}$$

$$= \frac{1}{8}\log 2 - \frac{1}{16}$$

d. i.

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3.4.5}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4.5.6}.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \text{etc.}$$

$$= \log.2 - \frac{1}{2}$$

20. Ein Paar Beyſpiele von den Verfahrungsarten in (14.) und (17.) an Reihen, deren Glieder tranſcendente Functionen ſind, mögen hier noch folgen.

In dem Art., Quadratur, 41. *, iſt gezeigt, daß

$$\log\varphi = \log.\sin\varphi + \log.\sec\frac{1}{2}\varphi + \log.\sec\frac{1}{4}\varphi + \log.\sec\frac{1}{8}\varphi + \text{etc.}$$

Differentiirt man hier auf beiden Seiten, und dividirt nachher mit $\partial\varphi$, ſo wird

$$\frac{1}{\varphi} = \cot\varphi + \frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\tang\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{8}\tang\frac{1}{8}\varphi + \text{etc.}$$

alſo, wenn man $2\cot 2\varphi = \cot\varphi - \tang\varphi$ (Goniom., 44.) ſubtrahirt,

$$\frac{1}{\varphi} - 2\cot 2\varphi = \tang\varphi + \frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\tang\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{8}\tang\frac{1}{8}\varphi + \text{etc.}$$

wie gleichfalls in dem Art., Quadratur, 35., aber auf eine andere Art gefunden iſt.

Aus Goniometrie, 73. iſt, wenn man daſelbſt $b = a$ ſetzt

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \text{etc.} = -\frac{1}{2},$$

Nun ſey $a = \pi - \varphi$, alſo $2a = 2\pi - 2\varphi$, ſ. ſ. w., ſo wird

$$-\cos\varphi + \cos 2\varphi - \cos 3\varphi + \cos 4\varphi - \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

oder $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}$

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit $\partial\varphi$, und integrirt, ſo wird

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}\varphi$$

wo dem Integrale rechter Hand des Gleichheitszeichens keine Conſtans beygefügt iſt, weil es für $\varphi = 0$, wie die Reihe linker Hand ausweiſet, verſchwinden muß.

Auf ähnliche Art findet ſich aus

$$\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \sin 4\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\varphi$$

dieſe Summation

$$\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi$$

$$= \log. 2 + \log.\cos\frac{1}{2}\varphi$$

21. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe von bekannter Summe Functionen einer veränderlichen Größe ſind, die ſelbſt wieder in unendliche nach den Potenzen dieſer Größe fortſchreitende Reihen ſich auflöſen laſſen, ſo erhält man durch die wirkliche Entwickelung und Vergleichung mit der bekannten Summe auf einmal eine unzählbare Menge ſummirbarer Reihen.

Löſet man z. E. in der Reihe

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - 4\cos\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

die Coſinus in die ihnen gleichgültigen Reihen auf, und ordnet alsdann das Aggregat nach den Potenzen von φ, ſo wird

$$\left.\begin{array}{l} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ etc.} \\ -\dfrac{\varphi^2}{1.2}(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \text{etc.}) \\ +\dfrac{\varphi^4}{1.2.3.4}(1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \text{etc}) \\ - \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}$$

folglich iſt

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + \text{etc.} = 0$$
$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + 7^4 - 8^4 + \text{etc.} = 0$$

überhaupt für ein ganzes m

$$1^{2m} - 2^{2m} + 3^{2m} - 4^{2m} + 5^{2m} - \text{etc.} = 0$$

wie in dem Artikel, Potenz, 58. gefunden iſt.

Eben ſo wird, wenn man in der Gleichung

$$\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \sin 4\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\varphi$$

auf beiden Seiten die Entwickelungen in Reihen ſetzt,

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \text{etc}) \\ - \dfrac{\varphi^3}{1.2.3}(1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \text{etc.}) \\ + \dfrac{\varphi^5}{1\ldots5}(1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \text{etc.}) \\ - \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\varphi + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1\ldots4}\varphi^3 + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1\ldots6}\varphi^5 + \text{etc.}$$

wo $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$ u. ſ. w. die erſte, zweyte, dritte u. ſ. w. Bernoulliſche Zahl anzeigen. Hierdurch wird

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \text{etc.} = + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2}$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \text{etc.} = - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4}$$

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \text{etc.} = + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{6}$$

überhaupt für ganze m

$$1^{2m-1} - 2^{2m-1} + 3^{2m-1} - 4^{2m-1} + \text{etc.}$$
$$= (-1)^{m-1} \cdot \frac{(2^{2m}-1)\mathfrak{B}^{(m)}}{2m}$$

er durchſchnittenen eingebunden.

wie ebenfalls in dem Art., Potenz, 60 und 65 gefunden iſt.

In Goniometrie, 73, ſey $b = 2a$, ſo wird

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \text{etc.} = 0.$$

und, wenn man $a = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ macht,

$$\sin\varphi - \sin 3\varphi + \sin 5\varphi - \sin 7\varphi \text{ etc.} = 0$$

Aus dieſer Reihe folgt auf die vorige Art zu ſchließen.

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \text{etc.} = 0$$
$$1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc.} = 0$$

überhaupt für ein ganzes m

$$1^{2m-1} - 3^{2m-1} + 5^{2m-1} - 7^{2m-1} + 9^{2m-1} - \text{etc.} = 0.$$

Aus der Reihe (Goniom., 147.)

$$\cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 7\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}\sec\varphi$$

aber

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$1^4 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - \text{etc.} = +\tfrac{1}{2}\beta$$
$$1^6 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\text{etc.}$$

wo $\sec\varphi = 1 + \frac{\alpha}{1.2}\varphi^2 + \frac{\beta}{1.2.3.4}\varphi^4 + \frac{\gamma}{1.2\ldots6}\varphi^6 + \text{etc.}$

geſetzt iſt. Man ſehe auch den Art., Potenz, 96.

22. Da die Glieder einer Reihe unendlich abnehmen können, ohne daß die Reihe convergirt, d. h. eine endliche Summe hat, wie bei der harmoniſchen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$ der Fall iſt, ſo entſteht die Frage: Woran erkennt man, ob eine unendliche Reihe abnehmender Brüche eine endliche Summe habe oder nicht?

Das einfachſte Mittel zur Beantwortung dieſer Frage ſcheint die Vergleichung der gegebenenen Reihe mit einer andern, deren Summe ſchon bekannt iſt, zu ſeyn. Hierdurch erkannte Jakob Bernoulli, daß die Reihe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. in inf. eine endliche Summe habe, weil ſie nämlich kleiner iſt, als die Summe der reciproken Trigonalzahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} +$ etc. welche endlich und $= 2$ iſt. Und eben ſo erhellt, daß die Summe der Reihe $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} +$ etc. in inf. unendlich ſey, weil außer dem erſten jedes Glied derſelben größer iſt, als das gleichſtellige in der natürlichen harmoniſchen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc.

Es laſſen ſich durch eine ſolche Vergleichung ſelbſt Gränzen finden, zwiſchen denen die Summe einer vorgelegten Reihe enthalten iſt. Zum Beyſpiel diene die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. oder $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} +$ etc. Dieſe mit der Reihe $\frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.9} + \frac{2}{9.13} +$ etc. deren Summe (wie ſich aus (11), wenn man dort $m = 1$, $p = 4$, $\beta = 9$ macht, und nachher auf beiden Seiten mit $\frac{2}{1.5}$ multiplicirt, leicht ergiebt) $= \frac{1}{2}$ iſt, verglichen, zeigt zuerſt, daß $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} +$ etc. $> \frac{1}{2}$ iſt, weil nämlich $\frac{2}{1.3} > \frac{2}{1.5}$,

$\frac{2}{5.7} > \frac{2}{5.9}$ u. ſ. w. Ferner iſt $\frac{2}{1.3} : \frac{2}{1.5} = 5:3$

$$\frac{2}{5.7} : \frac{2}{5.9} = 9:7 < 5:3$$

$$\frac{2}{9.11} : \frac{2}{9.13} = 13:11 < 5:3$$

etc.

Folglich $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \text{etc.} < \frac{5}{3}\left(\frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.9} + \frac{2}{9.13} + \text{etc.}\right) < \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$; ſo daß demnach $\frac{1}{4}\pi$, welches der Werth der vorgegebenen Reihe iſt, zwiſchen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{6}$ fällt.

Man kann auf dieſem Wege, wenn man von beiden mit einander verglichenen Reihen eine gleiche Anzahl Glieder vom Anfange an zuſammenrechnet, einander viel näher kommende Gränzen finden. Nimmt man z. B. von beiden Reihen die erſten zehn Glieder zuſammen, ſo betragen ſolche bey der Reihe $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \text{etc.}$ 0,772906; bey der Reihe $\frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.9} + \text{etc.}$ hingegen 0,487805, alſo die übrigen Glieder der letzten Reihe vom 11ten an 0,012195. Hieraus iſt $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \text{etc.} > 0{,}772906 + 0{,}012195$ d. i. $> 0{,}785101$ und $< 0{,}772906 + \frac{45}{43} \cdot 0{,}012195$, d. i. $< 0{,}785668$.

Maclaurin hat in der Vergleichung mit der harmoniſchen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ etc. oder auch der allgemeinern $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} +$ etc. ein Mittel zu finden geglaubt, die Convergenz jeder Reihe abnehmender Brüche zu beurtheilen. Er ſagt nämlich, (Treatise of fluxions art. 362) daß, wenn A, B, C drey hinlänglich weit vom Anfange entfernte und auf einander folgende Glieder der Reihe ſind, und $\frac{A}{C} > \frac{A-B}{B-C}$ d. i. $C < \frac{AB}{2A-B}$ iſt, die Summe der Reihe endlich ſey. In dieſem Falle nämlich nehmen die Glieder von dem Gliede C an ſtärker ab, als in einer harmoniſchen Reihe, weshalb denn Maclaurin ſchließen zu dürfen glaubt, daß die Summe $A + B + C$ etc., und mithin die Summe der ganzen Reihe endlich ſey. Allein dieſer Schluß iſt nicht ſicher. Es können nämlich die einzelnen Glieder einer Reihe kleiner, als die der harmoniſchen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. ſeyn, ohne daß deswegen die Summe der Reihe endlich wäre, wie dieſes mit der Reihe der reciproken Primzahlen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} +$ etc. der Fall iſt, von welcher Euler (Introd. in Analys. inf. Lib. I. cap. XV.) gezeigt hat, daß ihre Summe unendlich ſey. Denn obgleich das Geſetz des Fortgangs der Primzahlen nicht genau bekannt iſt, ſo iſt doch außer Zweifel, daß jedes Glied der Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +$ etc. kleiner ſey als das gleichſtellige in der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc.

25. In einer Abhandlung: De progressionibus harmonicis obseruationes, Comment. Petrop. T. VII. giebt Euler als Merkmal, daß die Summe einer unendlichen Reihe abnehmender Brüche endlich ſey, folgendes an. Eine ſolche Reihe, ſagt er, hat eine endliche Summe, wenn, indem die Reihe über das Unendliche hinaus fortgeführt wird, dadurch die Summe keinen Zuſatz erhält: gegentheils iſt die Summe unendlich, wenn, durch Fortführung der Reihe über das Unendliche hinaus, ein Zuſatz von endlicher Größe zu der Summe ſich ergiebt.

So paradox dieſes auch klingen mag, ſo richtig iſt es, wenn es gehörig verſtanden wird. Drückt man es ſo aus: Wenn die Summe von ſo viel Gliedern der Reihe als man nur will, je weiter das erſte derſelben vom Anfange der Reihe an genommen wird, deſto kleiner wird, und, bey Vergrößerung jener Entfernung über alle Gränzen hinaus, unendlich abnimmt, ſo iſt die Summe der Reihe endlich, im Gegentheil unendlich; ſo ſieht man leicht, daß die ganze Behauptung nichts anders als der entwickelte Begriff der Convergenz iſt.

Zum Beyſpiel diene die natürliche harmoniſche Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. Die Summe von $n(i-1)$ Gliedern derſelben nach dem nten, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{ni}$, iſt wegen der beſtändigen Abnahme der Glieder $> \frac{n(i-1)}{ni}$ d. i. $> \frac{i-1}{i}$ oder $> 1 - \frac{1}{i}$. Der Ausdruck $1 - \frac{1}{i}$ iſt, was auch i ſeyn mag, weil es nicht < 1 werden kann, allemal endlich und poſitiv. Alſo bleibt, man mag auch ſo viele Glieder der

Reihe vom Anfange an zuſammengerechnet haben als man will, immer ein Zuſatz von endlicher Größe zu der Summe zu machen übrig, dieſe kann ſich daher keiner beſtimmten Gränze nähern, und iſt folglich unendlich.

Noch mehr erhellt dieſes, wenn man die Eigenſchaft jeder harmoniſchen Proportion, nach welcher die Summe der beiden äußern Glieder größer iſt, als das doppelte mittlere, zum Grunde legt. Hieraus folgt nämlich, daß die Summe $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots \frac{1}{ni} >$ iſt als $\frac{2}{n(i+1)+1} \times n(i-1)$ d. i. $> \frac{2n(i-1)}{n(i+1)+1}$ oder $> 1 + \frac{n(i-3)-1}{n(i+1)+1}$.

Man kann alſo, wie weit auch das erſte Glied $\frac{1}{n+1}$ vom Anfange der Reihe genommen werden mag, von den übrigen, indem man nur $i = 4$ ſetzen darf, immer noch ſo viel dazu nehmen, daß die Summe $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +$ etc.... $+ \frac{1}{ni}$ mehr als 1 beträgt, und da dies ohne Aufhören geſchehen kann, ſo folgt, daß die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$ etc. in inf. keine beſtimmte Gränze hat, ſondern unendlich iſt.

24. Da es indeß in andern Fällen nicht ſo leicht, wie in dem vorigen, ſeyn möchte, die Ergänzung der Summe von irgend einer beliebigen Anzahl der erſten Glieder einer Reihe zu ſchätzen, ſo bleibt freylich die Vergleichung mit einer ſummirbaren Reihe immer das ſicherſte Mittel die Convergenz oder Nichtconvergenz einer Reihe zu beurtheilen. Dieſes Mittel hat Gauß

auf eine ſehr feine Art zu brauchen gelehrt. In einer Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$, Commentatt. Goettingens. T. II. theilt er da, wo von der Summe jener Reihe für den Fall $x = 1$, die Rede iſt, einige ſehr allgemeine Sätze die Abnahme und das Wachsthum der Glieder einer Reihe, ſo wie die Convergenz oder Nichtconvergenz betreffend mit, wobey eine Reihe von einem gewiſſen Gliede an, im erſten Falle mit der obigen $1 + \frac{m}{\beta} + \frac{m(m+1)}{\beta(\beta+1)} + \text{etc.}$, im letzten mit der natürlichen harmoniſchen verglichen wird. Die Sätze ſelbſt ſind folgende.

Wenn $M, M', M'', M''' \ldots$ die Glieder einer Reihe ſind, welche den Stellenzahlen m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ beziehungsweiſe entſprechen, und der Quotient

$$\frac{M'}{M} = \frac{m^\lambda + Am^{\lambda-1} + Bm^{\lambda-2} + \text{etc.}}{m^\lambda + am^{\lambda-1} + bm^{\lambda-2} + \text{etc.}}$$

iſt, die folgenden aber $\frac{M''}{M'}$, $\frac{M'''}{M''}$. etc. aus $\frac{M'}{M}$ entſtehen, wenn darin $m+1$, $m+2$ etc. an die Stelle von m geſetzt werden, ſo werden die Glieder der Reihe M, M', M'', $M''' \ldots$ je nachdem $A < a$ oder $> a$ iſt, unendlich abnehmen oder wachſen, in dem Falle, aber, wo $A = a$ iſt, einer beſtimmten Gränze ſich näheren. Ferner wird in dem Falle wo $A < a$ iſt, die Summe der Reihe $M + M' + M'' + M''' + \text{etc.}$ in inf. entweder endlich oder unendlich ſeyn, je nachdem $a - A > 1$ oder nicht > 1 iſt. Wegen der Beweiſe dieſer Sätze muß die Abhandlung ſelbſt nachgeſehen

werden: hier wird es genügen, ſie an einem und anderem Beyſpiel zu erläutern.

I. Die Reihe ſey $1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$ + etc. Hier iſt $\frac{M'}{M} = \frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)} = \frac{4mm - 4m + 1}{4mm + 4m} = \frac{mm - m + \frac{1}{4}}{mm + m.}$; alſo $A = -1$, $a = 1$, und $A < a$, folglich nehmen die Glieder der Reihe unendlich ab, und weil $a - A = 2$, ſo iſt die Summe der Reihe endlich. Sie iſt nämlich $\frac{1}{2}\pi$, wo π der halbe Kreisumfang für den Halbmeſſer, Eins, iſt.

II. Die Reihe ſey $1 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7}$ + etc. Hier iſt $\frac{M'}{M} = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2} = \frac{mm + m}{mm + m + \frac{1}{4}}$, folglich $A = a$. Die Glieder nehmer alſo zwar beſtändig ab, nähern ſich dabey aber einer gewiſſen endlichen Gränze, welche $= \frac{1}{4}\pi$ iſt.

III. Die Reihe ſey $1 + \frac{3.5}{2.6} + \frac{3.5.7.9}{2.6.6.10} + \frac{3.5.7.9.11.13}{2.6.6.10.10.14}$ + etc. Hier iſt $\frac{M'}{M} = \frac{(4m-1)(4m+1)}{(4m-2)(4m+2)} = \frac{16mm-1}{16mm-4} = \frac{mm - \frac{1}{16}}{mm - \frac{1}{4}}$, alſo $A = a = 0$. Mithin wachſen die Glieder beſtändig, aber ſo, daß ſie einer gewiſſen endlichen Gränze ſich näheren, welche $= \sqrt{2}$ iſt.

25. Wenn eine Reihe nach den Potenzen einer veränderlichen Größe x fortſchreitet, ſo kann nur die Frage ſeyn, für welche Werthe von x die Reihe convergire oder nicht. Dieſe laſſen ſich durch das Vorige nicht beſtimmen, obwohl, wenn ein gewiſſer Werth von x angenommen wird oder gegeben iſt, die Convergenz oder Nichtconvergenz der Reihe häufig nach den obigen Sätzen beurtheilt werden kann. Einige Beyſpiele mögen das hierbey zu beobachtende Verfahren andeuten. Die Reihe $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1....4}$ + etc. convergirt, wenn auch nicht gleich anfangs, doch zuletzt gewiß für jeden endlichen Werth von x. Dieſes erhellt ſo.

Das nte Glied dieſer Reihe nach dem erſten iſt $\frac{x^n}{1.2.3....n}$; für ein unendlich großes n aber $1.2.3....n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen anzeigt, wie in dem Artikel, Summirung der Reihen, bewieſen werden wird. Dadurch ergiebt ſich nun $\frac{x^n}{1.2.3...n} = \frac{e^n x^n}{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{ex}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, wo beide Factoren $\left(\frac{ex}{n}\right)^n$ und $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ unendlich klein ſind. Alſo nehmen die Glieder der Reihe für jeden Werth von x wenigſtens zuletzt unendlich ab.

Daß aber die Summe der Reihe für jeden Werth von x endlich ſey, läßt ſich ſo einſehen. Wenn x kleiner als 1 iſt, ſo nehmen die Glieder der Reihe ſtärker ab als im Verhältniſſe 1 : x, daher iſt die Summe der Reihe kleiner als die Summe der abnehmenden geometriſchen Reihe $1 + x + x^2 + x^3 +$ etc. alſo $< \frac{1}{1-x}$. Iſt $x = 1$, ſo iſt $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}$

$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ etc. $< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} +$ etc. alſo < 3. Iſt $x > 1$, ſo ſey r die ganze Zahl, welche zunächſt kleiner iſt als x, und es iſt die Reihe $= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^r}{1.2\ldots r}\left(1 + \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^3}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \text{etc.}\right)$ wo die Glieder in der eingeklammerten Reihe ſtärker als in dem Verhältniſſe von $r + 1 : x$ abnehmen. Alſo iſt die Summe derſelben kleiner als die Summe der abnehmenden geometriſchen Reihe $1 + \frac{x}{r+1} + \frac{xx}{(r+1)^2} + \frac{x^3}{(r+1)^3} +$ etc. welche iſt $\frac{1}{1 - x:(r+1)} = \frac{r+1}{r+1-x}$. Daher iſt die Summe der urſprünglichen Reihe $< 1 + x + \frac{xx}{1.2} + \ldots + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} \cdot \frac{r+1}{r+1-x}$, alſo gewiß endlich.

Die Reihe $1 + x + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$ etc. iſt alſo in jedem Falle zur Berechnung von e^x, wovon ſie die Entwickelung iſt, brauchbar, obwohl nur für die Werthe von x, welche nicht > 1 ſind, bequem.

Die Reihe ſey $x + \frac{1}{3} \cdot \frac{xx}{2} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^4}{4} +$ etc. alſo das nte Glied derſelben $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n-1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots 2n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$. Aus dem Art., Binomial-Coefficienten, 15., folgt, daß für ein unendlich großes n $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n-1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots 2n-1} = \frac{1}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Hierdurch wird das

unendlich vielte Glied der vorigen Reihe $= \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{n}}$, welches offenbar, ſo lange x nicht > 2 iſt, unendlich klein iſt. Der Werth $x = 2$ macht alſo die Gränze, über welche hinaus die unendliche Abnahme der Glieder aufhört. Daß aber für $x = 2$ die Glieder der Reihe unendlich abnehmen, zeigt auch der Quotient $\frac{M'}{M}$ (man ſ. hier, 25.), als welcher für die gegenwärtige Reihe, und für den Werth $x = 2$, $\frac{2mm}{2mm + 3m + 1}$ iſt. Zugleich erhellt daraus, daß $a - A = \frac{3}{2}$, folglich > 1 iſt, die Endlichkeit der Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe.

Die Reihe ſtellt übrigens die Hälfte des Quadrats eines Kreisbogens dar, deſſen Querſinus, den Halbmeſſer für Eins genommen, x iſt. Da es keinen größeren Sinus verſus als 2 giebt, ſo wird begreiflich, warum die Reihe für größere Werthe von x als 2 divergirt. Die Divergenz zeigt hier die Unmöglichkeit der durch die Reihe vorgeſtellten Größe an.

26. Wenn die Glieder einer Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen $a - b + c - d + e$ etc. unendlich abnehmen, ſo erhellt ohne Mühe, daß die Summe der Reihe endlich iſt. Denn es iſt, wenn s dieſe Summe bezeichnet $s < a$ und $> a - b$; ferner $s < a - b + c$ und $s > a - b + c - d$ u. ſ. w. wo die Gränzen, zwiſchen denen s liegt, immer näher zuſammenrücken, und um weniger als eine gegebene Größe verſchieden werden können, daher s ſich ſelbſt einer gewiſſen endlichen Gränze nähert, welche die Summe der ohne Ende fortgeſetzten Reihe iſt.

27. Cauchy hat ſich auch mit Unterſuchung der Convergenz der Reihen beſchäfftigt, und darüber

mehrere Sätze in dem Cours d'Analyse, Part. I. Chap. VI. vorgetragen.

Summirung der Reihen iſt der Inbegriff der Verfahrungsarten, wodurch aus dem bekannten Geſetz der Bildung einer Reihe von einer endlichen oder unendlichen Anzahl Glieder die Summe derſelben gefunden wird. Da es nämlich keine ganz allgemeine Methode zur Summirung der Reihen giebt, ſo kann nur von Verfahrungsarten in der Mehrzahl die Rede ſeyn. Von dieſen Verfahrungsarten werden die allgemeineren, welche auf mehrere Arten oder ganze Klaſſen von Reihen anwendbar ſind, den Gegenſtand des gegenwärtigen Artikels ausmachen. Die ſpecielleren Verfahrungsarten zur Summirung arithmetiſcher und geometriſcher Reihen ſind in den dieſen Reihen beſonders gewidmeten Artikeln vorgetragen.

1. Ein elementariſches Verfahren zur Summirung unendlicher ſowohl als endlicher Reihen iſt die Zerlegung derſelben in andre ſummirbare Reihen. Hierdurch laſſen ſich unter andern alle Reihen ſummiren, welche entſtehen, wenn die Glieder einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung folgweiſe in die Glieder einer geometriſchen, ſteigenden oder fallenden Reihe multiplicirt werden. Die einfachſten Reihen dieſer Art entſtehen, wenn die figurirten Zahlen irgend einer Ordnung folgweiſe in die Glieder einer geometriſchen Reihe multiplicirt werden. Dieſe Reihen ſelbſt ſind $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc.}$; $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \text{etc.}$; $1 + 3r + 6r^2 + 10r^3 + \text{etc.}$; $1 + 4r + 10r^2 + 20r^3 + \text{etc.}$; u. ſ. w. Die Summe der erſten, welche eine ſimple geometriſche Reihe iſt, iſt bekannt, nämlich $= \frac{1}{1-r}$. Auf ſie wird die Summe der zweyten Reihe, auf dieſe die Summe der dritten u. ſ. w. zurückgebracht. Die zweyte Reihe läßt ſich nämlich in folgende zerlegen

$$\begin{aligned}
1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc. deren Summe} &= \frac{1}{1-r} \\
r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots &= \frac{r}{1-r} \\
r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots &= \frac{r^2}{1-r} \\
r^3 + r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots &= \frac{r^3}{1-r} \\
r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots &= \frac{r^4}{1-r} \\
+ \text{etc.} \;\ldots\ldots & \;\; + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Es iſt nämlich die zweyte der Partialreihen $= r(1 + r + r^2 + r^3 + \text{etc.})$, alſo kommt ihre Summe, wenn die der erſten mit r multiplicirt wird. Eben ſo entſteht jede folgende Partialſumme aus der nächſtvorhergehenden. Daher bilden die Partialſummen ſelbſt wieder eine geometriſche Reihe mit dem Exponenten r, und die Totalſumme wird $\frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2}$.

Die dritte Reihe zerlegt ſich in folgende Partialreihen

$$\begin{aligned}
1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + 6r^5 + \text{etc.} &= \frac{1}{(1-r)^2} \\
r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + 5r^5 + \text{etc.} &= \frac{r}{(1-r)^2} \\
r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 4r^5 + \text{etc.} &= \frac{r^2}{(1-r)^2} \\
r^3 + 2r^4 + 3r^5 + \text{etc.} &= \frac{r^3}{(1-r)^2} \\
r^4 + 2r^5 + \text{etc.} &= \frac{r^4}{(1-r)^2} \\
r^4 + \text{etc.} &= \frac{r^5}{(1-r)^2} \\
+ \text{etc.} & \;\; + \text{etc}
\end{aligned}$$

wo von den Partialſummen das vorhin bemerkte gilt. Die Totalſumme iſt $\frac{1}{(1-r)^2} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^3}$.

2. Die endlichen Summen der vorigen Reihen laſſen ſich auf ähnliche Art finden. Kürzer erhält man ſie dadurch, daß man die unendlichen Summen von dem Gliede an, welches zunächſt auf dasjenige folgt, bis mit zu welchem die Summe verlangt wird, ſucht, und ſolche von den eben gefundenen Summen abzieht.

Soll z. E. die Summe der erſten n Glieder der Reihe $1 + 3r + 6r^2 + 10r^3 +$ etc. gefunden werden, ſo muß von der vorhin gefundenen Summe der ohne fortgeſetzten Reihe die Summe dieſer $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} r^n$

$$+ \frac{(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2} r^{n+1} + \frac{(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2} r^{n+2} + \text{etc.}$$

in inf. abgezogen werden. Nun iſt jede Triangularzahl die Summe aus der nächſtvorhergehenden und der Stellenzahl, alſo

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + n + 1$$

$$\frac{(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} + n + 2$$

$$= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 2n + 3$$

$$\frac{(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2} + n + 3$$

$$= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 3n + 6$$

etc. etc.

Die vorgegebene Reihe zerfällt alſo in dieſe drey

$$\frac{n(n+1)}{1.2} r^n (1+r+r^2+r^3+ \text{etc. in inf.})$$

$$+ \quad nr^n (1+2r+3r^2+r^3+ \text{etc. in inf.})$$

$$+ \quad r^n (1+3r+6r^2+10r^3+ \text{etc. in inf.})$$

deren Summen ſind $\frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{r^n}{1-r}$; $\frac{nr^n}{(1-r)^2}$; $\frac{r^n}{(1-r)^3}$.

Daher iſt $1+3r+6r^2+10r^3+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2} r^{n-1} =$

$$\frac{1-r^n}{(1-r)^3} - \frac{nr^n}{(1-r)^2} - \frac{\frac{n(n+1)}{1.2} \cdot r^n}{1-r}.$$

Man wird hieraus leicht den Schluß ziehen, daß die Summe der Reihe, welche entſteht, wenn die n erſten figurirten Zahlen von der Ordnung m (1, 1, 1, 1, etc. für die Zahlen der erſten Ordnung genommen) beziehungsweiſe in die n erſten Glieder der geometriſchen Reihe 1, r, r^2, r^3 u. ſ. w. multiplicirt werden, iſt

$$\frac{1-r^n}{(1-r)^m} - \frac{\mathfrak{A}r^n}{(1-r)^{m-1}} - \frac{\mathfrak{B}r^n}{(1-r)^{m-2}} - \text{etc.} \ldots - \frac{\overset{-1}{\mathfrak{M}}r^n}{1-r}.$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.... $\overset{-1}{\mathfrak{M}}$ die $m-1$ erſten Coefficienten aus der Entwickelung von $(1-z)^{-n}$ ſind.

Wie hieraus die Summen für den Werth $r=1$ abzuleiten ſind, iſt in dem Artikel, Summirbare Reihe, 15., gezeigt.

3. Da die Potenzen der natürlichen Zahlen ſich aus den figurirten Zahlen zuſammenſetzen laſſen, jede Quadratzahl nämlich aus zwey zunächſt auf einander folgenden Triangularzahlen, jede Cubikzahl aus drey

nächſt auf einander folgenden Pyramidalzahlen, jedes Biquadrat aus vier nächſt auf einander folgenden figurirten Zahlen der 5ten Ordnung u. ſ. w., indem nämlich

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + 4.\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$$

$$n^4 = \frac{n..(n+3)}{1....4} + 11.\frac{(n-1)..(n+2)}{1....4} + 11.\frac{(n-2)..(n+1)}{1....4} + \frac{(n-3)....n}{1....4}$$

u. ſ. w.

ſo ſieht man leicht, wie die Summen der Reihen

$$1^2 + 2^2 r + 3^2 r^2 + 4^2 r^3 + 5^2 r^4 + \text{etc.}$$
$$1^3 + 2^3 r + 3^3 r^2 + 4^3 r^3 + 5^3 r^4 + \text{etc.}$$
$$1^4 + 2^4 r + 3^4 r^2 + 4^4 r^3 + 5^4 r^4 + \text{etc.}$$

u. ſ. w. die unendlichen ſowohl als die endlichen ſich vermittelſt der vorigen Summirungen beſtimmen laſſen. Es wird nämlich

$$1 + 4r + 9r^2 + 16r^3 + 25r^4 + \text{etc. in inf.} = \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

$$1 + 8r + 27r^2 + 64r^3 + 125r^4 + \text{etc. in inf.} = \frac{1+4r+r^2}{(1-r)^4}$$

$$1 + 16r + 81r + 256r^3 + 625r^4 + \text{etc. in inf.} = \frac{1+11r+11r^2+r^3}{(1-r)^5}$$

u. ſ. w.

Die endlichen Summen einer jeden dieſer Reihen werden aus der unendlichen Summe derſelben Reihe und aller vorhergehenden, wie es auch in (2) der Fall war, zuſammengeſezt. Um dieß kurz zu über-

ſehen, bezeichne $Sx^m . r^x$ die Summe der unendlichen Reihe $1^m . r + 2^m . r^2 + 3^m . r^3 +$ etc., $Sn^m . r^n$ aber die Summe der n erſten Glieder derſelben, ſo iſt

$$Sx^m . r^x = Sn^m . r^n + (n+1)^m r^{n+1} + (n+2)^m r^{n+2} + (n+3)^m r^{n+3} + \text{etc. in inf.}$$

d. i., wenn man $(n+1)^m$, $(n+2)^m$, $(n+3)^m$ u. ſ. w. nach dem binomiſchen Lehrſatze entwickelt, und mit Euler die Binomialcoefficienten zur mten Potenz nach der Reihe durch $\left[\frac{m}{1}\right], \left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{m}{3}\right] \ldots \left[\frac{m}{m}\right]$ bezeichnet

$$= Sn^m . r^n + n^m . r^n (r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc. in inf.})$$

$$+ \left[\frac{m}{1}\right] n^{m-1} . r^n (r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \text{etc. in inf.})$$

$$+ \left[\frac{m}{2}\right] n^{m-2} . r^n (1^2 . r + 2^2 . r^2 + 3^2 . r^3 + 4^2 . r^4 + \text{etc in inf.})$$

$$\vdots$$

$$+ \left[\frac{m}{m}\right] . r^n (1^m . r + 2^m . r^2 + 3^m . r^3 + 4^m . r^4 + \text{etc. in inf.})$$

$$= Sn^m . r^n + r^n \Big(n^m . Sx^0 . r^x + \left[\frac{m}{1}\right] n^{m-1} . Sx . r^x + \left[\frac{m}{2}\right] n^{m-2} . Sx^2 . r^x + \left[\frac{m}{3}\right] n^{m-3} . Sx^3 . r^x + \ldots + \left[\frac{m}{m}\right] . Sx^m . r^x \Big)$$

Hieraus iſt

$$Sn^m . r^n = Sx^m . r^x - n^m . \frac{r^{n+1}}{1-r} - r^n \Big(\left[\frac{m}{1}\right] n^{m-1} . Sx . r^x + \left[\frac{m}{2}\right] n^{m-2} . Sx^2 . r^x + \left[\frac{m}{3}\right] n^{m-3} . Sx^3 . r^x + \ldots + \left[\frac{m}{m}\right] . Sx^m . r^x \Big)$$

Die hier vorkommenden unendlichen Summen $Sx.r^x$, $Sx^2.r^x$, u. ſ. w. ſind die vorigen $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \text{etc.}$, $1 + 4r + 9r^2 + 16r^3 + \text{etc.}$, $1 + 8r + 27r^2 + 64r^3 + \text{etc.}$ u. ſ. w. mit r multiplicirt.

4. Es ſey allgemein die Reihe $a + a'r + a''r^2 + a'''r^3 + \text{etc. in inf.}$, von welcher die Coefficienten a, a', a'', a''', etc. eine arithmetiſche Reihe der mten Ordnung bilden, zu ſummiren. Bezeichnet man nun die Binomialcoefficienten wie in (3), die Anfangsglieder der Differenzreihen aber durch D', D'', ... $D^{(m)}$, ſo iſt (Arithm. Reihen höherer Ordnung, 7.) das allgemeine Glied unſerer Reihe, deſſen Stelle nach dem erſten durch p ausgedrückt wird

$$r^p\left(a + \left[\frac{p}{1}\right]D' + \left[\frac{p}{2}\right]D'' + \ldots. + \left[\frac{p}{p}\right]D^{(p)}\right)$$

Setzt man hier p nach und nach $= 0, 1, 2, 3 \ldots.$ etc., ſo wird die vorgegebene Reihe in folgende m + 1 Partialreihen zerlegt

$$\begin{array}{l}
a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \text{etc.} \\
+ D'r + 2D'r^2 + 3D'r^3 + 4D'r^4 + 5D'r^5 + \text{etc.} \\
\qquad + D''r^2 + 3D''r^3 + 6D''r^4 + 10D''r^5 + \text{etc.} \\
\qquad\qquad + D'''r^3 + 4D'''r^4 + 10D'''r^5 + \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad + D''''r^4 + 5D''''r^5 + \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + D'''''r^5 + \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{array}$$

Die Summe der erſten iſt $\frac{a}{1-r}$, der zweyten $\frac{D'r}{(1-r)^2}$ der dritten $\frac{D''r^2}{(1-r)^3}$, ... der letzten oder (m + 1)ten $\frac{D^{(m)}r^m}{(1-r)^{m+1}}$. Daher iſt die Summe der vorgegebenen Reihe

$$= \frac{a}{1-r} + \frac{D'r}{(1-r)^2} + \frac{D''r^2}{(1-r)^3} + \frac{D'''r^3}{(1-r)^4} + \ldots.$$

$+ \frac{D^{(m)} r^m}{(1-r)^{m+1}}$. Man ſetze ſie $=$ $\frac{A + A' r + A'' r^2 + \ldots\ldots + A^{(m)} r^m}{(1-r)^{m+1}}$. Bringt man nun alles auf einerley Benennung, ſo erhält man zur Beſtimmung der Coefficienten A, A′, A″ .... folgende Gleichungen

$$A = a$$

$$A' = D' - \left[\frac{m}{1}\right] a$$

$$A'' = D'' - \left[\frac{m-1}{1}\right] D' + \left[\frac{m}{2}\right] a$$

$$A''' = D''' - \left[\frac{m-2}{1}\right] D'' + \left[\frac{m-1}{2}\right] D' - \left[\frac{m}{3}\right] a$$

überhaupt

$$A^{(\lambda)} = D^{(\lambda)} - \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right] D^{(\lambda-1)} + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right] D^{(\lambda-2)} - \ldots\ldots \mp \left[\frac{m-1}{\lambda-1}\right] D' \pm \left[\frac{m}{\lambda}\right] a$$

wo die oberen Vorzeichen für ein gerades λ, die unteren für ein ungerades gelten.

Um in den Ausdruck dieſer Coefficienten wieder die Glieder der Reihe a, a′, a″ u. ſ. w. einzuführen, iſt aus (Arithmet. Reihen höherer Ordnung, 2.)

$$D' = a' - a$$
$$D'' = a'' - 2a' + a$$
$$D''' = a''' - 3a'' + 3a' - a.$$

. . . . .
. . . . .
. . . . .

$$D^{(\lambda)} = a^{(\lambda)} - \left[\frac{\lambda}{1}\right] a^{(\lambda-1)} + \left[\frac{\lambda}{2}\right] a^{(\lambda-2)} - \ldots\ldots \pm \left[\frac{\lambda}{\lambda-1}\right] a' \pm \left[\frac{\lambda}{\lambda}\right] a.$$

Die oberen Vorzeichen für ein gerades λ, die unteren für ein ungerades genommen.

Subſtituirt man dieſe Werthe in dem Ausdrucke für $A^{(\lambda)}$, und ſetzt den dadurch hervorgehenden Ausdruck von $A^{(\lambda)} = a^{(\lambda)} - c'a^{(\lambda-1)} + c''a^{(\lambda-2)} - c'''a^{(\lambda-3)} + \ldots \mp c^{(\lambda-1)}a' \pm c^{(\lambda)}a$, wo die oberen Vorzeichen für ein gerades λ, die unteren für ein ungerades gelten, ſo iſt

$$c' = \left[\frac{\lambda}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]$$

$$c'' = \left[\frac{\lambda}{2}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right]$$

$$c''' = \left[\frac{\lambda}{3}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{2}\right] + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right]\left[\frac{\lambda-2}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+3}{3}\right]$$

überhaupt

$$c^{(\sigma)} = \left[\frac{\lambda}{\sigma}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{\sigma-1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right]\left[\frac{\lambda-2}{\sigma-2}\right] + \ldots + \left[\frac{m-\lambda+\sigma-1}{\sigma-1}\right]\left[\frac{\lambda-\sigma+1}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+\sigma}{\sigma}\right]$$

Dieſer Ausdruck für $c^{(\sigma)}$ läßt ſich noch weiter zuſammenziehen. Es iſt nämlich aus dem Art. Binomialcoefficienten, 22. VII., wenn man die dortigen Bezeichnungen in die hier gebrauchten umſetzt,

$$\left[\frac{\beta}{n}\right] + \left[\frac{\alpha}{1}\right]\left[\frac{\beta}{n-1}\right] + \left[\frac{\alpha}{2}\right]\left[\frac{\beta}{n-2}\right] + \ldots + \left[\frac{\alpha}{n-1}\right]\left[\frac{\beta}{1}\right] + \left[\frac{\alpha}{n}\right] = \left[\frac{\alpha+\beta}{n}\right]$$

Setzt man hier $-\beta$, $-\alpha$ ſtatt β, α, welches verſtattet iſt, und verwandelt alsdann die Coefficienten der

negativen Potenzen in die ihnen gleichgeltenden der poſitiven nach der Formel

$$\left[\frac{-p}{q}\right] = \pm\left[\frac{p+q-1}{q}\right]$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades q genommen wird, ſo erhält man

$$\left[\frac{\beta+n-1}{n}\right]+\left[\frac{\alpha}{1}\right]\left[\frac{\beta+n-2}{n-1}\right]+\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]\left[\frac{\beta+n-3}{n-2}\right]$$

$$+\ldots+\left[\frac{\alpha+n-2}{n-1}\right]\left[\frac{\beta}{1}\right]+\left[\frac{\alpha+n-1}{n}\right]=\left[\frac{\alpha+\beta+n-1}{n}\right]$$

Macht man nun hier $n=\sigma$, $\beta+n-1=\lambda$, $\alpha = m-\lambda+1$, folglich $\alpha+\beta+n-1=m+1$, ſo wird

$$\left[\frac{\lambda}{\sigma}\right]+\left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{\sigma-1}\right]+\ldots$$

$$+\left[\frac{m-\lambda+\sigma-1}{\sigma-1}\right]\left[\frac{\lambda-\sigma+1}{1}\right]$$

$$+\left[\frac{m-\lambda+\sigma}{\sigma}\right]=\left[\frac{m+1}{\sigma}\right]$$

alſo

$$c^{(\sigma)}=\left[\frac{m+1}{\sigma}\right]$$

Demnach iſt

$$A^{(\lambda)}=a^{(\lambda)}-$$

$$\left[\frac{m+1}{1}\right]a^{(\lambda-1)}+\left[\frac{m+1}{2}\right]a^{(\lambda-2)}-\left[\frac{m+1}{3}\right]a^{(\lambda-3)}+\ldots$$

$$\mp\left[\frac{m+1}{\lambda-1}\right]a'\pm\left[\frac{m+1}{\lambda}\right]a.$$

5. Zu dem eben gefundenen Reſultate gelangt man kürzer, wenn man die vorgegebene Reihe $a+a'r + a''r^2 + a'''r^3 + a''''r^4 + \ldots a^{(\lambda)}r^\lambda +$ etc. mit

$(1-r)^{m+1}$ multiplicirt, und das Product $= A + A'r + A''r^2 + A'''r^3 +$ etc. ſetzt.

Um alsdann $A^{(\lambda)}$ zu finden, darf man nur die Glieder der Entwickelung von $(1-r)^{m+1}$ vom erſten an bis zu dem, welches in r^λ multiplicirt iſt, in umgekehrter Ordnung unter die Glieder der Reihe $a + a'r + a''r^2 + \ldots + a^{(\lambda)}r^\lambda +$ etc. ſetzen, und jedes untere Glied in das darüber ſtehende multipliciren, ſo erhält man alle Producte, welche in r^λ multiplicirt ſind, und ſo den vorigen Ausdruck für $A^{(\lambda)}$.

$A^{(m+1)}$ wird hiernach

$$= a^{(m+1)} - \left[\frac{m+1}{1}\right] a^{(m)} + \left[\frac{m+1}{2}\right] a^{(m-1)} - \ldots$$

$$\mp \left[\frac{m+1}{1}\right] a' \pm a$$

wo das obere Vorzeichen für ein ungerades, das untere für ein gerades m gilt, und die letzten Coefficienten nach der Formel $\left[\frac{m+1}{p}\right] = \left[\frac{m+1}{m-p+1}\right]$ anders ausgedrückt ſind.

Da aber $a, a', a'', \ldots$ in einer arithmetiſchen Reihe der mten Ordnung ſind, ſo iſt (Arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen, 3.) der in der vorigen Gleichung, rechter Hand des Gleichheitszeichens ſtehende Ausdruck, und alſo auch $A^{(m+1)} = 0$, und eben ſo $A^{(m+2)}$, $A^{(m+3)}$ u. ſ. w. $= 0$, ſo daß $A^{(m)}r^m$ das letzte Glied des Products iſt.

Wird dieſes Product nun wieder durch $(1-r)^{m+1}$ dividirt, ſo entſteht

$$a + a'r + a''r^2 + a'''r^3 + a''''r^4 + \text{etc. in inf.}$$
$$= \frac{A + A'r + A''r^2 + \ldots\ldots + A^{(m)}r^m}{(1-r)^{m+1}}$$

welches mit dem vorhin gefundenen übereinſtimmt.

6. Iſt das allgemeine Glied $a^{(x-1)}$ der Reihe a, a', a'', etc. eine ſolche Function der Stellenzahl x, welche für $x = 0$ verſchwindet, ſo iſt, wenn man 0 als das Anfangsglied der Reihe anſieht (und das darf man in Beziehung auf die mte beſtändige Differenz, oder noch höhere), die $(m+1)$te Differenz, d. i.

$$a^{(m)} - \left[\frac{m+1}{1}\right] a^{(m-1)} + \left[\frac{m+2}{2}\right] a^{(m-2)} - \ldots \mp \left[\frac{m+1}{1}\right] a'$$

auch $= 0$, d. i., $A^{(m)} = 0$. In dieſem Falle bricht alſo das Product in (5) mit $A^{(m-1)} r^{m-1}$ ab, welches zugleich das höchſte Glied des Zählers iſt.

7. Die mten Potenzen der natürlichen Zahlenreihe $1^m, 2^m, 3^m$, etc. bilden eine Reihe der mten Ordnung von der eben angezeigten Art, daher iſt

$$1^m + 2^m.r + 3^m.r^2 + 4^m.r^3 + \text{etc. in inf.} = \frac{A + A'r + A''r^2 + A'''r^3 + \ldots + A^{(m-1)}r^{m-1}}{(1-r)^{m+1}}$$

wo

$$A = 1^m$$

$$A' = 2^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].1^m$$

$$A'' = 3^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].2^m + \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m$$

.

.

.

$$A^{(m-1)} = m^m - \left[\frac{m+1}{1}\right](m-1)^m + \left[\frac{m+1}{2}\right](m-2)^m - \ldots \mp \left[\frac{m+1}{3}\right].2^m \pm \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m$$

die oberen Vorzeichen für ein ungerades, die unteren für ein gerades m genommen.

Hier ſind nun noch die Coefficienten, welche vom erſten und letzten gleichweit abſtehen, einander gleich, nämlich $A = A^{(m-1)}$, $A' = A^{(m-2)}$, $A'' = A^{(m-3)}$ u. ſ. w. Denn für ein ungerades m iſt, wenn man den Werth von $A^{(m-1)}$ rückwärts ſchreibt

$$A^{(m-1)} - A = (-1)^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].0^m + \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m - \left[\frac{m+1}{3}\right].2^m + \ldots - \left[\frac{m+1}{1}\right](m-1)^m + m^m.$$

d. i. $=0$, weil $(-1)^m$, 0^m, 1^m, $2^m \ldots$ Glieder einer arithmetiſchen Reihe der mten Ordnung ſind. (Arithmet. Reihen höherer Ordn., 3). Iſt m gerade, ſo iſt auf eben die Art

$$A - A^{(m-1)} = (-1)^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].0^m + \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m - \left[\frac{m+1}{3}\right].2^m + \ldots + \left[\frac{m+1}{1}\right](m-1)^m - m^m.$$

und aus gleichen Gründen $=0$; alſo iſt beiden Fällen $A = A^{(m-1)}$.

Auf ähnliche Weiſe erhellt, daß $A' = A^{(m-2)}$, $A'' = A^{(m-3)}$ u. ſ. w. Iſt alſo m ungerade, ſo giebt es einen mittelſten Coefficienten, welcher iſt $A^{\frac{m-1}{2}}$. Alles dieſes kann man ſich an den in (3) aufgeführten Summen erläutern.

8. Setzt man $r = -1$, und läßt m erſtlich gerade $= 2p$ ſeyn, ſo wird

$$1^{2p} - 2^{2p} + 3^{2p} - 4^{2p} + 5^{2p} - \text{etc.} = \frac{A - A' + A'' - A''' + A^{(2p-2)} - A^{(2p-1)}}{2^{m+1}}$$

Aber der Zähler des rechter Hand ſtehenden Bruches iſt o, weil $A = A^{(2p-1)}$, $A' = A^{(2p-2)}$, ... $A^{(p-1)} = A^{(p)}$, daher iſt

$$1^{2p} - 2^{2p} + 3^{2p} - 4^{2p} + 5^{2p} - \text{etc. in inf.} = 0$$

übereinſtimmig mit (Potenz, 58.) und (ſummirbare Reihe, 21.).

Iſt zweytens m ungerade $= 2p-1$, ſo wird

$$1^{2p-1} - 2^{2p-1} + 3^{2p-1} - 4^{2p-1} + 5^{2p-1} - \text{etc. in inf.}$$
$$= \frac{A - A' + A'' - A''' + \ldots - A^{(2p-2)} + A^{(2p-1)}}{2^{2p}}$$

alſo, wenn man die gleichen Glieder zuſammennimmt,

$$= \frac{A - A' + A'' - \ldots\ldots \mp A^{(p-2)} \pm \frac{1}{2} A^{(p-1)}}{2^{2p-1}}$$

das obere Vorzeichen für ein ungerades p, das untere für ein gerades genommen. Dieſe Summe iſt aber auch (Potenz, 60, und 65. oder, Summirbare Reihe, 21.)

$$= (-1)^{p-1} \cdot \frac{(2^{2p}-1)\mathfrak{B}^{(p)}}{2p},$$ wo $\mathfrak{B}^{(p)}$ die pte Bernoulliſche Zahl anzeigt. Daher entſteht folgender, ganz independente Ausdruck für die Bernoulliſchen Zahlen

$$\mathfrak{B}^{(p)} = \pm \frac{2p}{(2^{2p}-1)} \cdot \frac{A - A' + A'' - \ldots \mp A^{(p-2)} \pm \frac{1}{2} A^{(p-1)}}{2^{2p-1}},$$

wo von den Vorzeichen das vorhin bemerkte gilt.

Laplace hat dieſen Ausdruck für $\mathfrak{B}^{(p)}$ auf eine andere, ſehr künſtliche Art gefunden. Die vorhergehende Ableitung verdanke ich im weſentlichen Pfaff. Die bisher erklärte Summirungsmethode aber hat Jakob Bernoulli zuerſt angewandt.

9. Die gefundenen Summationen ſind nicht ohne allen praktiſchen Nutzen, ſondern werden zuweilen in

in der Rentenrechnung gebraucht. Man ſehe darüber Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartſchaften Th. I. in den Zuſätzen zum erſten Kapitel. Um ein einfaches Beyſpiel der Anwendung zu haben, ſetze man, eine Rente werde n Jahre hindurch, am Ende des erſten Jahrs mit a, am Ende des zweyten mit a + d, am Ende des dritten mit a + 2d, und ſo am Ende jedes folgenden Jahrs mit d mehr als am Ende des nächſt vorhergehenden bezahlt, und es ſolle der baare Werth derſelben s gefunden werden, wenn für das Capital 1 an jährlichen Intereſſen u gerechnet wird.

Es iſt

$$s = \frac{a}{1+u} + \frac{a+d}{(1+u)^2} + \frac{a+2d}{(1+u)^3} + \ldots + \frac{a+(n-1)d}{(1+u)^n}$$

$$= \frac{a}{1+u}\left(1 + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+u)^{n-1}}\right)$$

$$+ \frac{d}{(1+u)^2}\left(1 + \frac{2}{1+u} + \frac{3}{(1+u)^2} + \ldots + \frac{n-1}{(1+u)^{n-2}}\right)$$

alſo nach (2)

$$= \frac{a((1+u)^n - 1)}{u(1+u)^n} + d\left\{\frac{(1+u)^{n-1}-1}{u^2(1+u)^{n-1}} - \frac{n-1}{u(1+u)^n}\right\}$$

$$= \frac{\left(a + \frac{d}{u}\right)\left((1+u)^n - 1\right) - nd}{u(1+u)^n}.$$

Iſt $a = 500$, $d = 10$, $n = 30$, $u = 0,04$; daß alſo 4 Procent jährlich gerechnet werden, ſo wird

$$a + \frac{d}{u} = 750,\ (1+u)^n = 1,04^{30} = 3,243398,$$

und

$$s = \frac{25(750 . 2,243398 - 300)}{3,243398}$$

$$= 10719,432$$

In einer zu Leipzig, 1820. herausgekommenen Anweiſung zur Waldwerthberechnung von Pernitzſch iſt dieſes Exempel S. 54. §. 24. nach einer ganz falſchen Formel berechnet.

10. Um die Anwendbarkeit der erklärten Summirungsmethode an einem etwas zuſammengeſetzteren Beyſpiele zu zeigen, wähle ich die Reihe

$$\left[\frac{n}{1}\right] \cdot \frac{1^n}{n+2} - \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \frac{2^n}{n+3} + \left[\frac{n}{3}\right] \cdot \frac{3^n}{n+4} - \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] \cdot \frac{n^n}{2n+1} \cdot (-1)^{n-1},$$

welche in Fiſchers Theorie der Dimenſionszeichen Th. I. §. 157. vorkommt, und deren Summe S heißen mag.

Da nämlich

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots \mp \frac{b^{r-1}}{a^r} \pm \frac{b^r}{(a+b)a^r}$$

wo die oberen Vorzeichen für ein gerades r, die unteren für ein ungerades gelten, ſo wird, wenn man $b = n+1$, $r = n-1$ nimmt, und a nach und nach $= 1, 2, 3 \ldots n$ ſetzt

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{1} - \frac{n+1}{1^2} + \frac{(n+1)^2}{1^3} - \frac{(n+1)^3}{1^4} + \ldots \mp \frac{(n+1)^{n-2}}{1^{n-1}} \pm \frac{(n+1)^{n-1}}{(n+2).1^{n-1}}$$

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^2} + \frac{(n+1)^2}{2^3} - \frac{(n+1)^3}{2^4} + \ldots \mp \frac{(n+1)^{n-2}}{2^{n-1}} \pm \frac{(n+1)^{n-1}}{(n+3).2^{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} - \frac{(n+1)^3}{n^4} + \ldots \mp \frac{(n+1)^{n-2}}{n^{n-1}} \pm \frac{(n+1)^{n-1}}{(2n+1)^{n-1}}$$

Durch Subſtitution dieſer Reihenausdrücke für $\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3} \ldots \frac{1}{2n+1}$ wird die vorgegebene Reihe in n Partialreihen zerlegt, ſo daß

$$
\begin{aligned}
S = \; & \left[\frac{n}{1}\right].1^{n-1} - \left[\frac{n}{2}\right].2^{n-1} + \left[\frac{n}{3}\right].3^{n-1} - \ldots \\
& \qquad \pm n^{n-1} \\
& - (n+1)\left(\left[\frac{n}{1}\right].1^{n-2} - \left[\frac{n}{2}\right].2^{n-2} + \left[\frac{n}{3}\right].3^{n-2} - \ldots \pm n^{n-2}\right) \\
& + (n+1)^2\left(\left[\frac{n}{1}\right].1^{n-3} - \left[\frac{n}{2}\right].2^{n-3} + \left[\frac{n}{3}\right].3^{n-3} - \ldots \pm n^{n-3}\right) \\
& - \text{etc.} \\
& \mp (n+1)^{n-2}\left(\left[\frac{n}{1}\right].1 - \left[\frac{n}{2}\right].2 + \left[\frac{n}{3}\right].3 - \ldots \pm n\right) \\
& \pm (n+1)^{n-1}\left(\left[\frac{n}{1}\right].\frac{1}{n+2} - \left[\frac{n}{2}\right].\frac{2}{n+3} + \left[\frac{n}{3}\right].\frac{3}{n+3} \ldots \pm \frac{n}{2n+1}\right)
\end{aligned}
$$

iſt, wo die oberen Vorzeichen überall für ein ungerades n gelten.

Es iſt (Arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen, 2.)

$$\pm\left(0^m - \left[\frac{n}{1}\right].1^m + \left[\frac{n}{2}\right].2^m - \left[\frac{n}{3}\right].3^m + \ldots \pm n^m\right)$$

das Anfangsglied der nten Unterſchiedsreihe für die Hauptreihe $0^m, 1^m, 2^m \ldots, n^m$, alſo (a. a. O. 20.

g. 6.) $=0$, ſo lange $m < n$ iſt. Daher fallen von den vorſtehenden Reihen alle bis auf die letzte aus, und es iſt

$$S = \pm(n+1)^{n-1}\left\{\left[\frac{n}{1}\right]\cdot\frac{1}{n+2} - \left[\frac{n}{2}\right]\cdot\frac{2}{n+3} - \left[\frac{n}{3}\right]\cdot\frac{3}{n+4} - \ldots \pm \frac{n}{2n+1}\right\}$$

oder

$$= \pm n(n+1)^{n-1}\left\{\frac{1}{n+2} - \left[\frac{n-1}{1}\right]\cdot\frac{1}{n+3} + \left[\frac{n-1}{2}\right]\cdot\frac{1}{n+4} \mp \left[\frac{n-1}{1}\right]\cdot\frac{1}{2n} \pm \frac{1}{2n+1}\right\}$$

Es iſt, das obere Vorzeichen für ein ungerades n genommen,

$$\pm\left[\frac{1}{n+2} - \left[\frac{n-1}{1}\right]\cdot\frac{1}{n+3} + \left[\frac{n-1}{2}\right]\cdot\frac{1}{n+4} - \ldots \pm \frac{1}{2n+1}\right]$$

das Anfangsglied der $n-1$ten Differenzreihe für die Hauptreihe

$$\frac{1}{n+2},\ \frac{1}{n+3},\ \frac{1}{n+4},\ \frac{1}{n+5},\ \ldots\ \frac{1}{2n+1},\ \text{etc.}$$

Sucht man die Anfangsglieder der Differenzreihen durch wirkliche Subtraction, ſo wird die erſte Differenzreihe

$$-\frac{1}{(n+2)(n+3)},\ -\frac{1}{(n+3)(n+4)},\ -\frac{1}{(n+4)(n+5)},\ \text{etc.}$$

die zweyte

$$+\frac{1\cdot 2}{(n+2)(n+3)(n+4)},\ +\frac{1\cdot 2}{(n+3)(n+4)(n+5)}\ \text{etc.}$$

die dritte . . . . . $-\frac{1.2.3}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$ etc.
u. ſ. w.

alſo das Anfangglied der (n — 1)ten Unterſchiedsreihe
$\pm\frac{1.2.3 \ldots\ldots n-1}{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots 2n+1}$; das obere Vorzeichen für ein ungerades n genommen. Hierdurch wird

$$S = \pm\frac{1.2.3 \ldots\ldots\ldots n}{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots\ldots(2n+1)}.(n+1)^{n-1}$$

wo das obere Vorzeichen, wie bisher, für ein ungerades n gilt, oder auch ohne dieſe Vorſchrift

$$S = \frac{1.2.3 \ldots\ldots n}{(n+2)(n+3)(n+4)..(2n+1)}.(n+1)^{n-1}.(-1)^{n-1}.$$

11. Die in dem Art., Summirbare Reihe, 16., mitgetheilte Formel von Euler kann als eine Verallgemeinerung der Formel in (4) in ihrer erſten Geſtalt angeſehen werden. Iſt nämlich

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} = S$$

und

$$Aa + A'a'x + A''a''x^2 + A'''a'''x^3 + \text{etc.} = Z$$

ſo iſt, wenn A, A′, A″, A‴.... als Glieder einer arithmetiſchen Reihe einer höheren Ordnung betrachtet werden, allgemein das Glied in Z, deſſen Stelle nach dem erſten durch p bezeichnet wird,

$$a^{(p)}x^p\left(A + \left[\frac{p}{1}\right]\Delta A + \left[\frac{p}{2}\right]\Delta^2 A + \ldots\right.$$
$$\left. + \left[\frac{p}{1}\right]\Delta^{p-1}A + \Delta^p A\right)$$

wo ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, u. ſ. w. die Anfangsglieder der erſten, zweyten, dritten, u. ſ. w. Unterſchiedsreihe für die Hauptreihe A, A′, A″, A‴ etc. ſind.

Wird nun p nach und nach = 0, 1, 2, 3, etc. geſetzt, ſo wird Z dadurch in mehrere Partialreihen zerlegt, ſo daß

$$
\begin{aligned}
Z = {} & A(a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{\mathrm{IV}}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x.\Delta A(a' + 2a''x + 3a'''x^2 + 4a^{\mathrm{IV}}x^3 + 5a^{\mathrm{V}}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x^2.\Delta^2 A(a'' + 3a'''x + 6a^{\mathrm{IV}}x^2 + 10a^{\mathrm{V}}x^3 + 15a^{\mathrm{V}'}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x^3\,\Delta^3 A(a''' + 4a^{\mathrm{IV}}x + 10a^{\mathrm{V}}x^2 + 20a^{\mathrm{V}'}x^3 + 35a^{\mathrm{V}''}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x^4.\Delta^4 A(a^{\mathrm{IV}} + 5a^{\mathrm{V}}x + 15a^{\mathrm{V}'}x^2 + 35a^{\mathrm{V}''}x^3 + 70a^{\mathrm{V}'''}x^4 + \text{etc.}) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die in A multiplicirte Reihe iſt S ſelbſt, die in $x.\Delta A$ multiplicirte, wie man leicht wahrnehmen wird, $\frac{\partial S}{\partial x}$, die in $x^2.\Delta^2 A$ multiplicirte, $\frac{\partial^2 S}{1.2.\partial x^2}$, die in $x^3.\Delta^3 A$ multiplicirte, $\frac{\partial^3 S}{1.2.3.\partial x^3}$, u. ſ. w.

Folglich

$$
Z = AS + \frac{x.\Delta A}{1}.\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{x^2.\Delta^2 A}{1.2}.\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{x^3.\Delta^3 A}{1.2.3.}.\frac{\partial^3 S}{\partial x^2} + \text{etc.}
$$

Sind $A, A', A'', \ldots$ wirklich Glieder einer arithmetiſchen Reihe von irgend einer höheren Ordnung, ſo daß die Differenzen von einer gewiſſen Ordnung an ſämmtlich verſchwinden, ſo findet man hierdurch wirklich die Summe von Z, vorausgeſetzt, daß die Reihe S oder $a + a'x + a''x^2 + \text{etc.}$ ſelbſt nicht irgendwo abbricht, in welchem Falle einer der Differentialquotienten $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}$, u. ſ. w. und alle ihm folgenden Null werden würde. Sonſt erhält man nur ſtatt der urſprünglichen Reihe Z eine andre, die manchmal ſchneller convergirt, als jene.

12. Verwandt der obigen Summirungsmethode iſt diejenige, nach welcher die einzelnen Glieder einer zu ſummirenden unendlichen Reihe ſelbſt wieder in unendliche Reihen aufgelöſ't werden, deren Glieder in ei-

ner andern Verbindung als der urſprünglichen wieder neue ſummirbare Reihen bilden. Dieſe Methode iſt von Pfaff in einer kleinen Schrift: Verſuch einer neuen Summationsmethode. Berlin, 1788. vorgetragen, und durch viele wichtige Anwendungen erläutert worden. Man wird ſich von ihr einigermaßen einen Begriff machen können, wenn man in dem Art., Summirbare Reihe, 21. die Summe der daſelbſt in die Potenzen von φ multiplicirten unendlichen Reihen als anders woher (z. B. aus 8. des gegenwärtigen Art.) bekannt anſiehet; es wird nämlich alsdann umgekehrt in Beziehung auf die dortige Abſicht

$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}$

welches dort als bekannt angenommen wurde.

13. Wenn das allgemeine Glied einer Reihe als eine Function der Stellenzahl gegeben iſt, ſo hängt die Erfindung des ſummatoriſchen Gliedes (ſ. den Artikel, Reihe, 36.) von der umgekehrten Differenzenrechnung ab. Bezeichnet nämlich y das allgemeine oder der Stelle x angehörige Glied einer Reihe a, a', a'' etc., S das ſummatoriſche Glied derſelben, ſo daß $S = a + a' + a'' + \ldots + y$ iſt, ſo iſt $S - y$ die Summe dieſer Reihe bis zu dem vorletzten Gliede oder von $x - 1$ Gliedern. Wenn alſo x in $x - 1$ übergeht, ſo verwandelt ſich S in $S - y$, und umgekehrt. Daher iſt y die endliche Differenz von $S - y$ für $\Delta x = 1$, d. i., $\Delta(S - y) = y$, alſo $S - y = \Sigma y + C$, wo Σ das Integrationszeichen für endliche Differenzen iſt, und $S = \Sigma y + y + C$. Das Integral Σy muß in der Vorausſetzung, daß Δx unveränderlich und $= 1$ iſt, geſucht, und die Conſtante C dadurch beſtimmt werden, daß für $x = 1$, $S = a$, oder für $x = 0$, $S = 0$ werden muß. — Da $y = \Sigma \Delta y$ ſo hat man auch $S = \Sigma y + \Sigma \Delta y + C = \Sigma(y + \Delta y) + C$, wo $y + \Delta y$ das der Stelle $x + 1$ entſprechende Glied iſt. Man ſ. Differenzenrechnung, 66. und folgg.

14. Beyſpiele von Reihen, auf welche dieſe Summirungsmethode anwendbar iſt, giebt der Art. Differenzenrechnung, 72. — 81; nur hätte dort das Zeichen S nicht gleichbedeutend mit Σ gebraucht werden ſollen. Unter den Reihen, deren allgemeines Glied eine algebraiſche Function der Stellenzahl iſt, werden, wie aus den dortigen Beyſpielen zum Theil erhellt, nach dieſer Methode ſehr leicht ſummirt diejenigen, deren Glieder Producte aus den auf einander folgenden Gliedern einer arithmetiſchen Reihe ſind, dieſe Glieder immer in gleicher Anzahl und ſo genommen, daß der erſte Factor jedes Products mit dem zweyten des nächſtvorhergehenden übereinkommt, ferner die Reihen von Brüchen, deren Zähler die Glieder einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung, die Nenner aber Producte von der eben angezeigten Beſchaffenheit ſind, wobey jedoch die Zahl der Factoren in jedem Nenner die Ordnungszahl der arithmetiſchen Reihe der Zähler wenigſtens um 2 übertreffen muß, wovon der Grund iſt, daß $\Sigma\frac{1}{x}$ ſich nicht algebraiſch angeben läßt. Aber auch Reihen, deren allgemeines Glied eine tranſcendente Function der Stellenzahl iſt, entziehen ſich dieſer Summirungsmethode nicht. In dem angezogenen Art. findet man z. B. die Reihen ſummirt, deren Glieder die Sinus oder Coſinus der Vielfachen eines Winkels α ſind. Hier ſoll noch die Anwendung auf die rücklaufenden Reihen gemacht werden, unter welchen die arithmetiſchen jeder Ordnung und die geometriſchen begriffen ſind.

15. Die jetzt vorzunehmende Summirung rücklaufender Reihen ſetzt die Kenntniß des allgemeinen Gliedes derſelben voraus. In dem Art., Rücklaufende Reihe, iſt gezeigt, wie daſſelbe aus dem erzeugenden Bruche gefunden werde. Es kann aber ſolches auch, nach der dort in (29) geſchehenen Anzeige, auf andere Art, durch Integrirung einer linearen Gleichung mit

endlichen Differenzen, aus einer hinlänglichen Anzahl der erſten Glieder, und der Beziehungsſcale gefunden worden ſeyn, ohne erſt zu dem Urbruche zurückzugehen. Ein zweytes Erforderniß zu der durch die obige Summirungsmethode zu bewerkſtelligenden Summation rücklaufender Reihen iſt, daß man Σa^x, $\Sigma x a^x$, $\Sigma x^2 a^x$ u. ſ. w. anzugeben wiſſe. Da der Artikel, Differenzenrechnung, hierüber nichts enthält, ſo ſoll das nöthige davon hier erſt beygebracht werden, und zwar unter der allein hier brauchbaren Vorausſetzung, daß $\Delta x = \omega$ eine unveränderliche Größe iſt.

16. Da $\Delta . a^x = a^{x+\omega} - a^x = a^x(a^\omega - 1)$, ſo iſt umgekehrt $\Sigma\Delta . a^x = (a^\omega - 1)\Sigma a^x$, d. i.

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^\omega - 1} + C.$$

Ferner iſt

$$\Delta . x a^x = (x + \omega) a^{x+\omega} - x a^x$$
$$= x a^x (a^\omega - 1) + \omega a^\omega . a^x$$

alſo umgekehrt

$$(a^\omega - 1)\Sigma x a^x = \Sigma\Delta x a^x - \omega a^\omega . \Sigma a^x$$
$$= x a^x - \frac{\omega a^{x+\omega}}{a^\omega - 1} + C$$

und

$$\Sigma x a^x = \frac{x a^x}{a^\omega - 1} - \frac{\omega a^{x+\omega}}{(a^\omega - 1)^2} + C.$$

Auf dieſe Art kann man weiter gehen, und $\Sigma x^2 a^x$ aus Σa^x, $\Sigma x a^x$ u. ſ. w. finden.

17. Nun ſey die rücklaufende Reihe

1, 4, 14, 46, 146, etc.

gegeben, deren allgemeines, der Stelle $x + 1$ angehöriges Glied, wie aus dem Art., Rücklaufende Reihe, 15., erhellt, $- 2^x + 2 . 3^x$ iſt, ſo wird das ſummatoriſche Glied derſelben $S = - \Sigma . 2^x + 2 . \Sigma . 3^x$ d. i., nach der vorigen Formel für Σa^x, wenn ω darin $= 1$ gemacht wird, $= - 2^x + 3^x + \text{Const.}$ Für $x = 0$

wird $S = 0$, alſo Const. $= 0$, und S ſchlechthin $= -2^x + 3^x$. Für $x = 5$ hat man alſo

$$1 + 4 + 14 + 46 + 146 = -2^5 + 3^5$$
$$= -32 + 243$$
$$= 211$$

wie auch durch wirkliche Zuſammenrechnung der Glieder gefunden wird.

Die Summe der ins Unendliche fortgeſetzten Reihe als Werth des Urbruchs für $z = 1$ genommen, kann, weil dabey die Anzahl der Glieder nicht in Betracht kommt, keine andere, als die gefundene Conſtante ſeyn, welche $= 0$ iſt. Und ſo findet ſich auch dieſelbe aus dem Urbruche $\frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$, wenn man darin $z = 1$ ſetzt.

18. Die Reihe ſey

1, 3, 11, 43, 167, 631, etc.

von welcher das allgemeine der Stelle $x + 1$ angehörige Glied (Rücklaufende Reihe, 16.) $\frac{2}{3}x \cdot 3^x - 3^x + 2 \cdot 2^x$ iſt. Für dieſe wird alſo $S = \frac{2}{3}\Sigma x \cdot 3^x - \Sigma 3^x + 2 \cdot \Sigma \cdot 2^x$, d. i., nach den obigen Formeln ($\omega = 1$ geſetzt) $= \frac{2}{3}\left(\frac{x \cdot 3^x}{2} - \frac{3^{x+1}}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot 3^x + 2 \cdot 2^x +$ Const. $= x \cdot 3^{x-1} - 3^x + 2^{x+1} +$ Const. Die Conſtans wird, da S für $x = 0$, auch $= 0$ wird, $= -1$. Daher iſt $S = (x-3)3^{x-1} + 2^{x+1} - 1$. Für $x = 6$ wird alſo

$$1 + 3 + 11 + 43 + 167 + 631 = 3 \cdot 3^5 + 2^7 - 1$$
$$= 729 + 128 - 1$$
$$= 856$$

wie ſich auch durch wirkliches Zuſammenrechnen findet.

Die Conſtante -1 giebt den Werth des Urbruchs $\frac{1-5z+8z^2}{1-8z+21z^2-18z^3}$ e für $z=1$.

19. Iſt das allgemeine Glied einer rücklaufenden Reihe durch Winkelfunctionen gegeben, ſo möchte es am kürzeſten ſeyn, ſtatt dieſer ihre Werthe in Exponentialausdrücken zu ſetzen, um alsdann von den vorigen Formeln Gebrauch machen zu können.

Iſt z. B. das der Stelle $x+1$ angehörige Glied $\frac{f^x}{\sin\varphi}(a\sin(x+1)\varphi+\frac{b}{f}\sin x\varphi)$, wo f und φ aus der Scale der Relation, a und b aber aus den beiden erſten oder irgend ein Paar andern Gliedern der Reihe beſtimmt werden, ſo erhält man dafür, wenn

$$f(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})=p$$

und $f(\cos\varphi-\sin\varphi.\sqrt{-1})=q$

gemacht wird, den Ausdruck $\frac{a(p^{x+1}-q^{x+1})}{p-q}$

$$+\frac{b(p^x-q^x)}{p-q}=\frac{ap+b}{p-q}.p^x-\frac{aq+b}{p-q}.q^x$$

alſo $S=\frac{ap+b}{p-q}.\Sigma p^x-\frac{aq+b}{p-q}.\Sigma q^x$

$$=\frac{ap+b}{p-q}.\frac{p^x}{p-1}-\frac{aq+b}{p-q}.\frac{q^x}{q-1}+C.$$

Und nach Beſtimmung der Conſtans aus dem Falle $S=0$, für $x=0$

$$S=\frac{apq-ap+bq-b}{(p-q)(p-1)(q-1)}p^x-\frac{apq-aq+bp-b}{(p-q)(p-1)(q-1)}.q^x$$

$+\frac{a+b}{(p-1)(q-1)}$, und wenn man f und φ ſtatt p und q wieder herſtellt,

$$S = \frac{af^2 - b}{1-2f\cos\varphi+f^2} \cdot \frac{f^x \sin x\varphi}{\sin\varphi} - \frac{a}{1-2f\cos\varphi+f^2} \cdot \frac{f^{x+1}\sin(x+1)\varphi}{\sin\varphi}$$
$$+ \frac{bf^2}{1-2f\cos\varphi+f^2} \cdot \frac{f^{x-1}\sin(x-1)\varphi}{\sin\varphi} + \frac{a+b}{1-2f\cos\varphi+f^2}.$$

Exempel. Für die Reihe

$1, 3, 2, -1, -3, -2, 1,$ etc.

iſt (Rücklaufende Reihe, 19) $a = 1$, $b = 2$, $f = 1$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$; alſo wird für dieſelbe

$$S = \frac{2\sin(x-1)\varphi - \sin(x+1)\varphi - \sin x\varphi}{\sin\varphi} + 3$$
$$= \frac{\sin(x-1)\varphi - \sin x\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos x\varphi + 3.$$

Für $x = 6$ erhält man hiernach

$$S = \frac{\sin\frac{5}{3}\pi - \sin\frac{6}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} - 2\cos\frac{6}{3}\pi + 3$$
$$= -1 - 2 + 3 = 0$$

Und es iſt auch $1 + 3 + 2 - 1 - 3 - 2 = 0$.

Die Conſtante 3 iſt auch hier der Werth des Urbruchs $\frac{1+2z}{1-z+z^2}$ für $z = 1$.

20. Die Summen rücklaufender Reihen laſſen ſich übrigens, wenn außer der Beziehungsſcale ſo viele von den erſten und letzten Gliedern der Reihe gegeben ſind, als die Scale der Relation Glieder hat, auf eine elementariſche, ſchon von Moivre gewieſene Art finden.

Es ſeyn nämlich A, B, C, ... G, H Glieder einer ſolchen Reihe, deren Beziehungsſcale $+\alpha, -\beta$, iſt, und $A + B + C + \ldots + G + H = S$, ſo iſt

$$\begin{aligned}
A &= A \\
B &= B \\
C &= B\alpha - A\beta \\
D &= C\alpha - B\beta \\
&\;\vdots \\
G &= F\alpha - E\beta \\
H &= G\alpha - F\beta
\end{aligned}$$

alſo, wenn man auf beiden Seiten addirt,

$$S = A + B + (S - A - H)\alpha - (S - G - H)\beta$$

und hieraus

$$S = \frac{A + B - (A + H)\alpha + (G + H)\beta}{1 - \alpha + \beta}$$

Auf ähnliche Art läßt ſich die Summe der Reihe finden, wenn die Scale der Relation aus drey oder mehr Gliedern beſteht.

21. Verlangt man die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe, ſo fällt die Betrachtung der letzten Glieder aus, und es iſt daher in dem angenommenen Falle

$$S = \frac{A + B - A\alpha}{1 - \alpha + \beta}$$

Dieß dient den Urbruch einer rücklaufenden Reihe zu finden, wozu aber die Glieder der Beziehungsſcale, ſo wie die in den Ausdruck für S eingehenden erſten Glieder der Reihe noch in die erforderlichen Potenzen der unbeſtimmten z zu multipliciren ſind.

Für die Reihe

$$1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + \text{etc.}$$

z. E. hat man $A = 1$, $B = 4z$, $\alpha = 5z$, $\beta = 6z^2$,

alſo iſt $S = \dfrac{1 + 4z - 5z}{1 - 5z + 6z^2} = \dfrac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$.

22. Da ſich aus der Beziehungsſcale einer rücklaufenden Reihe der Nenner des erzeugenden Bruches

leicht ergiebt, ſo läßt ſich der Zähler dazu auch durch die Methode der unbeſtimmten Coefficienten finden. Der Urbruch ſelbſt giebt alsdann, wenn man darin die unbeſtimmte z, in deren auf einander folgende Potenzen die Glieder der rücklaufenden Reihe multiplicirt werden, $= 1$ ſetzt, die Summe der ohne Ende fortgeſetzten Reihe.

Um nun die Summe bis zu einem gewiſſen beſtimmten Gliede zu erhalten, muß man auf die vorige Art die Summe der unendlichen Reihe, welche das jenem Gliede zunächſt folgende zum Anfangsgliede hat, ſuchen, wozu außer dieſem Gliede von der nächſtfolgenden noch ſo viele als die Beziehungsſcale Glieder weniger eins enthält, durch Functionen ihrer Stellen gegeben ſeyn müſſen. Der Unterſchied beider unendlichen Summen giebt die verlangte endliche.

23. Wenn der Nenner der gebrochenen Function, aus welcher die rücklaufende Reihe entſteht, Null iſt für $z = 1$, ſo läßt ſich die Summe eines endlichen Stücks der Reihe durch das Verfahren in (20) nicht finden, indem ſolches dieſe Summe $= \frac{0}{0}$ giebt. Bey dem Verfahren in (22) wird, wenn $z = 1$ gemacht wird, dieſe Summe gleichfalls $\frac{0}{0}$; man muß alsdann die Differentialrechnung nach der in dem Art. Function, 50., gewieſenen Art zu Hülfe nehmen, oder ſie durch ein anderes gleichgültiges Verfahren erſetzen, um den Werth der Summe in dem vorliegenden Falle zu erhalten.

Exempel. Von der Reihe 2, 11, 29, 65, etc. für welche die Beziehungsſcale $+ 3, - 2$; iſt, ſucht man die Summe der acht erſten Glieder. Der Urbruch der Reihe iſt $\frac{2 + 5z}{1 - 3z + 2z^2}$, und das allge-

meine Glied der aus dieſem Bruche entwickelten Reihe $2 + 11z + 29z^2 + \text{etc.} \ldots . (9 . 2^m - 7)z^m$, alſo die Reihe vom 9ten Gliede an $2297z^8 + 4601z^9 + 9209z^{10} + \text{etc.} = z^8(2297 + 4601z + 9209z^2 + \text{etc.})$. Der erzeugende Bruch der eingeſchloſſenen Reihe iſt $\frac{2297 - 2290z}{1 - 3z + 2z^2}$

Daher iſt

$$2 + 11z + 29z^2 + \ldots . + 1145z^7$$
$$= \frac{2 + 5z - 2297z^8 + 2290z^9}{1 - 3z + 2z^2}$$

welcher Bruch $\frac{0}{0}$ wird für $z = 1$. Differentiirt man Zähler und Nenner jeden für ſich, ſo iſt der Quotient der Differentiale $\frac{5 - 2297 . 8z^7 + 2290 . 9z^8}{-3 + 2 . 2z}$ welcher $= 2239$ für $z = 1$ wird. Und dieſes iſt auch die verlangte Summe.

24. In dem eben erwähnten Falle, wo der Nenner des Urbruchs $1 - z$ oder eine Potenz von $1 - z$ als Factor enthält, kann man auch die Summe einer endlichen Anzahl Glieder der rücklaufenden Reihe dadurch finden, daß man den Urbruch in zwey Brüche, deren einer die Potenz von $1 - z$ zum Nenner hat, zerlegt. Die Reihe, welche aus der Entwickelung dieſes Bruchs hervorgeht, iſt in Abſicht der Coefficienten eine arithmetiſche von einer um 1 niedrigern Ordnung als der Exponent der Potenz von $1 - z$; der andere Bruch giebt entwickelt eine rücklaufende Reihe, für welche die Vorausſetzung in (23) nicht mehr Statt findet. Die vorgegebene Reihe wird alſo in zwey zerlegt, die einzeln nach Arithmet. Reihen höherer Ordnungen, 12., und nach dem hier gewieſenen Verfahren bis zu irgend welchem Gliede ſummirt werden können.

25. Will man die Summirung der arithmetiſchen Reihen höherer Ordnungen nicht aus dem angeführten Artikel vorausſetzen, ſo kann man ſolche durch die nur erklärte Summirungsmethode finden. Da nämlich das der Stelle $x+1$ entſprechende Glied $y+\Delta y$ einer arithmetiſchen Reihe, deren erſtes Glied A, Anfangsglieder der Differenzreihen ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, u. ſ. w. ſind, iſt

$$A + x.\Delta A + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 A + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 A + \text{etc.}$$

ſo wird, wenn Sy die Summe von x Gliedern der Reihe bezeichnet,

$$Sy = A\Sigma x^0 + \Delta A.\Sigma x + \frac{\Delta^2 A}{1.2}.\Sigma(x-1)x$$
$$+ \frac{\Delta^3 A}{1.2.3}\Sigma(x-2)(x-1)x + \text{etc.}$$

d. i. aus Differenzenrechnung, 1. und 58.,

$$Sy = xA + \frac{(x-1)x}{1.2}\Delta A + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\Delta^2 A$$
$$+ \frac{(x-3)\ldots x}{1.2\ldots 4}\Delta^3 A + \text{etc.}$$

ohne Conſtans, weil für $x=0$, auch $Sy=0$ werden muß.

26. Es iſt aber zu bemerken, daß Sy ſich auch noch auf verſchiedene andere Weiſe ausdrucken läßt. So iſt

$$Sy = \frac{x}{1}A_0 + \frac{x(x+1)}{1.2}\Delta A_{-1} + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\Delta^2 A_{-2}$$
$$+ \frac{x(x+1)\ldots(x+4)}{1.2\ldots\ldots 4}\Delta^3 A_{-3} + \text{etc.} \ldots$$

wo A_0, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, etc. die der Stellenzahlen 0, -1, -2, -3 etc. entſprechenden Glieder anzeigen, alſo die Reihe rückwärts fortgeſetzt werden muß.

Iſt z. B. $y = x^4$, ſo iſt $A_0 = 0$, $\Delta A_{-1} = -1$, $\Delta^2 A_{-2} = +14$, $\Delta^3 A_{-3} = -36$, $\Delta^4 A_{-4} = +24$, alle übrigen Differenzen aber $= 0$, daher iſt

$$Sx^4 = -1.\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

$$+14.\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3} - 36.\frac{x(x+1)\ldots(x+3)}{1.\ 2.\ldots\ldots 4}$$

$$+24.\frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+4)}{1.\ 2.\ldots\ldots\ldots 5.}$$

Herr Prof. Schweins giebt dieſe Formel nebſt mehreren andern in ſeiner Analyſis, S. 326. unter Nr. 565 *), und ſcheint ſie für neu zu halten. Neu iſt ſie aber nicht, ſondern ſie ſteht im weſentlichen eben ſo, wie hier, ausgedruckt ſchon in Meißners Stern und Kern der Algebra, wovon die zweyte Ausgabe zu Hamburg, 1740. erſchienen iſt. Das Verfahren die Glieder der rückwärts fortgeſetzten Reihe und deren Differenzen in Betracht zu ziehen wird dort Halcken, einem geſchickten Rechner des ſiebzehnten Jahrhunderts, zugeſchrieben.

Die beiden Formeln für Sy ſind übrigens bloß beſondere Fälle folgender allgemeineren

$$Sy = xA_{-(r-1)} + \frac{x(x+2r-1)}{1.\ 2}\Delta A_{-(2r-1)}$$

$$+\frac{x(x+3r-1)(x+3r-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 A_{-(3r-1)}$$

$$+ \text{etc.}$$

wo r jede beliebige ganze, poſitive oder negative, Zahl ſeyn kann. Für die erſte (gewöhnliche) Formel iſt $r = 0$, für die zweyte $r = 1$.

*) Wird dieſe Formel mit Nr. 561., welche dieſelben Litteralproducte enthält, zuſammengehalten, ſo zeigt ſich, daß letztere unrichtig iſt.

Von der Richtigkeit dieſer Formel, deren Herleitung hier zu weitläufig werden würde, kann man ſich leicht a posteriori verſichern, wenn man $A_{-(r-1)}$, $\Delta A_{-(2r-1)}$, $\Delta^2 A_{-(3r-1)}$, u. ſ. w. nach (Arithmet. Reihen höherer Ordn., 9.) durch A, ΔA, $\Delta^2 A$, u. ſ. w. ausdrückt, und die gefundenen Werthe in der obigen Formel ſubſtituirt, wodurch ſie in die von (25) übergeht. Es iſt aber nicht zu überſehen, daß dort das Anfangsglied A die Stellenzahl 0 hat, welche hier 1 iſt, daher r, 2r, 3r u. ſ. w. ſtatt z kommen, um $A_{-(r-1)}$, $A_{-(2r-1)}$, $A_{-(2r-1)}$ zu finden.

Nimmt man $y = x^4$, r aber erſtlich $= 2$, und dann $= -1$, ſo wird

$$Sx^4 = x - 65.\frac{x(x+3)}{1.\ 2} + 194.\frac{x(x+5)(x+4)}{1.\ 2.\ 3} - 132.\frac{x(x+7)(x+6)(x+5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + 24.\frac{x(x+9)(x+8)(x+7)(x+6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

und

$$= 16.x + 175.\frac{x(x-3)}{1.\ 2} + 302.\frac{x(x-4)(x-5)}{1.\ 2.\ 3} + 156.\frac{x(x-5)(x-6)(x-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + 24.\frac{x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

Es wird ſich weiterhin Gelegenheit zeigen, die Zahlcoefficienten in den vorigen Formeln für Sx^4 anders auszudrucken.

27. Für die Reihen, deren allgemeines Glied $y = \varphi(x)$ gegeben iſt, läßt ſich vermittelſt des Taylorſchen Lehrſatzes leicht ein allgemeiner Summen-Aus-

druck erhalten. Es bezeichne nämlich s die Summe von x Gliedern der Reihe bis mit zu y, ſo daß
$s = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) \ldots\ldots + \varphi(x-1) + \varphi(x)$
ſo iſt

$$\varphi(x) = y$$

$$\varphi(x-1) = y - 1.\frac{\partial y}{\partial x} + 1^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - 1^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$\varphi(x-2) = y - 2.\frac{\partial y}{\partial x} + 2^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - 2^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\varphi(2) = \varphi(x-(x-2)) = y - (x-2)\frac{\partial y}{\partial x} + (x-2)^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - (x-2)^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$\varphi(1) = \varphi(x-(x-1)) = y - (x-1)\frac{\partial y}{\partial x} + (x-1)^2\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - (x-1)^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

alſo durch Zuſammenrechnen

$$s = xy - \frac{\partial y}{\partial x}.S(x-1) + \frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2}.S(x-1)^2 - \frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}.S(x-1)^3 + \text{etc.}$$

wo $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, $S(x-1)^3$, etc. aus den in dem Art. Potenz, 39. gegebenen Ausdrücken für

Sx, Sx^2, Sx^3, u. ſ. w. gefunden werden, wenn man von derſelben beziehungsweiſe x, x^2, x^3 u. ſ. w. abzieht, oder auch, was auf daſſelbe hinauskommt, überall $x-1$ ſtatt x ſetzt.

Man kann aber leicht Sx, Sx^2, Sx^3 u. ſ. w. ſelbſt in den Summenausdruck bringen, wenn man das Glied $\varphi(0) = y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - \text{etc.}$ noch mit einrechnet, und dann wieder abzieht. Da dieſes der Stelle 0 entſprechende Glied nach der in (13) angenommenen Bezeichnung durch $'a$ vorzuſtellen iſt, ſo wird

$$s = (x+1)y - {'a} - \frac{\partial y}{\partial x}.Sx + \frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2}.Sx^2 - \frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3}.Sx^3 + \text{etc.}$$

28. Nach Eulers Bemerkung, welcher den erſten Ausdruck für s in den Institt. calc. diff. P. II. §. 60. den andern ebendaſelbſt §. 136. giebt, ſind dieſe Ausdrücke zur wirklichen Summirung der Reihen wenig brauchbar, weil für große x die Coefficienten ſehr groß werden. Um den zweyten Summenausdruck indeß durch ein Exempel zu erläutern, ſey $y = x^n$, ſo iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, u. ſ. w., alſo, weil $'a = 0$ iſt,

$$Sx^n = (x+1)x^n - \frac{n}{1}.x^{n-1}.Sx + \frac{n(n-1)}{1.2}.x^{n-2}Sx^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}.x^{n-3}Sx^3 + \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots.1}{1.\ 2.\ \ldots.\ n}Sx^n.$$

Setzt man $n = 1$, ſo wird

$$Sx = (x+1)x - Sx$$

alſo $Sx = \frac{x(x+1)}{1.\ 2.}$

Für $n = 2$ iſt

$$Sx^2 = (x+1)x^2 - 2x . Sx + Sx^2$$

welches wieder auf das vorige führt, ſo daß die Formel die Summen der geraden Potenzen unbeſtimmt läßt, die der ungeraden Potenzen aber auf eine doppelte Art giebt.

29. Da durch das Taylorſche Theorem die Differenz Δy durch Δx und die ſucceſſiven Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, u. ſ. w. ausgedruckt wird, und daraus weiter $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ u. ſ. w. durch eben dieſe Größen ausgedruckt ſich finden laſſen *), ſo laſſen ſich auch umgekehrt die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. ſ. w. durch Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. ſ. w. und durch Δx ausdrucken. Durch eine Ausführung, welche für dieſen Art zu weitläufig werden würde, hat Lagrange zuerſt gefunden, und Laplace erwieſen, daß allgemein

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} . \Delta x^n = \left[\log(1+\Delta y)\right]^n$$

iſt, vorausgeſetzt, daß man in dem Gliede rechter Hand bey der Entwickelung die Exponenten des Potenzirens von Δy in Exponenten des Differenzirens umwandelt.

Hiernach iſt alſo, Δx, wie es hier der Fall iſt, $= 1$ geſetzt

*) Man ſehe Eulers Institt. calc. diff. P. II. c. III. §. 56.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \Delta y - \frac{1}{2}\Delta^2 y + \frac{1}{3}\Delta^3 y - \frac{1}{4}\Delta^4 y + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Delta^2 y - \Delta^3 y + \frac{11}{12}\Delta^4 y - \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \Delta^3 y - \frac{3}{2}\Delta^4 y + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial^4 x} = \Delta^4 y - \text{etc.}$$

u. ſ. w. *). u. ſ. w.

Bringt man dieſe Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. ſ. w., ſo wie diejenigen von $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, $S(x-1)^3$ u. ſ. w. in den erſten Ausdruck für s, ſo wird durch Zerfällung der Coefficienten von Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^4 y$ u. ſ. w. in ihre Factoren

$$s = xy - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}\Delta y + \frac{(x-1)\,x\,(x+1)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 y$$
$$- \frac{(x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

Dieſer Ausdruck iſt zwar nur durch Induction gefunden, man kann ſich aber ſehr leicht von der Richtigkeit deſſelben a posteriori überzeugen, wenn man darnach die Summe einer geometriſchen Reihe ſucht, und ſolche mit dem bekannten Werthe derſelben vergleicht. Zu dem Ende ſey $y = e^x$, ſo iſt $\Delta y = e^{x+1} - e^x = (e-1)e^x$, und eben ſo $\Delta^2 y = (e-1)^2 e^x$, $\Delta^3 y = (e-1)^3 e^x$ u. ſ. w. Da nun $s = \frac{e^{x+1} - e}{e-1} = \frac{(e^x - 1)e}{e-1}$ iſt, ſo muß ſeyn

*) Man leitet dieſe Formeln auch leicht aus den Euleriſchen a. a. O. ab.

$$\frac{(e^x - 1)e}{e - 1} = x.e^x - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}(e-1)e^x$$
$$+ \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}(e-1)^2 e^x$$
$$- \frac{(x-1)x \ldots x+2}{1.\ 2.\ldots 4}(e-1)^3 e^x + \text{etc.}$$

oder

$$(e^x - 1)e = e^x \Big((e-1)x - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}(e-1)^2$$
$$+ \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}(e-1)^3 - \text{etc.} \Big)$$
$$= e^x \Big(e - \Big(1 - \frac{x-1}{1}.(e-1) + \frac{(x-1)x}{1.\ 2}(e-1)^2$$
$$- \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}(e-1)^3 + \text{etc.} \Big)\Big)$$
$$= e^x (e - (1 + e - 1)^{-(x-1)}) = e^x (e - e^{-(x-1)})$$
$$= e^{x+1} - e.$$

wie gehörig.

30. Exempel. Es ſey $y = x^4$, ſo wird

$$Sx^4 = x.x^4 - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}\Delta x^4 + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}.\Delta^2 x^4$$
$$- \frac{(x-1)x \ldots x+2}{1.\ 2.\ldots\ldots 4}\Delta^3 x^4 + \frac{(x-1)x \ldots x+3}{1\ 2.\ldots\ldots 5}.\Delta^4 x^4.$$

Die Differenzen Δx^4, $\Delta^2 x^4$, $\Delta^3 x^4$ u. ſ. w. laſſen ſich als Summe von Combinationen, in welcher die verbundenen Elemente Factoren ſind, darſtellen, und zwar hier, wo $\Delta x = 1$ iſt, aus den Elementen x, $x+1$, $x+2$ u. ſ. w. Da eine umſtändlichere, tiefer geſchöpfte Ausführung hier nicht an ihrem Orte ſeyn würde, ſo muß eine elementariſche Darſtellung ihre Stelle vertreten.

Es iſt mit Zuziehung von (Buchſtabenrechnung, 18. x.)

$$\Delta x^4 = (x+1)^4 - x^4 = ((x+1)-x)((x+1)^3+(x+1)^2x + (x+1)x^2+x^3)$$

$$= 1.(x^3+x^2(x+1)+x(x+1)^2+(x+1)^3)$$

und hieraus

$$\Delta^2 x^4 = 1.\left\{(x+1)^3+(x+1)^2(x+2)+(x+1)(x+2)^2 + (x+2)^3-(x+1)^3-x(x+1)^2-x^2(x+1)-x^3\right\}$$

$$= 1((x+2-x)(x+1)^2+((x+2)^2-x^2)(x+1) + (x+2)^3-x^3)$$

Aber

$$(x+2)^2-x^2 = (x+2-x)((x+2)+x)$$

$$(x+2)^3-x^3 = (x+2-x)((x+2)^2+(x+2)x+x^2)$$

Dadurch wird, wenn man alles gehörig ordnet,

$$\Delta^2 x^4 = 1.2\left\{x^2+x(x+1)+x(x+2)+(x+1)^2 + (x+1)(x+2)+(x+2)^2\right\}$$

und hieraus

$$\Delta^3 x^4 = 1.2\left\{(x+1)^2+(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3) + (x+2)^2+(x+2)(x+3)+(x+3)^2 -(x+1)^2-(x+1)(x+2)-x(x+1)-(x+2)^2 -x(x+2)-x^2\right\}$$

$$= 1.2\left\{(x+3-x)(x+1)+(x+3-x)(x+2) + (x+3)^2-x^2\right\}$$

$$= 1.2.3\left(x+(x+1)+(x+2)+(x+3)\right)$$

Hieraus endlich

$$\Delta^4 x^4 = 1.2.3\Big((x+1-x) + (x+2-(x+1)) + (x+3-(x+2)) + (x+4-(x+3))\Big)$$

$$= 1.2.3.4$$

wie bekannt.

Bedient man ſich alſo der Hindenburgiſchen Zeichen (Combinatoriſche Analyſis, 25.) und erinnert ſich, daß $x^4 = xxxx$, ſo iſt

$$S.x^4 = x.\,{}'\underset{(x)}{D} - \frac{1}{2}(x-1)x.\,{}'\underset{(x,x+1)}{C} + \frac{1}{3}(x-1)(x+1).\,{}'\underset{(x,x+1,x+2)}{B}$$

$$- \frac{1}{4}(x-1)x(x+1)(x+2).\,{}'\underset{(x,x+1,x+2,x+3)}{A}$$

$$+ \frac{1}{5}(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3).$$

So hat Herr Prof. Schweins in ſeiner Analyſis die von ihm für $S.x^4$ gegebenen Ausdrücke eingerichtet. Den eben gefundenen hat er nicht.

31. Behandelt man den zweyten Ausdruck für s in (27) eben ſo, wie jetzt mit dem erſten geſchehen iſt, oder kürzer, ſetzt man in dem tranſformirten Ausdrucke in (28) $x+1$ ſtatt x, wobey aber y als terminus a quo ſammt den davon abhängenden Δy, $\Delta^2 y$ u. ſ. w. ungeändert bleibt, ſo wird nach Abrechnung des der Stelle o entſprechenden und mit eingerechneten Gliedes $'a$

$$s = (x+1)y - \frac{x(x+1)}{1.\,2}\Delta y + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\,2.\,3}\Delta^2 y$$

$$- {}'a$$

$$- \frac{x(x+1)\ldots x+3}{1.\,2.\ldots\ldots 4}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

Dieſe Formel läßt ſich mit der erſten in (26) für Sy vergleichen.

32. Exempel. Iſt $y = x^4$, ſo iſt ${}'a = 0$, und es wird

$$Sx^4 = (x+1)x^4 - \frac{x(x+1)}{1.\ 2}\Delta x^4 + \frac{x(x+1)(x+2).}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 x^4 - \frac{x(x+1)\ \ldots\ldots\ (x+3)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ 4}.\Delta^3 x^4 + \frac{x(x+1)\ \ldots\ldots\ (x+4)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ 5}.\Delta^4 x^4$$

$$= (x+1).{}'D_{(x)} - \frac{1}{2}x(x+1).{}'C_{(x,\,x+1)} + \frac{1}{3}x(x+1)(x+2).{}'B_{(x,\,x+1,\,x+2)} - \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(x+3).\ {}'A_{(x,\,x+1,\,x+2,\,x+3)} + \frac{1}{5}x(x+1)\ \ldots\ldots\ (x+4).$$

Da $S.x^4$ auch $= S.(x+1)^4 - (x+1)^4$, ſo wird nach eben dieſer Formel, weil $(x+1)(x+1)^4 - (x+1)^4 = x(x+1)^4$

$$Sx^4 = x.\ {}'D_{(x+1)} - \frac{1}{2}x(x+1).\ {}'C_{(x+1,\,x+2)} + \frac{1}{3}x(x+1)(x+2).\ {}'B_{(x+1,\,x+2,\,x+3)} - \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(x+3).\ {}'A_{(x+1,\,x+2,\,\ldots\,x+4)} + \frac{1}{3}.x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

Dieſen Ausdruck hat Herr Prof. Schweins unter Nr. 563.

33. Vermittelſt der vorhin gelehrten Zurückführung von Δx^4, $\Delta^2 x^4$ u. ſ. w. auf Summen von Producten nach den Combinationsclaſſen mit Wieder-

holungen laſſen ſich nun auch die Ausdrücke für Sx^4 in (26) anders darſtellen. Der erſte und letzte geben

$$Sx^4 = -\frac{1}{2}x(x+1)\cdot {}'C_{(1)} + \frac{1}{3}x(x+1)(x+2)\cdot {}'B_{(1,2)}$$
$$- \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(x+3)\cdot {}'A_{(1,2,3)}$$
$$+ \frac{1}{5}x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$
$$= x\cdot {}'D_{(2)} + \frac{1}{2}x(x-3)\,{}'C_{(3,4)} + \frac{1}{3}x(x-4)(x-5)\cdot {}'B_{(4,5,6)}$$
$$+ \frac{1}{4}x(x-5)(x-6)(x-7)\cdot {}'A_{(5,6,7,8)}$$
$$- \frac{1}{5}x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9).$$

34. Da die Bernoulliſchen Zahlen nichts anders als die Coefficienten von x in den Summen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis x oder in Sx^2, Sx^4, Sx^6 u. ſ. w. ohne Rückſicht auf die Vorzeichen ſind, ſo ſieht man, wie mittels jener Summen, wenn ſie nach der hier gewieſenen Art geſucht und dargeſtellt worden, ſich die Bernoulliſchen Zahlen durch Producte der natürlichen Zahlen, 1, 2, 3 . . . nach den Combinationsclaſſen mit Wiederholungen ausdrucken laſſen. So erhält man z. B. für die zweyte Bernoulliſche Zahl $\mathfrak{B}^{(2)}$ aus dem Ausdrucke für Sx^4 in (30) und dem letzten Ausdrucke in (32) wenn man, nachdem jeder mit x dividirt worden, $x=0$ ſetzt

$$\mathfrak{B}^{(2)} = -\left(\frac{1}{2}\,{}'C_{(1)} - \frac{1.1}{3}\,{}'B_{(1,2)} + \frac{1.1.2}{4}\,{}'A_{(1,2,3)} - \frac{1.1.2.3}{5}\right)$$
$$= -\left({}'D_{(1)} - \frac{1}{2}\cdot {}'C_{(1,2)} + \frac{1.2}{3}\,{}'B_{(1,2,3)} - \frac{1.2.3}{4}\,{}'A_{(1,2,3,4)} + \frac{1.2.3.4}{5}\right)$$

Aus den beiden Ausdrücken für $S.x^4$ in (33) aber wird

$$\mathfrak{B}^{(2)} = \frac{1}{2}.\,{}'C_{(1)} - \frac{1.2}{3}\,{}'B_{(1,2)} + \frac{1.2.3}{4}.\,{}'A_{(1,2,3)} - \frac{1.2.3.4}{5}.$$

$$= -\left\{.\,{}'D_{(2)} - \frac{3}{2}\,{}'C_{(3,4)} + \frac{4.5}{3}\,{}'B_{(4,5,6)} - \frac{5.6.7}{4}\,{}'A_{(5,6,7,8)} + \frac{6.7.8.9}{5}\right\}$$

Es dürfte nicht ſchwer ſeyn, dieſe Formeln, wovon die erſte die einfachſte, die dritte die zierlichſte iſt, allgemein zu machen, wenn es von Nutzen ſeyn könnte.

35. Da die Coefficienten in der erſten allgemeinen Summationsformel in (27) veränderliche Größen ſind, die zweyte aber in (29) außer dieſer Unbequemlichkeit auch noch die hat, daß darin die ſucceſſiven endlichen Differenzen des allgemeinen Gliedes y vorkommen, wodurch ihr Gebrauch faſt nur auf ſolche Reihen beſchränkt wird, deren allgemeines Glied eine ganze rationale Function von x iſt, ſo iſt es nöthig eine andere Formel zu ſuchen, welche von dieſen Unbequemlichkeiten frey iſt. Eine ſolche erhält man auf folgendem Wege.

Man ſetze in der erſten Formel in (27) ſtatt $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, $S(x-1)^3$ u. ſ. w. ihre durch die Bernoulliſchen Zahlen $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$ u. ſ. w. ausgedruckten Werthe aus (Potenz, 44.) z. B.

$$S(x-1)^6 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{2}\mathfrak{B}^{(1)}.x^5 - \frac{6.5.4}{2.3.4}\mathfrak{B}^{(2)}x^3 + \frac{6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}\mathfrak{B}^{(3)}x.$$

und ordne das Aggregat ſo, daß alles was in dieſelbe Bernoulliſche Zahl multiplicirt iſt, zuſammengenommen wird. Setzt man nun die Rechnung weit genug fort, ſo findet ſich

$$S = xy - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x^3}{3}.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - \frac{x^4}{4}.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x.\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{x^3}{3}.\frac{\partial^3 y}{1.2.\partial x^3} - \frac{x^4}{4}.\frac{\partial^4 y}{1.2.3.\partial x^4} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\left(x.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{x^3}{3}.\frac{\partial^4 y}{1.2.\partial x^4} - \frac{x^2}{4}.\frac{\partial^5 y}{1.2.3.\partial x^5} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\left(x.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + \frac{x^3}{3}.\frac{\partial^6 y}{1.2.\partial x^6} - \frac{x^4}{4}.\frac{\partial^7 y}{1.2.3.\partial x^7} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots 6}\left(x.\frac{\partial^6 y}{\partial x^6} - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial^7 y}{\partial x^7} + \frac{x^3}{3}.\frac{\partial^8 y}{1.2.\partial x^8} - \frac{x^4}{4}.\frac{\partial^9 y}{1.2.3.\partial x^9} + \text{etc.}\right)$$

$$- \text{etc.}$$

Die hier in $\frac{1}{2}$, $\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}$, $\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1\ldots\ldots 4}$, u. ſ. w. multiplicirten Reihen entſtehen offenbar aus der erſten $xy - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial y}{\partial x} +$ etc. wenn man darin y nach und nach mit $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ u. ſ. w. vertauſcht. Läßt ſich alſo für die erſte Reihe ein geſchloſſener Ausdruck geben, ſo hat man auch einen ſolchen für die übrigen. Die erſte Reihe iſt aber keine andere als die Bernoulliſche Integrationsreihe (Integralformel, 145.), wel-

che ſich aus dem Taylorſchen Lehrſatze auf folgende Art ergiebt.

Es ſey z eine Function von $x = \varphi x$, ſo iſt

$$\varphi(x+\omega) = z + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \omega + \frac{\partial^2 z}{1.2.\partial x^2} \cdot \omega^2$$

$+ \frac{\partial^3 z}{1.2.3.\partial x^3} \cdot \omega^3 +$ etc. Nun ſey $\omega = -x$, ſo wird $\varphi(x+\omega) = \varphi(0) =$ Const., und

$$\text{Const.} = z - x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{\partial^3 z}{1.2.\partial x^3} + \frac{x^4}{4} \cdot \frac{\partial^4 z}{1.2.3.\partial x^4} - \text{etc.}$$

alſo mit Beyſeiteſetzung der Conſtans

$$z = x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{\partial^3 z}{1.2.\partial x^3} - \frac{x^4}{4} \cdot \frac{\partial^4 z}{1.2.3.\partial x^4} + \text{etc.}$$

Setzt man nun hier zuerſt $z = \int y \partial x$, wo dann $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial x}$ u. ſ. w. wird, ſo verwandelt ſich die Reihe rechter Hand des Gleichheitszeichens in die erſte der obigen Reihen in dem Ausdrucke für s.

Setzt man $z = y$, ſo entſteht die zweyte, in $\frac{1}{2}$ multiplicirte, Reihe. Wird $z = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, u. ſ. w. genommen, ſo entſtehen die dritte, vierte, fünfte u. ſ. w., in $\frac{B^{(1)}}{1.2}, \frac{B^{(2)}}{1...4}, \frac{B^{(3)}}{1...6}$ u. ſ. w. multiplicirten, Reihen. Daher iſt nach Wiederherſtellung der Conſtanten

$$s = \int y \partial x + \frac{1}{2} y + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2 \ldots 6} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.} \quad + \text{Const.}$$

wo die Const. aus den Conſtanten aller Partialreihen zuſammengeſetzt iſt, und dadurch beſtimmt wird, daß für $x = 0$, auch $s = 0$ werden, oder überhaupt für einen gewiſſen Werth von x der durch die Formel für die Summe von ſo viel Gliedern der Reihe, als jener Werth von x angiebt, gefundene Werth mit dem, auf gewöhnlichem Wege erhaltenen Werthe dieſer Summe übereinkommen muß.

Die ſo eben gewonnene Summationsformel unterſcheidet ſich von der, aus welcher ſie abgeleitet worden, dadurch, daß die Coefficienten der Differentialquotienten in ihr beſtimmte Zahlgrößen ſind, daß dieſe Differentialquotienten nur eine ungerade Ordnungszahl haben, und daß ein Glied der Formel eine Integrationsgröße iſt. Euler hat in den Institt. Calc. Diff. P. I. c. 5. dieſe Formel auf einem andern, etwas umſtändlicheren Wege, entwickelt, allein ſeine Abſicht dabey war mit auf die Darſtellung der Relationen der Bernoulliſchen Zahlen gerichtet. Hier kam es auf eine kurze Herleitung an, wobey der Zuſammenhang der Formel mit der in (27) klar dargelegt werden konnte.

35. Führt man in die gefundene Summationsformel wieder Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. ſ. w. ein, indem man ſtatt $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. ſ. w. ihre durch Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. ſ. w. ausgedruckten Werthe aus (29) und ſtatt $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$ u. ſ. w. die numeriſchen Werthe derſelben ſetzt, ſo erhält man eine neue Summationsformel, nach welcher

$$s = \int y \partial x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{12} \Delta y - \frac{1}{24} \Delta^2 y + \frac{19}{720} \Delta^3 y - \frac{3}{160} \Delta^4 y + \text{etc.} + \text{Const.}$$

Um durchaus abwechſelnde Vorzeichen in den Reihen- ausdruck zu bringen, und das Geſetz der Coefficienten beſſer zu erkennen, bemerke man, daß $s = \Sigma y + y + \text{Const.}$ iſt. Setzt man dieſen Werth in die Formel, ſo wird

$$\Sigma y = \int y \partial x - \frac{1}{2} y + \frac{1}{12} \Delta y - \frac{1}{24} \Delta^2 y + \frac{19}{720} \Delta^3 y - \text{etc.} + \text{Const.}$$

Nun ſey

$$\Sigma y = \int y \partial x + \alpha' y + \alpha'' \Delta y + \alpha''' \Delta^2 y + \text{etc.} + C.$$

Die Coefficienten α', α'', α''', u. ſ. w. können nach folgender Methode beſtimmt werden, die derjenigen nachgebildet iſt, welche Euler in den Nov. Act. Petrop. T. XI. zur Beſtimmung der Coefficienten gelehrt hat, wenn $\frac{b}{1 + \cos\varphi}$, $(1 + a\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$, und ähnliche Ausdrücke in Reihen von der Form $A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc.}$ zu entwickeln ſind.

Man ſetze, weil α', α'', α''' u. ſ. w. beſtimmte Zahlen ſind, alſo gar nicht davon abhängen, welche Function y von x iſt, ſtatt y ſolche rationale ganze Functionen, bey denen ſich nicht allein Σy, ſondern auch Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, u. ſ. w. leicht beſtimmen laſſen. Hierdurch erhält man, weil einmal eine der ſucceſſiven Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, beſtändig, alle folgenden aber o werden, in jedem beſonderen Falle aus der obigen Annahme $\Sigma y = \int y \partial x + \alpha' y + \alpha'' \Delta y + \text{etc.} + \text{Const.}$ eine Gleichung mit einer endlichen Anzahl Glieder, indem die Reihe rechter Hand irgendwo abbricht. Iſt y ſo gewählt, daß es mit den ſämmtlichen Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, u. ſ. w. bis auf die letzte beſtändige für $x = 0$ verſchwindet, ſo fällt, wenn man die Integrale Σy, $\int y \partial x$ mit $x = 0$ anfangen läßt, das in die beſtändige Differenz multiplicirte Glied, indem es mit der Const. zuſammen o wird, aus. Verſchwindet nun

nun überdieß y und das einſeitig beſtimmte Σy, ſo wie die veränderlichen Differenzen bis auf eine für einen gewiſſen andern Werth von x, wie 1, ſo kann man durch Annahme dieſes Werths von x alle Glieder jener Gleichung bis auf $\int y \partial x$, welches nun ein beſtimmtes Integral wird, und dasjenige Glied, welches die nicht für $x = 1$ verſchwindende Differenz zum Factor hat, wegſchaffen, und ſo einen der Coefficienten α', α'', α''', u. ſ. w. durch ein beſtimmtes Integral ausdrucken, wie ſich ſogleich zeigen wird.

Man mache zuerſt $y = x$, ſo iſt $\Sigma y = \frac{(x-1)x}{1.2}$, welches für $x = 0$ ſchon verſchwindet, und $\int y \partial x = \int x \partial x$; ferner $\Delta y = 1$ (weil $\Delta x = 1$ iſt), $\Delta^2 y = 0$ u. ſ. w. Daher

$$\frac{(x-1)x}{1.2} = \int x \partial x + \alpha' x + \alpha'' + \text{Const.}$$

Das Integral $\int x \partial x$ werde ſo genommen, daß es für $x = 0$ verſchwinde, ſo wird, wenn $x = 0$ gemacht wird, Const. $= -\alpha''$, alſo

$$\frac{(x-1)x}{1.2} = \int x \partial x + \alpha' x.$$

Wird hier nun $x = 1$ geſetzt, ſo folgt

$$\alpha' = -\int x \partial x$$

das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen.

Zweytens ſey $y = \frac{(x-1)x}{1.2}$, ſo iſt (Differenzenrechnung, 58.) $\Sigma y = \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}$, Δy (ebendaſ. 9.) $= x$, $\Delta^2 y = 1$, $\Delta^3 y = 0$, u. ſ. w. Daher

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} = \int \frac{x(x-1)}{1.2} \partial x + \frac{x(x-1)}{1.2} \alpha' + \alpha'' x$$
$$+ \alpha''' + \text{Const.}$$

Sſ

Nimmt man das Integral $\int \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \partial x$ ſo, daß es für $x=0$ verſchwindet, ſo wird für $x=0$, Const. $= -\alpha'''$, und wenn man nun $x=1$ ſetzt,

$$\alpha'' = -\int \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \partial x$$

das Integral innerhalb der Gränzen $x=0$ und $x=1$ genommen.

Drittens ſey $y = \frac{(x-2)(x-1)x}{1.\ 2.\ 3}$, ſo iſt $\Sigma y = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, $\Delta y = \frac{(x-1)x}{1.\ 2}$, $\Delta^2 y = x$, $\Delta^3 y = 1$, $\Delta^4 y$ u. ſ. w. $= 0$. Mithin

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \int \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \partial x$$
$$+ \alpha' . \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} + \alpha'' . \frac{x(x-1)}{1.\ 2} + \alpha''' x$$
$$+ \alpha^{IV} + \text{Const.}$$

Hieraus folgt nach derſelben Art zu ſchließen wie vorhin

$$\alpha''' = -\int \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \partial x$$

das Integral von $x=0$ bis $x=1$ erſtreckt.

Das Geſetz der Fortſchreitung zeigt ſich nun klar, und es iſt allgemein

$$\alpha^{(r)} = -\int \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-r+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots\ldots r} \partial x$$

Das Integral von $x=0$ bis $x=1$ genommen. Hieraus entwickelt man leicht folgende Ausdrücke für die Coefficienten α', α'', α''' ......

$$\alpha' = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}A^{\backprime}_{(1)}\right)$$

$$\alpha''' = -\frac{1}{2.3}\underset{(1,2)}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}A^{\backprime} + \frac{1}{2}B^{\backprime}\right)}$$

$$\alpha^{\text{IV}} = -\frac{1}{2.3.4}\underset{(1,2,3)}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}A^{\backprime} + \frac{1}{3}B^{\backprime} - \frac{1}{2}C^{\backprime}\right)}$$

$$\alpha^{\text{V}} = -\frac{1}{2.3.4.5}\underset{(1,2,3,4)}{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}A^{\backprime} + \frac{1}{4}B^{\backprime} - \frac{1}{3}C^{\backprime} + \frac{1}{2}D^{\backprime}\right)}$$

etc.

wo die Zeichen $A^{\backprime}$, $B^{\backprime}$, $C^{\backprime}$ .... Summen von Producten der natürlichen Zahlen, welche der jedesmalige Zeiger angiebt, nach den Combinationsclaſſen ohne Wiederholungen anzeigen.

Das Bildungs-Geſetz dieſer Coefficienten läßt ſich auch noch auf eine andere Weiſe darſtellen, nämlich folgendergeſtalt.

Man formire eine nach den Potenzen einer unbeſtimmten u fortſchreitende Reihe
$\beta + \beta' u + \beta'' u^2 + \beta''' u^3 + \beta^{\text{IV}} u^4 +$ etc. wo
$\beta = \int \partial x$, $\beta' = \int x \partial x$ $\beta'' = \int \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \partial x$, $\beta''' = \int \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \partial x$ u. ſ. w., die Integrale ſo genommen, daß ſie für $x = 0$ verſchwinden, und β', β'', β''' u. ſ. w. für den Werth $x = 1$ ſich in $-\alpha'$, $-\alpha''$, $-\alpha'''$ u. ſ. w. verwandeln. Man ſetze nun die Summe der obigen Reihe P, wo P eine gewiſſe Function von x und u iſt, ſo wird, wenn man beiderſeits die Differentiale nach x nimmt,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial x = \partial x\left(1 + xu + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}u^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}u^3 + \text{etc.}\right)$$

$$= \partial x(1+u)^x$$

folglich durch Integration (in Beziehung auf x)

$$P = \frac{(1+u)^x}{\log(1+u)} + \text{Const.}$$

Da P für $x = 0$ verſchwinden muß, ſo wird Const. $= -\frac{1}{\log(1+u)}$, alſo

$$P = \frac{(1+u)^x - 1}{\log(1+u)}$$

Setzt man $x = 1$, ſo verwandelt ſich P in $1 - \alpha' u - \alpha'' u^2 - \alpha''' u^3 - \text{etc.}$ Daher iſt

$$1 - \alpha' u - \alpha'' u^2 - \alpha''' u^3 - \text{etc.} = \frac{u}{\log(1+u)}$$

oder $\frac{1}{u} - \alpha' - \alpha'' u - \alpha''' u^2 - \text{etc.} = \frac{1}{\log(1+u)}$

ſo daß ſich α', α'', α''' u. ſ. w. auch durch die Entwickelung des Quotienten $\frac{1}{\log(1+u)}$ oder der Potenz $[\log(1+u)]^{-1}$ beſtimmen laſſen. Man erhält dadurch für α', α'', α''' u. ſ. w. folgende recurrirende Formeln

$$\alpha' = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha'' = \frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{3}$$

$$\alpha''' = \frac{1}{2}\alpha'' - \frac{1}{3}\alpha' - \frac{1}{4}$$

$$\alpha^{IV} = \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{1}{3}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha' + \frac{1}{5}$$

$$\alpha^{V} = \frac{1}{2}\alpha^{IV} - \frac{1}{3}\alpha''' + \frac{1}{4}\alpha'' - \frac{1}{5}\alpha' - \frac{1}{6}$$

etc.

Beyläufig kann man bemerken, daß hieraus, $u=1$ geſetzt, folgt

$$\int\partial x + \int x\partial x + \int\frac{x(x-1)}{1.\ 2}\partial x + \int\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}\partial x$$
$$+ \text{etc. in inf.} = \frac{2^x - 1}{\log 2}$$

wo die Integrale ſo genommen werden, daß ſie ſämmtlich für $x=0$ verſchwinden. Setzt man noch $x=1$, ſo wird

$$1 - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \alpha^{\text{iv}} - \text{etc.} = \frac{1}{\log 2}$$

alſo die Summe der unendlichen Reihe

$$\alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{\text{iv}} + \text{etc. in inf.} = 1 - \frac{1}{\log 2}$$

Setzt man aber $u=-1$, ſo wird $P=0$, alſo

$$\beta - \beta' + \beta'' - \beta''' + \beta^{\text{iv}} - \text{etc.} = 0$$

und nun $x=1$ gemacht,

$$1 + \alpha' - \alpha'' + \alpha''' - \alpha^{\text{iv}} + \text{etc.} = 0$$

alſo

$$-\alpha' + \alpha'' - \alpha''' + \alpha^{\text{iv}} - \alpha^{\text{v}} + \text{etc.} = 1.$$

Da die Coefficienten α', α'', α''' u. ſ. w. abwechſelnd negativ und poſitiv ſind, ſo bekommen in der Reihe $-\alpha' + \alpha'' - \alpha''' + \text{etc.}$, wenn ſtatt α', α'', α''' u. ſ. w. ihre numeriſchen Werthe geſetzt werden, ſämmtliche Glieder das Vorzeichen $+$. Hieraus folgt, daß die Glieder dieſer Reihe $-\alpha'$, $+\alpha''$, $-\alpha'''$, ohne Ende abnehmen, und zuletzt unendlich klein werden müſſen, weil ſonſt die Summe der Reihe nicht endlich und $=1$ ſeyn könnte. Dieſes Ergebniß iſt nicht unwichtig.

36^b. Die eben entwickelte Summenformel ergiebt ſich auch aus dem oben in (28) angeführten Satze von Lagrange, wenn man darin $n=-1$, und $\int y\partial x$, Σy und y beziehungsweiſe ſtatt $\frac{\partial^{-1}y}{\partial x^{-1}}$, $\Delta^{-1}y$ und $\Delta^0 y$ ſetzt,

übrigens bey der Entwickelung von $[\log(1+\Delta y)]^{-1}$ nach der dortigen Regel verfährt. Es wird nämlich auf dieſe Weiſe, $\Delta x = \omega$ geſetzt,

$$\frac{\int y \partial x}{\omega} = [\log(1+\Delta y)]^{-1}$$

$$= \Sigma y - \alpha y - \alpha'' \Delta y - \alpha''' \Delta^2 y - \text{etc.}.$$

woraus unſere Formel dadurch, daß man $\omega = 1$ ſetzt, und eine willkührliche Conſtans beyfügt, hervorgeht.

57. Auch die Summenformel in (35) iſt in jenem Lagrangiſchen Satze enthalten, deſſen allgemeinſter Ausdruck eigentlich iſt

$$(\Delta y)^n = \left(e^{\omega \frac{\partial y}{\partial x}} - 1\right)^n$$

wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmenſyſtems anzeigt, und vorausgeſetzt wird, daß man die Exponenten des Potenzirens von Δy und ∂y mit den Zeichen Δ und ∂ ſelbſt verbindet, und die Differenzen und Differentiale mit negativen Exponenten in Integrale umwandelt, alſo $\Sigma^m y$ ſtatt $\Delta^{-m} y$ und $\int^m y \partial x^m$ ſtatt $\frac{\partial^{-m} y}{\partial x^{-m}}$ ſchreibt.

Um vermittelſt dieſer Formel Σy, welches ihr zufolge $= \left(e^{\omega \frac{\partial y}{\partial x}} - 1\right)^{-1}$ mit den angegebenen Einſchränkungen iſt, zu entwickeln, bedarf es der Entwikkelung von $(e^u - 1)^{-1}$ in eine nach den Potenzen von u fortſchreitende Reihe. Dieſe ergiebt ſich ſo.

Es iſt

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u}}$$

mithin, wenn man $u = \varphi \sqrt{-1}$ macht

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}}$$

d. i. nach Th. I. S. 877.

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi - \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{1}{2}\varphi}{2\sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} . \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}$$

alſo aus Cyklometrie, 16., wenn man die dortige Bezeichnung der Bernoulliſchen Zahlen mit der hier gebrauchten vertauſcht,

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\varphi - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\varphi^3 - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2..6}\varphi^5 - \text{etc.}\right) - \frac{1}{2}$$

und wenn man u wieder herſtellt, d. i. $\varphi = -u\sqrt{-1}$ ſetzt,

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{u} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}u\sqrt{-1} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}u^3.\sqrt{-1} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6}u^5.\sqrt{-1} - \text{etc}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= u^{-1} - \frac{1}{2}u^0 + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}u - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}u^3 + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6}u^5 - \text{etc.}$$

Entwickelt man hiernach $\left(e^{\omega\frac{\partial y}{\partial x}} - 1\right)^{-1}$ mit den vorgeſchriebenen Veränderungen, ſo wird

$$\Sigma y = \frac{1}{\omega}\int y\partial x - \frac{1}{2}y + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}\omega}{1.2}.\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}\omega^3}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}\omega^5}{1.2....6}.\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

In dieſer allgemeinern Form iſt die Formel in dem Art., Quadratur, 134. angeführt. Auf der zweyten Formel für $\frac{\int y \partial x}{\omega}$ in (36) beruht die in eben dem Art. 150., mitgetheilte Formel von Laplace zu den mechaniſchen Quadraturen. Bey der Anwendung auf die Summirung der Reihen iſt $\Sigma y = Sy + y$ oder $= s + y$, und $\omega = 1$, mit Beyfügung einer willkührlichen Conſtans zu dem einen oder andern Theile der Formeln, welche auch ſonſt, wenn ſie nicht ausdrücklich hinzugeſetzt wird, als in Σy oder $\int y \partial x$ mit begriffen gedacht werden muß.

38. Was nun den Gebrauch der beiden zuletzt, nämlich in (34) und (35), gefundenen Summationsformeln betrifft, ſo bricht ſowohl die eine als die andere ab, wenn y oder das allgemeine Glied der zu ſummirenden Reihe eine rationale ganze Function der Stellenzahl x iſt. Denn alsdann verſchwinden nicht bloß die Differentialquotienten, ſondern auch die Differenzen derjenigen Ordnungen, welche höher ſind als der Exponent der höchſten Potenz von x in y. Iſt dieſes nicht der Fall, ſo erhält man durch die eine Formel ſowohl als durch die andere für die Summe einer Reihe ſelbſt wieder eine Reihe, und zwar mit unendlich vielen Gliedern, wo es alsdann darauf ankommt, ob ſolche ſich dem Totalwerthe ſchneller nähert, als die vorgegebene zu ſummirende Reihe. Sollte dieſes aber auch nicht ſeyn, ſo mag ſie doch in analytiſcher Rückſicht, durch die veränderte Form der Summe, brauchbar ſeyn. Die erſte Formel hat vor der zweyten den Vorzug, daß darin die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$ u. ſ. w. vorkommen, welche faſt ohne Ausnahme nicht allein ungleich leichter zu finden ſind, ſon-

dern auch einfacher ausgedruckt werden, als die ſucceſſiven Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. ſ. w. Dagegen nehmen in der zweyten Formel die numeriſchen Coefficienten ohne Ende ab, da in der erſten die Bernoulliſchen Zahlen eine höchſtdivergente Reihe bilden, wodurch der nach der Formel gefundene Summenausdruck in beſtimmten Fällen, wenigſtens in den weiter vom Anfange entferntern Gliedern, gleichfalls divergent werden wird. — Es iſt jetzt noch der Gebrauch der gefundenen Formeln durch einige Beyſpiele zu erläutern.

39. Es ſey die Summe der harmoniſchen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x} = s$$

zu finden. Hier iſt $y = \frac{1}{x}$, alſo $\int y \partial x = \log x$, $\frac{\partial y}{\partial x} = - 1 . x^{-2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = - 1.2.3. x^{-4}$; $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \ldots$ $- 1.2.3.4.5\, x^{-6}$ u. ſ. w. Daher nach der erſten Formel in (34)

$$s = C + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{8x^8} - \frac{\mathfrak{B}^{(5)}}{10x^{10}} + \text{etc.}$$

Da die Conſtante C aus dem Falle $x = 0$ nicht beſtimmt werden kann, ſo ſetze man $x = 1$. Für dieſen Werth von x iſt $s = 1$, alſo

$$1 = C + \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6} + \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{8} - \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6} - \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{8} + \text{etc.}$$

Da die Bernoulliſchen Zahlen eine divergirende Reihe bilden, ſo iſt dieſe Reihe zur Beſtimmung der

Conſtante nicht tauglich. Weil indeß die Vorzeichen in ihr abwechſeln, ſo wird der Totalwerth, wenn man zur Berechnung deſſelben ſtets ein Glied mehr zuzieht, immer zwiſchen zwey Gränzen eingeſchränkt, die, ſo lange die Reihe convergirt, immer näher zuſammen rücken. Hält man ſich an die vier erſten Glieder, weil das fünfte ſchon eine Entfernung von dem Totalwerthe bewirken würde, ſo findet ſich

$$\begin{aligned} C &> 0,5 \\ &< 0,58333 \\ &> 0,57500 \\ &< 0,57897. \end{aligned}$$

Daß die Conſtans wirklich zwiſchen dieſe Gränzen fällt, zeigt ſich, wenn man ſie auf einem anderen Wege ſucht. Wendet man nämlich zur Summirung der vorgegebenen Reihe die zweyte Formel in (35) an, ſo iſt $\Delta y = -\frac{1}{x(x+1)}$, $\Delta^2 y = +\frac{1.\ 2}{x(x+1)(x+2)}$, $\Delta^3 y = -\frac{1.\ 2.\ 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, u. ſ. w. *), alſo

$$s = C' + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x(x+1)}$$
$$- \frac{1}{24} \cdot \frac{1.\ 2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{19}{720} \cdot \frac{1.\ 2.\ 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$- \text{etc.}$$

*) Der allgemeine Ausdruck für $\Delta^n y$ ergiebt ſich leicht nach der Formel $\Delta^n y = (y - \frac{n}{1} \cdot y' + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y'' - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} y''' + \text{etc.}) \cdot (-1)^n$ vermittelſt des Satzes, daß

$$\frac{1}{m} - \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{m+r} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \cdot \frac{1}{m+2r} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{1}{m+3r} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots n.\ r^n}{m(m+r)(m+2r)\ldots(m+nr)},$$

welcher aus der oben (4.) angeführten und gebrauchten Relation der Binomial-Coefficienten abgeleitet werden kann.

Die Conſtante hier, C′, iſt mit der vorigen einerley, wie ſogleich erhellt, wenn man x unendlich groß ſetzt. Es wird nämlich aus der erſten Formel für s, wenn n eine unendlich große Zahl iſt,

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Aus der zweyten Formel für s aber bey derſelben Annahme des Werthes von x

$$C' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Daher $C' = C$.

Um nun C′ oder C vermittelſt der zweyten Formel bequem zu berechnen, ſuche man die Summe der zehn erſten Glieder der Reihe durch wirkliche Addition. Heißt ſolche der Kürze wegen h, ſo iſt $x = 10$ gemacht,

$$h = C' + \log 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10.11} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1.2}{10.11.12}$$
$$- \frac{19}{720} \cdot \frac{1.2.3}{10.11.12.13} - \frac{3}{160} \cdot \frac{1.2.3.4}{10.11\ldots14} - \text{etc.}$$

alſo

$$C' = h - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10.11} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1.2}{10.11.12}$$
$$+ \frac{19}{720} \cdot \frac{1.2.3}{10.11.12.13} + \text{etc.}$$

Die Reihe convergirt durchaus (35), obwohl immer langſamer. Sie giebt, wenn die zwölf erſten Glieder in Rechnung gebracht werden, und dieſe ſelbſt mit acht Decimalſtellen geführt wird,

$$C' = 0{,}57721566.$$

Dieſer Werth von C′ oder C, welcher höchſtens in der letzten Decimalſtelle fehlerhaft ſeyn kann, fällt zwiſchen die oben angegebenen Gränzen, und zeigt dadurch, daß die Reihe für C in ihrem convergenten Stücke doch eine Annäherung an C gewährt.

Um jetzt C in mehreren Decimalſtellen genau zu erhalten, ſetze man in der erſten Reihe für s gleichfalls $x = 10$, ſo wird

$$C = h - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2.10^2} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4.10^4} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6.10^6} - \text{etc.}$$

und hieraus, indem $h = \frac{7381}{2520}$,

$$C = 0,5772156649015328606065$$

wo zu der Berechnung nur das convergirende Stück der Reihe zugezogen wird. Die Reihe nämlich gehört ſo wie die erſte für s ſelbſt, wie groß man auch x nehmen mag, zu der Gattung der halbconvergirenden (Reihe, 32ª.). Der divergente Theil derſelben iſt die Entwickelung einer Function, welche ſich häufig auf ein beſtimmtes Integral bringen, und ſo mit dem letzten in Rechnung gezogenen Gliede vergleichen läßt. Namentlich iſt dieſes bey unſerer Reihe der Fall. Man ſehe darüber Erchingers ſchöne Ausführung in Schraders Commentatio de summatione seriei $\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \text{etc.}$ §. 16. Hier mag die Übereinſtimmung des gefundenen Werths von C in den acht erſten Decimalſtellen mit dem, auf einem andern Wege erhaltenen, welche Uebereinſtimmung nicht zufällig ſeyn kann, hinreichen, die Sicherheit der Anwendung der Reihe für C zu bewähren.

40. Setzt man $x = 1$ in der zweyten Reihe für s, ſo wird, weil alsdann $s = 1$ iſt,

$$C' = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{3} + \frac{19}{720} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{160} \cdot \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

Dieſes iſt auch der Werth der bey dem Integral-

logarithmen oder der Function $\int \frac{\partial x}{\log x}$ vorkommenden Conſtante. Da nämlich

$$\log.\text{int.}(1-x) = \int \frac{-\partial x}{\log(1-x)}$$

$$= \text{Const.} + \log x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}.\frac{x^3}{3}$$

$$- \frac{19}{720}.\frac{x^4}{4} - \frac{3}{160}.\frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

ſo wird, wenn log. int. $0 = 0$ ſeyn ſoll, für $x = 1$,

$$0 = \text{Const.} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}.\frac{1}{2} - \frac{1}{24}.\frac{1}{3} + \frac{19}{720}.\frac{1}{4} - \text{etc.}$$

alſo

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}.\frac{1}{2} + \frac{1}{24}.\frac{1}{3} + \frac{19}{720}.\frac{1}{4} + \text{etc.}$$
$$= C'.$$

Maſcheroni und Soldner haben dieſes Ergebniß, jeder auf einem andern Wege, herausgebracht.

41. Man kann der erſten Summenformel in (34) eine etwas veränderte Einrichtung geben, ſo daß die darnach gefundenen Summen der Reihen, wofern kein geſchloſſener Ausdruck dafür gefunden werden kann, durch etwas convergentere Reihen dargeſtellt werden. Dieſes geſchieht auf folgende Art.

Da $y = \varphi x$, ſo ſey $T = \varphi(x + \frac{1}{2})$, ſo daß y aus T wird, wenn ſtatt x geſetzt wird $x - \frac{1}{2}$.

Weil nun T ſelbſt wieder eine Function von x iſt, ſo giebt der Taylorſche Lehrſatz

$$y = T - \frac{1}{2}.\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2^2}.\frac{\partial^2 T}{1.2\partial x^2} - \frac{1}{2^3}.\frac{\partial^3 T}{1.2.3\partial x^3} + \frac{1}{2^4}.\frac{\partial^4 T}{1.2.3.4\partial x^4} - \text{etc.}$$

alſo

$$Sy = ST - \frac{1}{2}.S\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2.4}S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{2.4.6}S\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{1}{2.4.6.8}S\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

wo S das Summenzeichen iſt. Man ſuche nun nach der Formel in (34)

$$Sy = \text{Const.} + \int y\partial x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{12}.\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{720}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{30240}.\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

die Werthe von ST, $S\frac{\partial T}{\partial x}$, $S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, u. ſ. w., indem man für y nach und nach T, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ u. ſ. w. ſetzt, und ſubſtituire ſolche in dem obigen Ausdrucke für Sy, ſo wird nach gehöriger Reduction erhalten

$$Sy = \text{Const.} + \int T\partial x - \frac{1}{24}.\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{7}{5760}.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{31}{967680}.\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \text{etc.}$$

Um zur Einſicht des Geſetzes, nach welchem die Coefficienten dieſer Reihe gebildet werden, zu gelangen, ſey

$$Sy = \text{Const.} + \int T\partial x + \alpha.\frac{\partial T}{\partial x} + \beta.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \gamma.\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \delta.\frac{\partial^7 T}{\partial x^7} + \text{etc.}$$

Da die Coefficienten α, β, γ .... zu den Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}$ beſtimmte Zahlen ſind, deren Werth ſich nicht ändert, die Function T oder y mag ſeyn, welche ſie will, ſo kann man zur Beſtimmung derſelben jede beliebige Function von x für y wählen.

Man nehme eine ſolche, bey welcher ſich nicht allein Sy, ſondern auch $\int y \partial x$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. ſ. w., mithin auch $\int T \partial x$, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$ u. ſ. w. leicht beſtimmen laſſen. Dieß trifft ein für $y = e^{mx}$, wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmenſyſtems iſt. Es wird nämlich bey dieſer Annahme

$$Sy = e^{m} + e^{2m} + e^{3m} + \ldots + e^{mx}$$
$$= \frac{e^{m}(e^{mx} - 1)}{e^{m} - 1}.$$

Ferner iſt $T = e^{mx + \frac{m}{2}}$, alſo $\int T \partial x = \frac{1}{m} e^{mx + \frac{1}{2}m} = \frac{1}{m} T$, $\frac{\partial T}{\partial x} = m.\, T$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = m^3.\, T$ u. ſ. w., folglich nach der Formel

$$Sy = \text{Const.} + e^{mx + \frac{m}{2}} \left(\frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \text{etc.} \right)$$

Weil Sy für $x = 0$ verſchwindet, ſo iſt

$$\text{Const.} = - e^{\frac{1}{2}m} \left(\frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \text{etc.} \right)$$

mithin

$$\frac{e^{m}(e^{mx} - 1)}{e^{m} - 1} = e^{\frac{m}{2}}(e^{mx} - 1) \left\{ \frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \delta m^7 + \text{etc.} \right\}$$

oder

$$\frac{e^{\frac{m}{2}}}{e^m - 1} = \frac{1}{e^{\frac{m}{2}} - e^{-\frac{m}{2}}} = \frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5$$
$$+ \delta m^7 + \text{etc.}$$

Man ſetze $m = \varphi\sqrt{-1}$, ſo wird

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}.\left\{ -\frac{1}{\varphi} + \alpha\varphi - \beta\varphi^3 \right.$$
$$\left. + \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 + \text{etc.} \right\}$$

alſo wenn man auf beiden Seiten mit $2\sqrt{-1}$ multiplicirt

$$\frac{1}{(e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}) : 2\sqrt{-1}} = \frac{2}{\varphi} - 2\alpha\varphi + 2\beta\varphi^3$$
$$- 2\gamma\varphi^5 + 2\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Aber $\frac{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin\frac{1}{2}\varphi$, daher

$$\frac{2}{\varphi} - 2\alpha\varphi + 2\beta\varphi^3 - 2\gamma\varphi^5 + 2\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

$$= \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\varphi.$$

$$= \frac{2}{\varphi} + \frac{2(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2}\varphi + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}.}{1.2.3.4.2^3}\varphi^3$$
$$+ \frac{2(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots.6.2^5}\varphi^5 + \text{etc.}$$

aus Cyklometrie, 21. Die Vergleichung der Coefficienten zu den gleichnamigen Potenzen von φ giebt

$$\alpha = -\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2}$$

$$\beta = +\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4.2^3}$$

$\gamma =$

$$\gamma = -\frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots.6.2^5}$$

$$\delta = +\frac{(2^7-1)\mathfrak{B}^{(4)}}{1.2.\ldots8.2^7}$$

etc.

Demnach iſt Sy oder

$$s = \text{Const.} + \int T\partial x - \frac{2-1}{2}.\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}.\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$+ \frac{2^3-1}{2^3}.\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$

$$- \frac{2^5-1}{2^5}.\frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6}.\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}$$

$$+ \text{etc.}$$

wo $y = \varphi x$ und $T = \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)$ iſt.

Dieſe Formel, in welcher die Coefficienten etwas kleiner ſind, als in der urſprünglichen, läßt ſich mit der in dem Art. Quadratur, 137. angeführten zweyten Maclaurinſchen Formel vergleichen oder iſt vielmehr mit derſelben einerley. Nach ihr wird, weil für die harmoniſche Reihe $y = \frac{1}{x}$ alſo $T = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$, $\int T\partial x = \log\left(x + \frac{1}{2}\right)$ u. ſ. w. iſt, die Summe derſelben ſo ausgedruckt.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}$$

$$= \text{Const.} + \log\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{2-1}{2}.\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2(x+\frac{1}{2})^2}$$

$$- \frac{2^3-1}{2^3}.\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4(x+\frac{1}{2})^4} + \frac{2^5-1}{2^5}.\frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6(x+\frac{1}{2})^6}$$

$$- \text{etc.}$$

Conſtante nicht tauglich. Weil indeß die Vorzeichen in ihr abwechſeln, ſo wird der Totalwerth, wenn man zur Berechnung deſſelben ſtets ein Glied mehr zuzieht, immer zwiſchen zwey Gränzen eingeſchränkt, die, ſo lange die Reihe convergirt, immer näher zuſammen rücken. Hält man ſich an die vier erſten Glieder, weil das fünfte ſchon eine Entfernung von dem Totalwerthe bewirken würde, ſo findet ſich

$$C > 0,5$$
$$< 0,58333$$
$$> 0,57500$$
$$< 0,57897.$$

Daß die Conſtans wirklich zwiſchen dieſe Gränzen fällt, zeigt ſich, wenn man ſie auf einem anderen Wege ſucht. Wendet man nämlich zur Summirung der vorgegebenen Reihe die zweyte Formel in (35) an, ſo iſt $\Delta y = -\frac{1}{x(x+1)}$, $\Delta^2 y = +\frac{1.\,2}{x(x+1)(x+2)}$,

$\Delta^3 y = -\frac{1.\,2.\,3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, u. ſ. w. *), alſo

$$s = C' + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x(x+1)}$$
$$-\frac{1}{24}\cdot\frac{1.\,2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{19}{720}\cdot\frac{1.\,2.\,3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$-\text{ etc.}$$

*) Der allgemeine Ausdruck für $\Delta^n y$ ergiebt ſich leicht nach der Formel $\Delta^n y = (y - \frac{n}{1}\cdot y' + \frac{n(n-1)}{1.\,2} y'' - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3} y''' + \text{etc.}) \cdot (-1)^n$

vermittelſt des Satzes, daß

$$\frac{1}{m} - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{m+r} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\cdot\frac{1}{m+2r} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{1}{m+3r} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1.\,2.\,3\ldots\ldots n.\,r^n}{m(m+r)(m+2r)\ldots(m+nr)},$$

welcher aus der oben (4.) angeführten und gebrauchten Relation der Binomial-Coefficienten abgeleitet werden kann.

Die Conſtante hier, C′, iſt mit der vorigen einerley, wie ſogleich erhellt, wenn man x unendlich groß ſetzt. Es wird nämlich aus der erſten Formel für s, wenn n eine unendlich große Zahl iſt,

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Aus der zweyten Formel für s aber bey derſelben Annahme des Werthes von x

$$C' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Daher $C' = C$.

Um nun C′ oder C vermittelſt der zweyten Formel bequem zu berechnen, ſuche man die Summe der zehn erſten Glieder der Reihe durch wirkliche Addition. Heißt ſolche der Kürze wegen h, ſo iſt $x = 10$ gemacht,

$$h = C' + \log 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10.11} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1.2}{10.11.12} - \frac{19}{720} \cdot \frac{1.2.3}{10.11.12.13} - \frac{3}{160} \cdot \frac{1.2.3.4}{10.11 \ldots 14} - \text{etc.}$$

alſo

$$C' = h - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10.11} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1.2}{10.11.12} + \frac{19}{720} \cdot \frac{1.2.3}{10.11.12.13} + \text{etc.}$$

Die Reihe convergirt durchaus (35), obwohl immer langſamer. Sie giebt, wenn die zwölf erſten Glieder in Rechnung gebracht werden, und dieſe ſelbſt mit acht Decimalſtellen geführt wird,

$$C' = 0,57721566.$$

Dieſer Werth von C′ oder C, welcher höchſtens in der letzten Decimalſtelle fehlerhaft ſeyn kann, fällt zwiſchen die oben angegebenen Gränzen, und zeigt dadurch, daß die Reihe für C in ihrem convergenten Stücke doch eine Annäherung an C gewährt.

Um jetzt C in mehreren Decimalſtellen genau zu erhalten, ſetze man in der erſten Reihe für s gleichfalls $x = 10$, ſo wird

$$C = h - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2.10^2} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4.10^4} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6.10^6} - \text{etc.}$$

und hieraus, indem $h = \frac{7381}{2520}$,

$$C = 0,5772156649015328606065$$

wo zu der Berechnung nur das convergirende Stück der Reihe zugezogen wird. Die Reihe nämlich gehört ſo wie die erſte für s ſelbſt, wie groß man auch x nehmen mag, zu der Gattung der halbconvergirenden (Reihe, 32[a].). Der divergente Theil derſelben iſt die Entwickelung einer Function, welche ſich häufig auf ein beſtimmtes Integral bringen, und ſo mit dem letzten in Rechnung gezogenen Gliede vergleichen läßt. Namentlich iſt dieſes bey unſerer Reihe der Fall. Man ſehe darüber Erchingers ſchöne Ausführung in Schraders Commentatio de summatione seriei $\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \text{etc.}$ §. 16. Hier mag die Übereinſtimmung des gefundenen Werths von C in den acht erſten Decimalſtellen mit dem, auf einem andern Wege erhaltenen, welche Uebereinſtimmung nicht zufällig ſeyn kann, hinreichen, die Sicherheit der Anwendung der Reihe für C zu bewähren.

40. Setzt man $x = 1$ in der zweyten Reihe für s, ſo wird, weil alsdann $s = 1$ iſt,

$$C' = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}.\frac{1}{2}. + \frac{1}{24}.\frac{1}{3} + \frac{19}{720}.\frac{1}{4} + \frac{3}{160}.\frac{1}{5} + \text{etc.}$$

Dieſes iſt auch der Werth der bey dem Integral-

logarithmen oder der Function $\int \frac{\partial x}{\log x}$ vorkommenden Conſtante. Da nämlich

$$\log.\text{int.}(1-x)=\int\frac{-\partial x}{\log(1-x)}$$

$$=\text{Const.}+\log x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}.\frac{x^2}{2}-\frac{1}{24}.\frac{x^3}{3}$$

$$-\frac{19}{720}.\frac{x^4}{4}-\frac{3}{160}.\frac{x^5}{5}-\text{etc.}$$

ſo wird, wenn log. int. $0=0$ ſeyn ſoll, für $x=1$,

$$0=\text{Const.}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}.\frac{1}{2}-\frac{1}{24}.\frac{1}{3}+\frac{19}{720}.\frac{1}{4}$$

$$-\text{etc.}$$

alſo

$$\text{Const.}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}.\frac{1}{2}+\frac{1}{24}.\frac{1}{3}+\frac{19}{720}.\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

$$=C'.$$

Maſcheroni und Soldner haben dieſes Ergebniß, jeder auf einem andern Wege, herausgebracht.

41. Man kann der erſten Summenformel in (34) eine etwas veränderte Einrichtung geben, ſo daß die darnach gefundenen Summen der Reihen, wofern kein geſchloſſener Ausdruck dafür gefunden werden kann, durch etwas convergentere Reihen dargeſtellt werden. Dieſes geſchieht auf folgende Art.

Da $y=\varphi x$, ſo ſey $T=\varphi(x+\frac{1}{2})$, ſo daß y aus T wird, wenn ſtatt x geſetzt wird $x-\frac{1}{2}$.

Weil nun T ſelbſt wieder eine Function von x iſt, ſo giebt der Taylorſche Lehrſatz

$$y = T - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{1.2\partial x^2} - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{\partial^3 T}{1.2.3\partial x^3} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\partial^4 T}{1.2.3.4\partial x^4} - \text{etc.}$$

alſo

$$Sy = ST - \frac{1}{2}\cdot S\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2.4}S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{2.4.6}S\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{1}{2.4.6.8}S\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

wo S das Summenzeichen iſt. Man ſuche nun nach der Formel in (34)

$$Sy = \text{Const.} + \int y\partial x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{12}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{720}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{30240}\cdot\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

die Werthe von ST, $S\frac{\partial T}{\partial x}$, $S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, u. ſ. w., indem man für y nach und nach T, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ u. ſ. w. ſetzt, und ſubſtituire ſolche in dem obigen Ausdrucke für Sy, ſo wird nach gehöriger Reduction erhalten

$$Sy = \text{Const.} + \int T\partial x - \frac{1}{24}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{7}{5760}\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{31}{967680}\cdot\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \text{etc.}$$

Um zur Einſicht des Geſetzes, nach welchem die Coefficienten dieſer Reihe gebildet werden, zu gelangen, ſey

$$Sy = \text{Const.} + \int T\partial x + \alpha\cdot\frac{\partial T}{\partial x} + \beta\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \gamma\cdot\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \delta\cdot\frac{\partial^7 T}{\partial x^7} + \text{etc.}$$

Da die Coefficienten α, β, γ .... zu den Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}$ beſtimmte Zahlen ſind, deren Werth ſich nicht ändert, die Function T oder y mag ſeyn, welche ſie will, ſo kann man zur Beſtimmung derſelben jede beliebige Function von x für y wählen.

Man nehme eine ſolche, bey welcher ſich nicht allein Sy, ſondern auch $\int y \partial x$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. ſ. w., mithin auch $\int T \partial x$, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$ u. ſ. w. leicht beſtimmen laſſen. Dieß trifft ein für $y = e^{mx}$, wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmenſyſtems iſt. Es wird nämlich bey dieſer Annahme

$$Sy = e^m + e^{2m} + e^{3m} + \ldots + e^{mx}$$
$$= \frac{e^m(e^{mx} - 1)}{e^m - 1}.$$

Ferner iſt $T = e^{mx + \frac{m}{2}}$, alſo $\int T \partial x = \frac{1}{m} e^{mx + \frac{1}{2}m} = \frac{1}{m} T$, $\frac{\partial T}{\partial x} = m.\, T$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = m^3.\, T$ u. ſ. w., folglich nach der Formel

$$Sy = \text{Const.} + e^{mx + \frac{m}{2}} \left(\frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \text{etc.} \right)$$

Weil Sy für $x = 0$ verſchwindet, ſo iſt

$$\text{Const.} = - e^{\frac{1}{2}m} \left(\frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \text{etc.} \right)$$

mithin

$$\frac{e^m(e^{mx} - 1)}{e^m - 1} = e^{\frac{m}{2}}(e^{mx} - 1) \left\{ \frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 \right.$$
$$\left. + \gamma m^5 + \delta m^7 + \text{etc.} \right\}$$

oder

$$\frac{e^{\frac{m}{2}}}{e^m - 1} = \frac{1}{e^{\frac{m}{2}} - e^{-\frac{m}{2}}} = \frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5$$
$$+ \delta m^7 + \text{etc.}$$

Man ſetze $m = \varphi\sqrt{-1}$, ſo wird

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}. \left\{ -\frac{1}{\varphi} + \alpha\varphi - \beta\varphi^3 \right.$$
$$\left. + \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 + \text{etc.} \right\}$$

alſo wenn man auf beiden Seiten mit $2\sqrt{-1}$ multiplicirt

$$\frac{1}{(e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}) : 2\sqrt{-1}} = \frac{2}{\varphi} - 2\alpha\varphi + 2\beta\varphi^3$$
$$- 2\gamma\varphi^5 + 2\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Aber $\dfrac{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin\frac{1}{2}\varphi$, daher

$$\frac{2}{\varphi} - 2\alpha\varphi + 2\beta\varphi^3 - 2\gamma\varphi^5 + 2\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

$$= \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\varphi.$$

$$= \frac{2}{\varphi} + \frac{2(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2}\varphi + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}.}{1.\,2.\,3.\,4.\,2^3}\varphi^3$$
$$+ \frac{2(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.\,2\,\ldots.\,6.\,2^5}\varphi^5 + \text{etc.}$$

aus Cyklometrie, 21. Die Vergleichung der Coefficienten zu den gleichnamigen Potenzen von φ giebt

$$\alpha = -\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2}$$

$$\beta = +\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4.\,2^3}$$

$\gamma =$

$$\gamma = - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots.6.2^5}$$

$$\delta = + \frac{(2^7-1)\mathfrak{B}^{(4)}}{1.2.\ldots8.2^7}$$

etc.

Demnach iſt Sy oder

$$s = \text{Const.} + \int T\partial x - \frac{2-1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$
$$+ \frac{2^3-1}{2^3} \cdot \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$
$$- \frac{2^5-1}{2^5} \cdot \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6} \cdot \frac{\partial^5 T}{\partial x^5}$$
$$+ \text{etc.}$$

wo $y = \varphi x$ und $T = \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)$ iſt.

Dieſe Formel, in welcher die Coefficienten etwas kleiner ſind, als in der urſprünglichen, läßt ſich mit der in dem Art. Quadratur, 137. angeführten zweyten Maclaurinſchen Formel vergleichen oder iſt vielmehr mit derſelben einerley. Nach ihr wird, weil für die harmoniſche Reihe $y = \frac{1}{x}$ alſo $T = \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$, $\int T\partial x = \log\left(x + \frac{1}{2}\right)$ u. ſ. w. iſt, die Summe derſelben ſo ausgedruckt.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}$$
$$= \text{Const.} + \log\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{2-1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2(x+\frac{1}{2})^2}$$
$$- \frac{2^3-1}{2^3} \cdot \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4(x+\frac{1}{2})^4} + \frac{2^5-1}{2^5} \cdot \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6(x+\frac{1}{2})^6}$$
$$- \text{etc.}$$

oder $x - \frac{1}{2}$ ſtatt x geſetzt.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

$$= \text{Const.} + \log x + \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.\ 2x^2}$$

$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.\ 4x^4} + \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.\ 6x^6} - \text{etc.}$$

Die Conſtans iſt mit der vorigen C dieſelbe, wie ſich ſogleich ergiebt, wenn x unendlich groß geſetzt wird.

Setzt man in der letzten Formel $x - \frac{1}{2} = 10$, ſo wird

$$\text{Const.} = h - \log 21 + \log 2 - \frac{1}{1.\ 21^2}\mathfrak{B}^{(1)} + \frac{7}{2.\ 21^4}\mathfrak{B}^{(2)}$$

$$- \frac{31}{3.\ 21^6}\mathfrak{B}^{(3)} + \frac{127}{4.\ 21^8}\mathfrak{B}^{(4)} - \text{etc.}$$

Die gefundene Summirung der harmoniſchen Reihe giebt zu mehreren merkwürdigen Folgerungen Gelegenheit, wovon hier nur die Platz finden mag, welche aus dem letzten Ausdrucke ſich ergiebt.

$$\log\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{5}{2}} + \ldots + \frac{1}{x+y-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.\ 2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.\ 4}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x+y)^4}\right)$$

$$+ \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.\ 6}\left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{(x+y)^6}\right)$$

Übrigens ſehe man Euleri Institt. Calc. Diff. P. II. c. VI. §. 145.

41. Die zu ſummirende Reihe ſey die der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots+\frac{1}{x^2}.$$

Hier iſt $y=\frac{1}{x^2}$, alſo $\int y\partial x=-\frac{1}{x}$,

$\frac{\partial y}{\partial x}=-1.2\,x^{-3}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=-1.2.3.4\,x^{-5}$;

$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=-1.2.\ldots\ldots\ldots 6\,x^{-7}$; u. ſ. w. Ferner

$T=\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2}$ und $\int T\partial x=-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$; $\frac{\partial T}{\partial x}=$

$-1.2(x+\frac{1}{2})^{-3}$; $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}=-1.2.3.4(x+\frac{1}{2})^{-5}$;

etc. Alſo

$$S\frac{1}{x^2}=C-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{x^3}+\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{x^5}-\frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{x^3}+\text{etc.}$$

$$=C'-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2(x+\frac{1}{2})^3}-\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.(x+\frac{1}{2})^5}$$

$$+\frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5(x+\frac{1}{2})^7}-\text{etc.}$$

Die Conſtanten C und C′ ſind gleich, weil die eine ſowohl als die andere der Totalwerth der ins Unendliche fortgeſetzten Reihe iſt. Um ſie bequem zu beſtimmen, ſuche man die Summe der 10 erſten Glieder der Reihe durch wirkliche Addition, und ſetze ſolche h, ſo iſt h = 1, 549767731166 ...... und nun, x = 10 gemacht,

$$C=h+\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{10^3}-\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{10^5}+\frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{10^7}-\text{etc.}$$

$$=h+\frac{2}{21}-4\left\{\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{21^3}-\frac{7\mathfrak{B}^{(2)}}{21^5}+\frac{31\mathfrak{B}^{(3)}}{21^7}-\text{etc.}\right\}$$

Die ausgeführte Rechnung giebt

$$C = 1,644934066848 \ldots$$

Da die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe auch $\frac{\pi\pi}{6}$ iſt (Potenz, V. 3), ſo folgt, $C = \frac{\pi\pi}{6}$, wie es auch die wirkliche Berechnung ausweiſet. Dieſes zeigt wieder, daß das convergente Stück der Reihe für C, welche zuletzt divergent wird, ſicher zur Berechnung von C gebraucht werden kann.

42. Es ſey $y = \frac{1}{x^3}$, ſo daß

$$s = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots + \frac{1}{x^3}$$

iſt. Man hat nun $\int y \partial x = -\frac{1}{2x^2}$; $\frac{\partial y}{\partial x} = -3x^{-4}$;

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -3.4.5\,x^{-6}$; $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = -3.4\ldots.7x^{-8}$; etc.

Ferner $\int T \partial x = -\frac{1}{2(x+\frac{1}{2})^2}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = -3(x+\frac{1}{2})^{-4}$;

$\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = -3.4.5(x+\frac{1}{2})^{-6}$; $\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} = -3.4\ldots7(x+\frac{1}{2})^{-8}$;

u. ſ. w. Daher $S\frac{1}{x^3}$ oder

$$s = C - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3\mathfrak{B}^{(1)}}{2x^4} + \frac{5\mathfrak{B}^{(2)}}{2x^6} - \frac{7\mathfrak{B}^{(3)}}{2x^8} + \text{etc.}$$

$$= C' - \frac{1}{2(x+\frac{1}{2})^2} + \frac{3(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2^2(x+\frac{1}{2})^4} - \frac{5(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^4(x+\frac{1}{2})^6} + \frac{7(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^6(x+\frac{1}{2})^8} - \text{etc.}$$

wo aus demſelben Grunde wie vorhin $C' = C$ iſt.

Die Summe der erſten 10 Glieder der Reihe, durch wirkliche Addition geſucht, iſt

$$h = 1,197531985674 \ldots$$

und

$$C = 1,202056903159 \ldots$$

welches auch der Totalwerth der ins Unendliche fortlaufenden Reihe iſt.

43. Auf dieſelbe Art werden die Summen aller Reihen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen gefunden. Die Summen der geraden Potenzen ſind Potenzen deſſelben Grades von π mit einem Factor multiplicirt, der durch den Exponenten der Potenzen beſtimmt wird. Euler giebt dieſe Summen bis zu der von der 16ten Potenz in den Institt. Calc. diff. P. II. §. 151. auf 16 Decimalſtellen. In 15 Decimalſtellen berechnet ſtehen ſie bis mit zu der von der 35. Potenz in Legendre's Exercices de Calc. integr. IV. Part. §. 73., wo zugleich einige Fehler in den Euleriſchen Angaben berichtiget ſind.

44. Es ſey $y = \log x$, ſo daß
$s = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \ldots + \log x$,
ſo iſt $\int y \partial x = \int \partial x \log x = x \log x - x$ nach Integralformel, 93. Ferner $\frac{\partial y}{\partial x} = x^{-1}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 1.\,2.\,x^{-3}$; $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.\,2.\,3.\,4.\,x^{-5}$; u. ſ. w. Alſo

$$s = C + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,x} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,x^5} - \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{7.\,8.\,x^7} + \text{etc.}$$

Da die Conſtans aus dem Falle $x = 0$ nicht beſtimmt werden kann, der Fall, $x = 1$ aber wo $s = \log 1 = 0$ iſt, eine, wegen der bald eintretenden Divergenz, zur Berechnung von C nicht ſehr taugliche

Reihe giebt, ſo ſetze man $x = 10$, und $\log 1 + \log 2 + \ldots + \log 10 = \log 3628800 = h$, ſo iſt $h = 15{,}104412573075$ und

$$C = k - \frac{21}{2}\log 10 - 10 - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.10} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.10^3} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.10^5} + \text{etc.}$$

Die ausgeführte Rechnung giebt

$$C = 0{,}918938533205$$

Der Werth dieſer Conſtante läßt ſich aber auch durch einen geſchloſſenen Ausdruck darſtellen, und zwar, welches merkwürdig iſt, durch einen von der halben Peripherie π zum Halbmeſſer 1 abhängigen. Da nämlich, wie Wallis gefunden hat,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6.\,8.\,8.\,10.\,10.\,12.\ \text{etc.}}{1.\,3.\,3.\,5.\,5.\,7.\,7.\,9.\,9.\,11.\,11.\ \text{etc.}},$$

ſo iſt wenn man im Nenner mit einem ganzen Paar Factoren $(2x-1)^2$ abbricht, und x unendlich groß ſetzt,

$$\log\pi - \log 2 = 2\left\{\log 2 - \log 1 + \log 4 - \log 3 + \log 6 - \log 5 + \ldots + \log 2x - \log(2x-1)\right\} - \log 2x$$

Für ein unendlich großes x aber iſt nach der Formel

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log x = C + (x + \tfrac{1}{2})\log x - x$$

alſo $2x$ ſtatt x geſetzt

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log 2x = C + (2x + \tfrac{1}{2})\log 2x - 2x$$

und $\log 2 + \log 4 + \log 6 + \ldots + \log 2x$

$$= x\log 2 + \log 1 + \log 2 + \ldots + \log x$$
$$= C + x\log 2x + \tfrac{1}{2}\log x - x$$

mithin, wenn man die letzte Reihe von der vorletzten abzieht,

$$\log 1 + \log 3 + \log 5 + \ldots\ldots + \log(2x - 1)$$
$$= (x + \tfrac{1}{2}) \log 2x - \tfrac{1}{2} \log x - x$$

und dieſe Reihe wieder von der letzten ſubtrahirt

$$\log 2 - \log 1 + \log 4 - \log 3 + \log 6 - \log 5 + \ldots$$
$$+ \log 2x - \log(2x - 1) = C - \tfrac{1}{2} \log 2x + \log x$$

Dadurch wird

$$2C - 2\log 2x + 2\log x = \log \frac{\pi}{2}$$

d. i.
$$2C - \log 4 = \log \frac{\pi}{2}$$

alſo
$$2C = \log 2\pi$$

und
$$C = \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Hierdurch iſt alſo

$$s = \frac{1}{2} \log 2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) \log x - x + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.x}$$
$$- \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.x^5} - \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{7.8.x^7} + \text{etc.}$$

45. Da in dem vorigen Beyſpiele $y = \log x$, ſo wird $T = \log(x + \frac{1}{2})$, $\int T \partial x = \int \partial x \log(x + \frac{1}{2})$ $x \log(x + \frac{1}{2}) - x + \frac{1}{2} \log(x + \frac{1}{2})$. Man erhält für dieſes Integral, wenn man $x + \frac{1}{2}$ ſtatt x in $\int y \partial x$ ſchreibt $(x + \frac{1}{2}) \log(x + \frac{1}{2}) - (x + \frac{1}{2})$, welches mit dem vorigen auf eins hinauskommt, weil der Unterſchied von $\frac{1}{2}$ mit zur Conſtans gezogen werden kann. Ferner iſt $\frac{\partial T}{\partial x} =$ $(x + \frac{1}{2})^{-1}$; $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = 1.2\,(x + \frac{1}{2})^{-3}$; $\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} =$ $1.2.3.4\,(x + \frac{1}{2})^{-5}$; etc. Folglich

$$s = C' + (x+\tfrac{1}{2})\log(x+\tfrac{1}{2}) - (x+\tfrac{1}{2})$$
$$- \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.1.2.(x+\frac{1}{2})} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.3.4(x+\frac{1}{2})^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.5.6(x+\frac{1}{2})^5}$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Conſtante hier, C', iſt mit der vorigen C einerley, wie theils die unmittelbare Berechnung aus dem Falle $x=10$ lehrt, theils ſo erhellt. Man ſetze $x=\frac{1}{2}$, ſo wird, da nach (Einſchaltung, 51) das in der Reihe

Stellenzahlen	0,	1,	2,	3,	4,	u. ſ. w.
Glieder	1,	1,	1.2.	1.2.3.	1.2.3.4	u. ſ. w.

der Stelle $\frac{1}{2}$ angehörige Glied $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, iſt, $s =$

$\frac{1}{2}\log\pi - \log 2 = \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{3}{2}\log 2$; daher

$$C - \frac{3}{2}\log 2 = C' - 1 - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.1.2} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.3.4}$$
$$- \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.5.6} + \text{etc.}$$

Setzt man in (44) ſtatt C ſeinen aus dem Falle $x=1$ gefundenen Werth, welcher iſt

$$C = 1 - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6} + \text{etc.}$$

ſo wird

$$s = (x+\tfrac{1}{2})\log x - (x-1) - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}.\frac{x-1}{x}$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4}.\frac{x^3-1}{x^3} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6}.\frac{x^5-1}{x^5} + \text{etc.}$$

und nun $x=2$ gemacht, wo $s = \log 1 + \log 2 = \log 2$ iſt,

$$\log 2 = \frac{5}{2}\log 2 - 1 - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.2^3}$$
$$- \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.2^5} + \text{etc.}$$

d. i.

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2} - \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,2^3} + \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,2^5} + \text{etc.}$$

Dieſer Werth von $\frac{3}{2}\log 2$ giebt, in die Gleichung zwiſchen C und C′ gebracht,

$$C = C'$$

Alſo iſt

$$s = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{2}\right) - \left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2(x+\frac{1}{2})} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.2^3(x+\frac{1}{2})^3} - \text{etc.}$$

oder $x-\frac{1}{2}$ ſtatt x geſetzt

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \ldots + \log\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + x\log x - x - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2x} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,(2x)^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,(2x)^5} + \text{etc.}$$

46. Die gefundenen Formeln für die Summe einer Anzahl von Logarithmen der natürlichen Zahlen gelten für hyperboliſche oder natürliche Logarithmen. Wird die Summe derſelben Anzahl gewöhnlicher oder Briggiſcher Logarithmen verlangt, ſo ſind die gefundenen Ausdrücke noch auf beiden Seiten mit dem Modulus der gewöhnlichen Logarithmen
$k = 0,43429448190325 \ldots.$ zu multipliciren. Dadurch verwandeln ſich in dem Summenausdrucke

$\frac{1}{2}\log 2\pi$, $x \log x$, u. ſ. w. in $\frac{1}{2}$ log. vulg. 2π; x log. vulg. x; u. ſ. w., die übrigen Glieder aber wie x, $\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2x}$, $\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2x}$, u. ſ. w. bekommen noch den Factor k.

So wird nach der letzten Formel die Summe s der erſten 500 gewöhnlichen Logarithmen

$$= \frac{1}{2}\text{log. vulg. } 2\pi + \frac{1001}{2}(\text{log. vulg. } 1001 - \text{log. vulg. } 2)$$

$$- \frac{1001}{2}k$$

$$- k\left\{\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.1001} - \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.1001^3} + \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.1001^5} - \text{etc.}\right\}$$

$\frac{1}{2}$ log. vulg. 2π = 0,39908 99341 7906

$\frac{1001}{2}$(log. v. 1001 — log. v. 2)

= 1351,05174 29485 7639

Summe = 1351,45083 28827 5545 = O

$\frac{1001}{2}k$ = 217,36438 81925 7754

$+ \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.1001}k$ = + 0,00003 61550 5177

217,36442 43476 2931

$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.1001^3}k$ = — 0,00000 00000 0842

Reſt = 217,36442 43476 2089 = P

S = O — P = 1134,08640 85351 3456

Moivre hat, als ihm die Summenformel noch nicht bekannt war, dieſe Summe durch wirkliche Ad=

dition geſucht, und ſolche = 1134,0864179378 3508 gefunden, Miscell. analyt. p. 104. Es müſſen aber beträchtliche Rechnungsfehler vorgefallen ſeyn. Denn ſchon die Summe der erſten 10 Logarithmen iſt in der 5ten Decimalſtelle, wo eine 7 ſtatt 6 ſteht, fehlerhaft. Nachher hat Moivre ſelbſt die erſte Summenformel, nämlich die in (44) hier, in dem Suppl. ad miscell anal. bekannt gemacht. Die zweyte Formel in (45) giebt Stirling, Method. diff. Prop. XXVIII., welcher auch zuerſt bemerkt hat, daß der Werth der Conſtante

C oder $C' = \frac{1}{2}\log 2\pi$ iſt.

47. Wenn x unendlich groß genommen wird, ſo folgt aus der erſten Summenformel

$$\log(1.2.3.4\ldots x) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x$$

d. i.

$$= \log.\sqrt{2\pi} + \log x^{x+\frac{1}{2}} - \log e^{x}$$

alſo, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen zurückgeht,

$$1.2.3.4\ldots\ldots x = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^{x}}.\sqrt{2\pi}.$$

Das Ergebniß, welches die zweyte Formel für ein unendlich großes x liefert,

$$1.2.3\ldots\ldots x = \frac{(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}}}{e^{x+\frac{1}{2}}}\sqrt{2\pi}.$$

iſt von dem vorigen nicht verſchieden, da $(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}} = x^{x+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$, und für ein unendlich großes i iſt $\left(1+\frac{z}{i}\right)^{i} = e^{z}$, wodurch $\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$, mithin $(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}} = x^{x+\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{2}}$ wird.

Von dieſer Formel iſt in dem Art., Summirbare Reihe, 25. Gebrauch gemacht.

Aus der gefundenen Formel folgt

$$1.2.3.\ldots(x+z) = \frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{e^{x+z}}.\sqrt{2\pi}$$

alſo dieſe Formel durch jene dividirt,

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+z) = \frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{e^{z}.x^{x+\frac{1}{2}}}$$

und wenn man hier mit $1.2.3\ldots z = \frac{z^{z+\frac{1}{2}}}{e^{z}}\sqrt{2\pi}$

dividirt, wo z gleichfalls unendlich groß iſt,

$$\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+z)}{1.\quad 2.\ldots\ldots z} = \frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{x^{x+\frac{1}{2}}z^{z+\frac{1}{2}}.\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{(x+z)^{x+z}}{x^{x}z^{z}}.\sqrt{\frac{x+z}{2\pi xz}}$$

und, $x+z=w$ geſetzt, wodurch $x+1=w-z+1$ wird,

$$\frac{w(w-1)(w-2).(w-z+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots z} = \frac{w^{w}}{(w-z)^{w-z}.z^{z}}\sqrt{\frac{w}{2\pi z(z-w)}}$$

Das iſt ein Näherungsausdruck für einen weit vom Anfange oder vom Ende der Entwickelung entfernten Binomialcoefficienten, deſſen Stelle durch z angegeben wird, in einer ſehr hohen Potenz.

Wenn $w=2n$, $z=n$ iſt, ſo wird

$$\frac{2n.2n-1\ldots\ldots n+1}{1.\quad 2.\ldots\ldots n} = \frac{(2n)^{2n}}{n^{n}.n^{n}}.\sqrt{\frac{2n}{2\pi nn}}$$

$$= 2^{2n}.\sqrt{\frac{2}{2n\pi}}.$$

Dieß iſt die größere Gränze für den mittleren Coefficienten in der Potenz 2n. Man ſ. Binomial-

coefficienten, 16. Wir werden aber ſogleich Mittel finden, dieſen Coefficienten genauer zu beſtimmen.

48. Es ſey $X = \varphi(x)$; $X' = \varphi(x+1)$; $X'' = \varphi(x+2)$; u. ſ. w. Man ſoll die Summe der unendlichen Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder

$$X - X' + X'' - X''' + X^{v} - \text{etc.}$$

beſtimmen.

Es bezeichne S dieſe Summe, welche alſo eine Function von $x = \psi x$ ſeyn wird, ſo daß

$$X - X' + X'' - X''' + X^{IV} - \text{etc.} = S$$

iſt. Setzt man nun überall $x+1$ ſtatt x, ſo wird

$$X' - X'' + X''' - X^{IV} + X^{v} - \text{etc.} = S = \psi(x+1)$$

alſo

$$S + S' = X.$$

Nach dem Taylorſchen Lehrſatze iſt

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

mithin

$$2S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.} = X$$

Hieraus iſt näherungsweiſe zuerſt $S = \frac{1}{2}X$.

Genauer noch $S = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}.\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.\frac{\partial X}{\partial x}$.

Man ſetze alſo

$$S = \frac{1}{2}X + \alpha.\frac{\partial X}{\partial x} + \beta.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \gamma.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

Da die Coefficienten α, β, γ... zu den Differential-quotienten beſtimmte Zahlen ſind, deren Werth ſich nicht ändert, die Function X mag ſeyn, welche ſie will, ſo kann man zur Beſtimmung derſelben jede be-liebige Function von x für X wählen. Es ſey

$X = e^{mx}$, ſo iſt $X' = e^{m(x+1)}$; $X'' = e^{m(x+2)}$; $X''' = e^{m(x+3)}$; etc. alſo

$$S = e^{mx} - e^{mx+m} + e^{mx+2m} - e^{mx+3m} + \text{etc.}$$
$$= e^{mx}(1 - e^{m} + e^{2m} - e^{3m} + \text{etc.})$$
$$= \frac{e^{mx}}{1+e^{m}}.$$

Da nun $\frac{\partial X}{\partial x} = m \,.\, e^{mx}$; $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = m^2 \,.\, e^{mx}$; $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = m^3 \,.\, e^{mx}$; u. ſ. w. iſt, ſo wird

$$\frac{e^{mx}}{1+e^{m}} = e^{mx}\left(\frac{1}{2} + \alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \text{etc.}\right)$$

alſo

$$\frac{1}{1+e^{m}} = \frac{1}{2} + \alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \text{etc.}$$

Man verwandele hier m in $-m$, ſo iſt

$$\frac{1}{1+e^{-m}} = \frac{e^{m}}{1+e^{m}} = \frac{1}{2} - \alpha m + \beta m^2 - \gamma m^3 + \text{etc.}$$

folglich, beide Reihen addirt,

$$1 = \frac{1+e^{m}}{1+e^{m}} = 1 + 2\beta m^2 + 2\delta m^4 + 2\zeta m^6 + \text{etc.}$$

oder

$$0 = \beta m^2 + \delta m^4 + \zeta m^6 + \vartheta m^8 + \text{etc.}$$

Hieraus folgt, wegen der unbeſtimmten m, $\beta = 0$; $\delta = 0$; $\zeta = 0$; $\vartheta = 0$; etc. ſo daß die ſämmtlichen Coefficienten der geraden Potenzen von $m = 0$ ſind. Man ſetze daher

$$\frac{1}{1+e^{m}} = \frac{1}{2} + Am + Bm^3 + Cm^5 + Dm^7 + \text{etc.}$$

ſo daß

$$S = \frac{1}{2}X + A.\frac{\partial X}{\partial x} + B.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + C.\frac{\partial^5 X}{\partial x^5} + \text{etc.}$$

iſt, ſo wird

$$\frac{2}{1+e^m} = 1 + 2Am + 2Bm^3 + 2Cm^5 + \text{etc.}$$

und

$$\frac{1-e^m}{1+e^m} = 2Am + 2Bm^3 + 2Cm^5 + 2Dm^7 + \text{etc.}$$

alſo $m = 2\varphi\sqrt{-1}$ gemacht

$$\frac{1-e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{1+e^{2\varphi\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}.\left\{2^2.A\varphi - 2^4.B\varphi^3 + 2^6.C\varphi^5 - 2^8.D\varphi^7 + \text{etc.}\right\}$$

und

$$\frac{e^{2\varphi\sqrt{-1}}-1}{(e^{2\varphi\sqrt{-1}}+1)\sqrt{-1}} = \text{tang}\,\varphi = -2^2.A\varphi + 2^4.B\varphi^3 - 2^6.C\varphi^5 + \text{etc.}$$

Nun iſt (Cyklometrie, 17.)

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2}\varphi + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\,2.\,3.\,4}\varphi^3 + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.\,2.\ldots.\,6}\varphi^5 + \text{etc.}$$

Mithin $A = -\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2}$; $B = +\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\,2.\,3.\,4}$;

$C = -\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.\,2.\ldots.\,6}$; $D = +\frac{(2^8-1)\mathfrak{B}^{(4)}}{1.\,2.\ldots.\,8}$; etc.

und

$$S = \frac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2}.\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\,2.\,3.\,4}.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.\,2.\ldots.\,6}.\frac{\partial^5 X}{\partial x^5} + \text{etc.}$$

Euler bringt dieſe Formel auf einem etwas weitläufigeren Wege heraus, Nou. Act. Petrop. T. II. Übrigens iſt zu bemerken, daß nach ihr nur in dem Falle, wo $X^{(\infty)}$; $X^{(\infty+1)}$; $X^{(\infty+2)}$ u. ſ. w. ſämmtlich verſchwinden, die wahre arithmetiſche Summe erhalten wird, in jedem anderen Falle iſt die Summe bloß eine analytiſche. Dieſes erhellt aus der Art, wie die Gleichung

$$S + S' = X$$

gefunden worden.

49. Es ſey $X = x^3$, ſo iſt $\frac{\partial X}{\partial x} = 3x^2$,

$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = 3.2.1$, $\frac{\partial^5 X}{\partial x^5} = 0$; etc. Daher

$$x^3 - (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+3)^3 + (x+4)^3 - \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}x^3 - 3.\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2}x^2 + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4}.$$

alſo $x = 0$ gemacht, und auf beiden Seiten das Entgegengeſetzte genommen

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \text{etc. in inf.} = -\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4}.$$

So laſſen ſich die Summen aller Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen finden. Umgekehrt, werden dieſe Summen als bekannt vorausgeſetzt, ſo ergiebt ſich die Formel leicht durch wiederholte Anwendung des Taylorſchen Lehrſatzes wie die in (27).

Setzt man in der erhaltenen Summirung

$$x^3 - (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+3)^3 + \text{etc. in inf.}$$

$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}$$

$x = \frac{1}{2}$, und multiplicirt mit 2^3 auf beiden Seiten,

ſo

ſo wird

$$1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc. in inf.} = 0$$

wie bekannt.

Hier zeigt ſich nun auch ein Mittel, wenn $\sec\varphi$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1.2}\varphi^2 + \frac{\beta}{1.2.3.4}\varphi^4 + \frac{\gamma}{1.2.3.4.5.6}\varphi^4 + \text{etc.}\ldots$$

geſetzt wird, die Größen α, β, γ durch die Bernoul-liſchen Zahlen lineariſch auszudrucken. Sucht man z. B. $1^4 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 -$ etc. auf die vorige Art, ſo erhält man, da dieſe Summe auch $= \frac{1}{2}\beta$ iſt

$$\frac{\beta}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{2^2}{1.2.3} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{2^4}{1}.$$

Aus $1^6 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - \text{etc.} = -\frac{1}{2}\gamma$ aber wird

$$\frac{\gamma}{1.2.3..6} = -\left\{ \frac{1}{1.2\ldots6} - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2} \cdot \frac{2^2}{1.2.3.4.5} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{2^4}{1.2.3} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots\ldots6} \cdot \frac{2^6}{1} \right\}$$

welche Formeln leicht verallgemeinert werden können, und ſich auch mittels der Gleichung $\sec\varphi = \cos\varphi + \operatorname{tang}\varphi \cdot \sin\varphi$ ergeben, wenn ſtatt $\cos\varphi$, $\operatorname{tang}\varphi$, $\sin\varphi$, ihre Entwickelungen in Reihen geſetzt werden.

50. Die Summe der Reihe

$$X - X' + X'' - X''' + X^{\text{IV}} - \text{etc.}$$

läßt ſich auch noch auf eine andere Art ausdrucken.

Wenn nämlich dieſe Summe wie vorhin S heißt, wo $S = \psi x$, ſo ſey $T = \psi\left(x + \frac{1}{2}\right)$, ſo daß $S = \psi\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$ aus T entſteht, wenn ſtatt x geſetzt wird $x - \frac{1}{2}$. Da nun $S' = \psi(x+1) = \psi\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$, ſo wird S′ aus T, wenn $x + \frac{1}{2}$ ſtatt x geſetzt wird. Der Taylorſche Satz giebt

$$S = T - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{1.2\,\partial x^2} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\partial^3 T}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$S' = T + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{1.2\,\partial x^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\partial^3 T}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

alſo iſt

$$S + S' = 2T + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 T}{1.2\,\partial x^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\partial^4 T}{1.2.3.4\,\partial x^4} + \text{etc.}$$
$$= X.$$

wo T durch eine Reihe ausgedruckt wird, deren Anfang offenbar $\frac{1}{2}X - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\partial^2 X}{1.2\,\partial x^2}$ iſt.

Man ſetze alſo

$$T = \frac{1}{2}X + \frac{A}{2^2} \cdot \frac{\partial^2 X}{1.2\,\partial x^2} + \frac{B}{2^4} \cdot \frac{\partial^4 X}{1.2.3.4\,\partial x^3} + \frac{C}{2^6} \cdot \frac{\partial^6 X}{1.2\ldots 6\,\partial x^6} + \text{etc.}$$

und um die Coefficienten A, B, C, u. ſ. w. zu beſtimmen, nach der ſchon gebrauchten Art, $X = e^{2mx}$,

ſo iſt $\frac{\partial X}{\partial x} = 2m.e^{2mx}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 2^2.m^2.e^{2mx}$, $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} =$ $2^4.m^4.e^{2mx}$, etc.; alſo

$$T = e^{2mx}\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{1.2}m^2 + \frac{B}{1.2.3.4}m^4 + \frac{C}{1.2.....6}m^6 + \text{etc.}\right)$$

Nun iſt S, wie vorhin, $= \frac{e^{2mx}}{1+e^{2m}}$, alſo

$T = \frac{e^{2mx+m}}{1+e^{2m}}$, mithin

$$\frac{2e^m}{1+e^{2m}} = \frac{2}{e^m+e^{-m}} = 1 + \frac{2A}{1.2}m^2 + \frac{2B}{1.2.3.4}m^4 + \frac{2C}{1.2.....6}m^6 + \text{etc.}$$

Nimmt man hier $m = \varphi\sqrt{-1}$, ſo wird $\frac{2}{e^m+e^{-m}}$

$$= \frac{2}{e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}} = \frac{1}{(e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}):2}$$

$= \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$. Setzt man alſo $\sec\varphi$, wie vorhin;

$$= 1 + \frac{\alpha}{1.2}\varphi^2 + \frac{\beta}{1.2.3.4}\varphi^4 + \frac{\gamma}{1.2....6}\varphi^6 + \text{etc.}$$

ſo wird, weil aus der vorigen Gleichung,

$$\sec\varphi = 1 - \frac{2A}{1.2}\varphi^2 + \frac{2B}{1.2.3.4}\varphi^4 - \frac{2C}{1.2.....6}\varphi^6 + \text{etc.}$$

iſt, durch Vergleichung der Coefficienten zu den gleichnamigen Potenzen von φ, $A = -\frac{1}{2}\alpha$; $B = \frac{1}{2}\beta$;

$C = -\frac{1}{2}\gamma$; $D = +\frac{1}{2}\delta$; etc. wo das Geſetz für die Zahlen α, β, γ.... aus dem vorhergehenden bekannt iſt.

Demnach iſt

$$T = \frac{1}{2}X - \frac{\alpha}{2^3}\cdot\frac{\partial^2 X}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\beta}{2^5}\cdot\frac{\partial^4 X}{1.2.3.4\,\partial x^4} - \frac{\gamma}{2^7}\cdot\frac{\partial^6 X}{1.2.....6\partial x^6} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}X - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{\partial^2 X}{1.2\,\partial x^2} + \frac{5}{2^5}\cdot\frac{\partial^4 X}{1.2.3.4\,\partial x^4} - \frac{61}{2^7}\cdot\frac{\partial^6 X}{1.2....6\partial x^6} + \frac{1385}{2^9}\cdot\frac{\partial^8 X}{1.2.....8\partial x^8} - \text{etc.}$$

woraus alsdenn S leicht gefunden wird. Euler giebt dieſe Formel ebenfalls a. a. O. Zugleich erhellt, daß wenn $Y = \varphi(x+\frac{1}{2})$, alſo $Y' = \varphi(x+\frac{3}{2})$, $Y''' = \varphi(x+\frac{5}{2})$ u. ſ. w. iſt, die Summe der Reihe

$$Y - Y' + Y'' - Y''' + \text{etc. in inf.}$$

ſey

$$\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{\partial^2 Y}{1.2\,\partial x^2} + \frac{5}{2^3}\cdot\frac{\partial^4 Y}{1.2.3.4\,\partial x^4} - \frac{61}{2^5}\cdot\frac{\partial^6 Y}{1.2.....6\partial x^4} + \text{etc.}$$

51. Exempel. Es ſey $X = x^4$, ſo iſt $\frac{\partial X}{\partial x} = 4x^3$; $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 4.3\,x^2$; $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = 4.3.2.1$; $\frac{\partial^6 X}{\partial x^6} = 0$; etc. Daher

$$T = \frac{1}{2}x^4 - \frac{\alpha}{2^3}\cdot\frac{4.3}{1.2}x^2 + \frac{\beta}{2^5}\cdot\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}.$$

Alſo

$$x^4-(x+1)^4+(x+2)^4-(x+3)^4+(x+4)^4-\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{\alpha}{2^3}\cdot\frac{4.3}{1.2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\beta}{2^5}.$$

und nun $x=\frac{1}{2}$ gemacht

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{5}{2}\right)^4-\left(\frac{7}{2}\right)^4-\left(\frac{9}{2}\right)^4$$

$$-\text{etc.}=\frac{\beta}{2^5}$$

folglich

$$1^4-3^4+5^4-7^4+9^4-\text{etc.}=\frac{1}{2}\beta.$$

52. Es darf wohl kaum angemerkt werden, daß weder die eine noch die andere der beiden Summirungsformeln in (48) und (50) abbricht, wenn X keine rationale ganze Function von x iſt, ſondern in dieſem Falle nur eine Umbildung der vorgegebenen Reihe darbietet, die aber wegen ſchnellerer Convergenz an den Totalwerth zur Berechnung deſſelben den Vorzug vor der urſprünglichen Reihe haben kann.

Dieſes iſt der Fall in dem folgenden Beyſpiele.

Es ſey $X=\frac{1}{x}=x^{-1}$, ſo iſt $\frac{\partial X}{\partial x}=-1.x^{-2}$;

$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=1.2x^{-3}$; $\frac{\partial^3 X}{\partial x3}=-1.2.3x^{-4}$; $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}=$ $1.2.3.4x^{-5}$; etc. alſo nach der erſten Formel

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{1}{2x}+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2x^2}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4x^4}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{6x^6}$$

$$-\text{etc.}$$

Nimmt man hier zuerſt $x = 1$, ſo wird, weil

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.} = \log 2 \text{ iſt,}$$

$$\log 2 = \frac{1}{2} + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{6} + \text{etc.}$$

Macht man aber $x = \frac{m}{n}$, ſo wird

$$\frac{n}{m} - \frac{n}{m+n} + \frac{n}{m+2n} - \frac{n}{m+3n} + \text{etc.}$$

$$= \frac{n}{2m} + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2} \cdot \frac{n^2}{m^2} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4} \cdot \frac{n^4}{m^4} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{6} \cdot \frac{n^6}{m^6} - \text{etc.}$$

oder wenn man je zwey nächſte Glieder der erſten Reihe zuſammenzieht, und alles mit n^2 dividirt,

$$\frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{(m+2n)(m+3n)} + \frac{1}{(m+4n)(m+5n)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2mn} + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2} \cdot \frac{1}{m^2} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4} \cdot \frac{n^2}{m^4} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{6} \cdot \frac{n^4}{m^6} - \text{etc.}$$

Wenn m hier mäßig groß gegen n iſt, ſo reichen wenige Glieder der letzten Reihe hin, eine ſtarke Annäherung an den Totalwerth zu erhalten, welcher aus der urſprünglichen Reihe, weil die Glieder ſich beynahe gleich bleiben, nur ſehr mühſam gefunden werden würde.

Man ſetze $n = 2$, ſo wird, nachdem man alles mit 2 dividirt hat, aus der vorletzten Formel

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+4}-\frac{1}{m+6}+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{2m}+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1}\cdot\frac{1}{m^2}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2}\cdot\frac{2^2}{m^4}$$
$$+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{3}\cdot\frac{2^4}{m^6}-\text{etc.}$$

Dieſes dient den Werth von $\frac{1}{4}\pi$ vermittelſt der Leibnitziſchen Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ etc. doch auf viele Decimalſtellen genau zu berechnen. Man ſuche nämlich die Summe einer beliebigen Anzahl Glieder der Reihe vom Anfange an

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots\pm\frac{1}{m-2}$$

auf die gemeine Art, ſo iſt das noch fehlende Stück der Reihe $=\mp\left(\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m^2}-\frac{1}{m^4}+\frac{8}{m^6}-\frac{17.8}{m^8}\right.$
$$\left.+\frac{31.128}{m^{10}}-\frac{691.256}{m^{12}}+\text{etc.}\right)$$

Wolfram, der großen Gefallen am Rechnen fand, hat nach dieſer Vorſchrift, welche Maclaurin, Treatise of fluxions, §. 845. (aber mit einem Fehler in dem numeriſchen Zähler des 5ten Gliedes) giebt, $\frac{1}{4}\pi$ geſucht. Die Hauptreſultate ſeiner Berechnung finden ſich in Lamberts Briefwechſel, B. IV., S. 455 und 481. Daß man eben ſo die transformirte der urſprünglichen Reihe $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-$ etc. gebrauchen könne, um mittels der Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

+ etc. den log. 2. in mehreren Decimalſtellen genau zu berechnen, iſt von ſelbſt klar. Auch erhellt aus dem obigen, daß Newton die Ergänzung eines Stücks der Leibnitziſchen Reihe ſehr richtig geſchätzt hat, in dem zweyten Schreiben an Oldenburg, Opusc. Tom. I. p. 345.

Nach der zweyten Summenformel iſt

$$T = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^3.x^3} + \frac{5}{2^5.x^5} - \frac{61}{2^7.x^7} + \text{etc.}$$

alſo $x - \frac{1}{2}$ ſtatt x geſetzt

$$S = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} - \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^3} + \frac{5}{(2x-1)^5} - \frac{61}{(2x-1)^7} + \text{etc.}$$

Hieraus folgt auf ähnliche Art wie vorhin

$$\frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{(m+2n)(m+3n)} + \frac{1}{(m+4n)(m+5n)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{(2m-n)n} - \frac{n}{(2m-n)^3} + \frac{5n^3}{(2m-n)^5} - \frac{61n^5}{(2m-n)^5} + \frac{1385n^7}{(2m-n)^7} - \text{etc.}$$

Für $m = 101$, $n = 3$ geben die vier erſten Glieder der ſummatoriſchen Reihe die Summe von

$$\frac{1}{101.104} + \frac{1}{107.110} + \frac{1}{113.116} + \text{etc. in inf.}$$

= 0,001674661626...., welche nach der vorigen ſummatoriſchen Reihe gleichfalls durch die vier erſten Glieder = 0,001674661625.... gefunden wird. In Schraders oben (38) angeführter Schrift iſt dieſe Summe §. 11. nach einer anderen Umwandelungsfor-

mel durch mehr als doppelt ſo viele Glieder bey weitem nicht ſo genau gefunden worden.

Aus dem Werthe von T folgt unmittelbar

$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{1}{x+\frac{5}{2}}-\frac{1}{x+\frac{7}{2}}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^3.x^3}+\frac{5}{2^5.x^5}-\frac{61}{2^7.x^7}+\text{etc.}$$

alſo

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}+\frac{1}{2x+5}-\frac{1}{2x+7}+\text{etc.}\ldots$$

$$=\frac{1}{4x}-\frac{1}{16x^3}+\frac{5}{64x^5}-\frac{61}{256x^7}+\frac{1385}{1024x^9}+\text{etc.}$$

welche Reihe ebenfalls dient, die Ergänzung eines Stücks der Leibnitziſchen Reihe für $\frac{1}{4}\pi$ zu berechnen.

53. Es ſey $X=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$, ſo iſt $\frac{\partial X}{\partial x}= -2x^{-3}$; $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=+2.3x^{-4}$, $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}=-2.3.4x^{-5}$; $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}=+2.3.4.5x^{-6}$; etc.

Daher

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}+\text{etc.}\ldots$$

$$=\frac{1}{2x^2}+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{x^3}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{x^5}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{x^7}$$

$$-\frac{(2^8-1)\mathfrak{B}^{(4)}}{x^8}+\text{etc.}$$

Alſo, wenn man $x=1$ macht

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\text{etc.}=\frac{1}{2}+(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}$$
$$-(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}+(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}-\text{etc.}$$

Zur Berechnung der Summe der Reihe $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\text{etc.}$ iſt dieſe Reihe gar nicht brauchbar. Da aber jene Summen anderswoher bekannt und $=\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\pi^2$ iſt, ſo hat man die Summe der ſehr divergirenden Reihe

$$\frac{1}{2}+(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}-(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}+(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}-\text{etc.}$$
$$=\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\pi^2.$$

Wollte man die Summe der Reihe $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\text{etc.}$ durch wirkliche Berechnung finden, ſo müßte man zuerſt das Aggregat einer etwas großen Anzahl Glieder auf die gewöhnliche Art ſuchen, und dann die Ergänzung nach der obigen Formel berechnen. Ein gleiches gilt von der Reihe $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\text{etc.}$

Nach der zweyten Formel wird

$$T=\frac{1}{2x^2}-\frac{3\alpha}{2^3.x^4}+\frac{5\beta}{2^5.x^6}-\frac{7\gamma}{2^7.x^8}+\text{etc.}$$

wo $\alpha=1$, $\beta=5$, $\gamma=61$, $\delta=1385$, $\varepsilon=50521$, u. ſ. w. iſt.

alſo $x - \frac{1}{2}$ ſtatt x geſetzt, S, d. i.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} + \text{etc.}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{(2x-1)^2} - \frac{3\alpha}{(2x-1)^4} + \frac{5\beta}{(2x-1)^6} - \frac{7\gamma}{(2x-1)^8} + \text{etc.}\right\}$$

Ferner unmittelbar aus dem Werthe von T

$$\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} - \frac{1}{(2x+7)^2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(2x)^2} - \frac{3\alpha}{(2x)^4} + \frac{5\beta}{(2x)^6} - \frac{7\gamma}{(2x)^8} + \text{etc.}\right\}$$

54. Es ſey $X = \log x$, ſo iſt $\frac{\partial X}{\partial x} = x^{-1}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -1x^{-2}$; $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = +1.2x^{-3}$; $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = -1.2.3x^{-4}$; $\frac{\partial^5 X}{\partial x^5} = +1.2.3.4x^{-5}$; etc.

alſo $S = \log x - \log(x+1) + \log(x+2) - \log(x+4) + \log(x+5) - \text{etc. in inf.}$ d. i.

$$\log \frac{x(x+2)(x+4)(x+6)\ldots\ldots \text{etc.}}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)\ldots\ldots \text{etc.}} = \frac{1}{2}\log x$$
$$- \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2x} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4x^3} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6x^5} + \text{etc.}$$

Ferner $T = \frac{1}{2}\log x + \frac{\alpha}{2^3.2x^2} - \frac{\beta}{2^5.4x^4} + \frac{\gamma}{2^7.6x^6} - \frac{\delta}{2^9.8x^8} + \text{etc.}$

mithin, $x - \frac{1}{2}$ ſtatt x geſetzt,

$$\log \frac{x(x+2)(x+4)(x+6)\,..\ \text{etc.}}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)\,..\ \text{etc.}} = \frac{1}{2}\log(x-\frac{1}{2}) + \frac{\alpha}{4(2x-1)^2} - \frac{\beta}{8(2x-1)^4} + \frac{\gamma}{12(2x-1)^6} - \frac{\delta}{16(2x-1)^8} + \text{etc.}$$

Dieſe Formeln dienen den mittelſten Coefficienten in $(a+b)^{2n}$, wenn n ſehr groß iſt, zu finden.

Man ſetze nämlich $x = 2n + 1$, ſo giebt die erſte Formel

$$\log \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\,..\ \text{etc.}}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)\,..\ \text{etc.}} = \frac{1}{2}\log(2n+1) - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.(2n+1)} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.(2n+1)^3} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.(2n+1)^5} + \text{etc.}$$

Nun iſt nach Walliſens in (44) angeführtem Ausdrucke

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2.4.6.8\,..\,2n}{1.3.5.7\,..\,2n-1} \times \frac{(2n+2)(2n+4)(2n+6)\,..\ \text{etc.}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\,..\ \text{etc.}}$$

alſo (Binomial=Coefficienten, 13.)

$$\frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = \frac{2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ 2n}{1.\ 3.\ 5.\ \ldots\ 2n-1} = \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ \text{etc.}}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)\ \text{etc.}} . \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

und

$$\log \frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = \frac{1}{2}\log\frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.(2n+1)} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.(2n+1)^3} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.(2n+1)^5} + \text{etc.}$$

wo die Logarithmen natürliche ſind. Folglich, wenn man den Modulus des gewöhnlichen Syſtems, 0,434294481903 25 durch k bezeichnet

$$\log.\text{vulg.}\,\frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = \frac{1}{2}\log.\text{vulg.}\,\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$-\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.}\cdot\frac{k}{2n+1} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4.}\cdot\frac{k}{(2n+1)^3}$$

$$-\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6.}\cdot\frac{k}{(2n+1)^5} + \text{etc.}$$

Dieſe Formel gewährt eine etwas ſchnellere Annäherung als die Euleriſche, Institt. calc. diff. §. 160. Die numeriſchen Coefficienten ſind dieſelben.

Exempel. $2n = 100$.

$$\log.\text{vulg.}\,\frac{2^{100}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = \frac{1}{2}\log.\text{vulg.}\,\frac{101\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{k}{101}$$

$$+\frac{1}{24}\cdot\frac{k}{101^3} - \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
\log 101 &= 2{,}0043213738\\
\log \pi &= 0{,}4971498726\\
\log \tfrac{1}{2} &= 9{,}6989700043\\
\hline
\log \frac{101\pi}{2} &= 2{,}2004412507\\
\hline
\frac{1}{2}\log\frac{101\pi}{2} &= 1{,}1002206253\\
-\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{101} &= -\,0{,}0010749863\\
\hline
 & \ 1{,}0991456390\\
+\frac{1}{24}\cdot\frac{k}{101^3} &= +\,0{,}0000000176\\
\hline
\log\frac{2^{100}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} &= 1{,}0991456566
\end{aligned}$$

Nach der zweyten Formel wird auf eben die Art

$$\log \frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = \frac{1}{2} \log \frac{(4n+1)\pi}{4} + \frac{\alpha}{4(4n+1)^2} - \frac{\beta}{8(4n+1)^4}$$

$$+ \frac{\gamma}{12(4n+1)^6} + \text{etc.}$$

wo, wenn die Logarithmen aus dem gewöhnlichen Syſtem genommen werden, die nicht=logarithmiſchen Glieder noch den Factor k bekommen.

Für das vorige Beyſpiel iſt $4n+1 = 201$

$$\begin{aligned}
\log(4n+1) &= 2{,}3031960574 \\
\log \pi &= 0{,}4971498726 \\
\log \tfrac{1}{4} &= 9{,}3979400087 \\
\hline
& 2{,}1982859387 \\
\hline
\frac{1}{2} \log \frac{(4n+1)\pi}{4} &= 1{,}0991429693 \\
+ \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{k}{(4n+1)^2} &= +0{,}0000026874 \\
\hline
& 1{,}0991456567 \\
- \frac{\beta}{8} \cdot \frac{k}{(4n+1)^4} &= -0{,}0000000002 \\
\hline
\log \frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} &= 1{,}0991456565 \\
\text{folglich } \log \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} &= 8{,}9008543434 \\
\text{und } \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} &= 0{,}0795892374 \text{ nächſtens.}
\end{aligned}$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen zurück, ſo iſt nach der erſten Formel

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \Big(1 + \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{32(2n+1)^2} - \frac{5}{128(2n+1)^3}$$

$$- \frac{21}{2048(2n+1)^4} + \frac{399}{8192(2n+1)^5} + \frac{869}{65536(2n+1)^6}$$
$$+ \text{etc.} \Big) . \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}$$

nach der zweyten aber wird

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \Big(1 - \frac{1}{4} . \frac{1}{(4n+1)^2} + \frac{3.7}{4.8} . \frac{1}{(4n+1)^4}$$
$$- \frac{11.61}{8.16} . \frac{1}{(4n+1)^6} + \text{etc.} \Big) . \frac{2}{\sqrt{(4n+1)\pi}}$$

ſo daß ${}^{2n}\mathfrak{N}$ zwiſchen die Gränzen $2^{2n} . \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}$ und $2^{2n} . \frac{2}{\sqrt{(4n+1)\pi}}$ fällt, welche einander viel näher kommen als die in dem Artikel, Binomial-Coefficienten, 16. gefundenen. Aus der zweyten Formel folgt der Annäherungsausdruck, den Stirling, Method. diff. Prop. 23., giebt. Stirling ſelbſt hat den Reihen für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ eine andre Form gegeben. Dieß hat auch Laplace gethan, deſſen Ausdruck aus den hier vorgetragenen Sätzen ſich ſo ableiten läßt.

Da

$${}^{2n}\mathfrak{N} = \frac{2n.\ 2n-1.\ 2n-2 \ldots\ldots n+1}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n}$$
$$= \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots\ldots 2n}{(1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n)^2}$$

ſo wird

$$\log . {}^{2n}\mathfrak{N} = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log 2n$$
$$- 2(\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log n)$$

Nach der erſten Formel in (44) iſt nun

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log(2n-1)$$

$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(2n - \frac{1}{2}\right)\log(2n-1) - (2n-1)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^2} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6(2n-1)^5} - \text{etc.}$$

nach der andern in (45) aber

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log(n-1) =$$

$$\frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\left(n - \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6(2n-1)^5} + \text{etc.}$$

und hierdurch

$$\log {}^{2n}\mathfrak{N} = \log 2n - 2\log n - \frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$+ \left(2n - \frac{1}{2}\right)\log(2n-1) - (2n-1)\log\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6(2n-1)^5} - \text{etc.}$$

alſo reducirt

$$\log {}^{2n}\mathfrak{N} = 2n\log 2 - \log n - \frac{1}{2}\log\pi + \log\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^3} + \text{etc.}$$

Es iſt

$$\log n = \log\left(n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \log\left(n - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \log\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)^2} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \text{etc.}$$

Dieſer Werth von $\log n$ in den vorigen Ausdruck ge- bracht giebt

$$\log \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = -\frac{1}{2}\log\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{3}{4(2n-1)} + \frac{1}{2(2n-1)^2}$$

$$- \frac{3}{8(2n-1)^3} + \frac{1}{4(2n-1)^4} - \frac{3}{20(2n-1)^5} + \text{etc.}$$

und

und dadurch, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen zurückgeht,

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{(n-\frac{1}{2})\pi}} \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4(2n-1)} + \frac{25}{32(2n-1)^2} \right.$$
$$\left. - \frac{105}{128(2n-1)^3} + \frac{1659}{2048(2n-1)^4} - \text{etc.} \right\}$$

Dieſes iſt Laplace's Ausdruck, wenn die gehörigen Entwickelungen und Reductionen vorgenommen werden. Man ſieht, daß er bey weitem ſo ſtark nicht convergirt, als die vorhin angegebenen Reihen für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$, aber durch die Art ſeiner Herleitung wird er ſehr merkwürdig. Laplace giebt eine doppelte, wovon hier nur von der zweyten, einfacheren, Bericht erſtattet werden kann.

Zuerſt wird gezeigt, daß

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} \int \partial\varphi (\cos\varphi)^{2n}$$

iſt, das Integral zwiſchen den Gränzen $\varphi = 0$, und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ genommen. Hiervon überzeugt man ſich leicht vermittelſt (Goniometrie, 141.), wenn man nur bemerkt, daß $\int \partial\varphi \cos 2r\varphi$ zwiſchen den angegebenen Gränzen o iſt. Macht man nun $\sin\varphi = u$, alſo $\cos\varphi = \sqrt{(1-uu)}$, ſo wird

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} \int \partial u (1-uu)^{n-\frac{1}{2}}$$

das Integral von $u = 0$ bis $u = 1$ genommen. Nun wird $n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha}$, und $1 - uu = e^{-\alpha t^2}$, alſo $u = \sqrt{(1 - e^{-\alpha t^2})}$ geſetzt, ferner

$$\sqrt{(1 - e^{-\alpha t^2})} = \alpha^{\frac{1}{2}} t (1 + \alpha . q^{(1)} . t^2 + \alpha^2 . q^{(2)} . t^4$$
$$+ \alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.})$$

angenommen. Dadurch wird

Xx

$\int \partial u (1-uu)^{n-\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \int \partial t e^{-tt} (1 + 3\alpha . q^{(1)} . t^2 + 5\alpha^2 . q^{(2)} . t^4$
$+ 7\alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.})$

wo die Integrale $\int \partial t e^{-tt}$; $\int t^2 \partial t e^{-tt}$; $\int t^4 \partial t e^{-tt}$; u. ſ. w. von $t = 0$ bis $t = \infty$, und zwar $+ \infty$, zu erſtrekken ſind, damit nämlich die Reihe rechter Hand zwiſchen ihren Gränzen ſtets poſitiv bleibe, wie es $\int \partial u (1-uu)^{n-\frac{1}{2}}$ zwiſchen den correſpondirenden Gränzen $u = 0$ und $u = 1$ bleibt. Nun iſt, wie nachher gezeigt werden ſoll, zwiſchen den angegebenen Gränzen

$$\int \partial t e^{-tt} = \frac{1 . \sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int t^2 \partial t e^{-tt} = \frac{1 . \sqrt{\pi}}{2^2}$$

$$\int t^4 \partial t e^{-tt} = \frac{1 . 3 \sqrt{\pi}}{2^3}$$

$$\int t^6 \partial t e^{-tt} = \frac{1 . 3 . 5 . \sqrt{\pi}}{2^4}$$

u. ſ. w.

Dadurch wird

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{(n-\frac{1}{2})\pi}} \left\{ 1 + \frac{1.3}{2} \alpha . q^{(1)} + \frac{1.3.5}{2^2} \alpha^2 . q^{(2)} + \frac{1.3.5.7}{2^3} \alpha^3 . q^{(3)} + \text{etc.} \right\}$$

wo nur noch die Coefficienten $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ u. ſ. w. zu beſtimmen ſind. Zu dem Ende nehme man in der Gleichung

$\alpha^{\frac{1}{2}} . t (1 + \alpha . q^{(1)} t^2 + \alpha^2 . q^{(2)} t^4 + \text{etc.}) = \sqrt{(1 - e^{-\alpha t^2})}$

auf beiden Seiten die Logarithmen, und differentiire alsdann, ſo wird

$$\frac{1 + 3\alpha . q^{(1)} . t^2 + 5\alpha^2 . q^{(2)} . t^4 + 7\alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.}}{t(1 + \alpha . q^{(1)} t^2 + \alpha^2 . q^{(2)} . t^4 + \alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.}} = \frac{\alpha t . e^{-\alpha tt}}{1 - e^{-\alpha tt}} = \frac{\alpha t}{e^{\alpha tt} - 1}$$

$$= \frac{1}{t\left(1 + \frac{\alpha t^2}{1.2} + \frac{\alpha^2 t^4}{1.2.3} + \frac{\alpha^3 t^6}{1.2.3\,4} + \text{etc.}\right)}$$

Hieraus folgt, wenn man übers Kreuz multiplicirt, und in den Producten, welche gleich ſind, die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von αt^2 gleich ſetzt,

$$2q^{(1)} = -\frac{1}{1.2}$$

$$4q^{(2)} = -\left\{\frac{1}{1.2.3} + \frac{3q^{(1)}}{1.2}\right\}$$

$$6q^{(3)} = -\left\{\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{3q^{(1)}}{1.2.3} + \frac{5q^{(2)}}{1.2}\right\}$$

etc.

überhaupt

$$2rq^{(r)} = -\left\{\frac{1}{1.2.3\ldots r+1} + \frac{3q^{(1)}}{1.2.3\ldots r} + \frac{5q^{(2)}}{1.2\ldots\ldots r-1} + \frac{7q^{(3)}}{1.2..r-2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(2r-1)q^{(r-1)}}{1.2}\right\}$$

Laplace hat das Geſetz etwas anders, aber nicht einfacher angegeben, Théorie des probabilités, Chap. 2. No. 34. Man erhält hiernach $q^{(1)} = -\frac{1}{4}$; $q^{(2)} = +\frac{5}{96}$; $q^{(3)} = -\frac{1}{128}$; $q^{(4)} = \frac{79}{92160}$; u. ſ. w. welche Werthe, wenn ſie in den Reihenausdruck für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ gebracht werden, ſolchen mit dem vorhin gefundenen übereinſtimmig machen.

55. Was den Werth des Integrals $\int e^{-t^2}\partial t$ von $t = 0$ bis $t = \infty$ genommen betrifft, ſo findet ſich der

ſelbe am kürzeſten auf folgende von Laplace zur Beſtimmung deſſelben angewandte Art, die auch Euler in einem Schreiben an Condorcet, Mém. de Paris, 1778. S. 603. und in der Abhandlung, Noua methodus quantitates integrales determinandi, Nov. Comm. Petrop., Tom. XVI. erklärt, und bey anderen Integralen gebraucht hat.

Man nehme das Doppel-Integral $\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)}$, wo x und y von einander unabhängig ſind, ſo iſt klar, daß der Werth deſſelben einerley gefunden werden muß, man mag entweder zuerſt nach y und dann nach x, oder zuerſt nach x und dann nach y integriren, wofern nur die äußerſten Werthe von x und y beidesmal dieſelben ſind.

Fängt man mit der Integration nach y an, ſo iſt

$$\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)} = \int \partial x \int \partial y e^{-y(1+xx)}$$

Aber

$$\int \partial y e^{-y(1+xx)} = \text{Const.} - \frac{e^{-y(1+xx)}}{1+xx}$$

und zwiſchen den Gränzen, $y = 0$, und $y = \infty$,

$$\int \partial y e^{-y(1+xx)} = \frac{1}{1+xx}$$

Dadurch wird

$$\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)} = \int \frac{\partial x}{1+xx}$$

$$= \text{Const.} + \text{Ang. tang}\, x$$

alſo, von $x = 0$ bis $x = \infty$,

$$= \frac{1}{2}\pi.$$

Mithin iſt für die äußerſten Werthe 0 und ∞ von x und y

$$\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)} = \frac{1}{2}\pi$$

Führt man jetzt ſtatt x und y zwey neue variable t und u ein, ſo daß

$$x = \frac{t}{u}$$

$$y = u^2$$

alſo
$$\partial x = \frac{1}{u}\partial t - \frac{t}{u^2}\partial u$$

$$\partial y = 0 . \partial t + 2u\partial u$$

iſt, ſo iſt nach (Stereometrie, 11.), wo das dortige $R = \frac{1}{u}$, $S = -\frac{t}{u^2}$, $T = 0$, $V = 2u$, ſtatt $\partial x \partial y$ zu ſetzen $\frac{1}{u} . 2u\partial t\partial u$, d. i., $2\partial t\partial u$ und die Formel $\int\int \partial x\partial y e^{-y(1+xx)}$ verwandelt ſich in dieſe $2\int\int \partial t\partial u e^{-(t^2+u^2)}$, wo man nun beliebig zuerſt die Integration nach t oder nach u vornehmen kann. Die Gränzen von t und u ſind, vermöge der Annahme $x = \frac{t}{u}$, und $y = u^2$, entweder 0 und $+\infty$ oder 0 und $-\infty$, wovon nur jene hier in Betracht kommen. Integrirt man die Formel $2\int\int \partial t\partial u e^{-(t^2+u^2)}$ zuerſt nach t, und ſetzt $\int \partial t e^{-tt}$ zwiſchen den Gränzen, $t = 0$, und $t = +\infty$, $= B$, ſo iſt $2\int\int \partial t\partial u e^{-(t^2+u^2)} = 2B\int \partial u e^{-uu}$, alſo, weil das Integral von $\int \partial u e^{-uu}$ von $\int \partial t e^{-tt}$, wenn die Gränzen bey beiden dieſelben ſind, nicht verſchieden iſt, das Integral von $2B\int \partial u e^{-uu}$, von $u = 0$ bis $u = +\infty$ genommen, $= 2BB$, welches, da es mit dem vorhin gefundenen Werthe von $\int\int \partial x\partial y e^{-y(1+xx)}$ einerley iſt, $2BB = \frac{1}{2}\pi$, alſo B, d. h., $\int e^{-tt}\partial t$ von $t = 0$ bis $t = +\infty$ genommen $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ giebt.

Auf dieſes Integral werden die übrigen $\int e^{-tt}t^2\partial t$; $\int e^{-tt}t^4\partial t$; u. ſ. w. folgendergeſtalt zurückgebracht, wo-

zu wir aber des Satzes bedürfen, daß der Logarithme einer unendlich großen Zahl gegen die Zahl ſelbſt unendlich klein iſt, oder verſchwindet. Der Beweis deſſelben iſt folgender. Es iſt

$$\frac{\log\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = (1-x)\log\frac{1}{1-x}$$

$$= (1-x)\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.}\right)$$

$$= x - \left(\frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{3.4}x^4 + \text{etc.}\right)$$

Alſo, für $x=1$, wenn i eine unendliche große Zahl bezeichnet,

$$\frac{\log i}{i} = 1 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \text{etc.}\right)$$

Aber die Summe der Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \text{etc.}$ in inf. iſt aus (Summirbare Reihe, 3. oder 6.) $=1$, mithin $\frac{\log i}{i} = 0$.

Es iſt, wenn man theilweiſe integrirt,

$$\int e^{-tt}t^{2n}\partial t = -\frac{1}{2}e^{-tt}.t^{2n-1} + \frac{2n-1}{2}\int e^{-tt}.t^{2n-2}\partial t.$$

ohne Conſtans, weil für $t=0$, die Integrale auf beiden Seiten verſchwinden. Setzt man $t=\infty$, ſo verſchwindet $e^{-tt}.t^{2n-1}$. Denn es iſt, wenn man zur Abkürzung $2n-1=p$, ſetzt $\frac{t^{2n-1}}{e^{tt}} =$

$$\frac{1 + p\log t + \frac{p^2(\log t)^2}{2} + \frac{p^3(\log t)^3}{2.3} + \text{etc.}}{1 + tt + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2.3} + \text{etc.}}$$

wo vom zweyten Gliede an, jedes Glied des Zählers gegen das gleichſtellige im Nenner für $t = \infty$, ſelbſt wenn nur p unendlich groß werden ſollte, zufolge des e wieſenen verſchwindet. Da aber ſowohl im Zähler als im Nenner die Summen der nach dem erſten Gliede folgenden unendlich groß ſind, ſo verſchwinden die erſten Glieder ſelbſt gegen jene Summen, und es iſt für ein unendlich großes t

$$\frac{t^{2n-1}}{e^{tt}} = 0$$

mithin zwiſchen den Gränzen $t = 0$ und $t = \infty$

$$\int e^{-tt} t^{2n} \partial t = \frac{2n-1}{2} . \int e^{-tt} t^{2n-2} \partial t.$$

Setzt man hier für n nach und nach $n-1$, $n-2$, $n-3 \ldots . 1$ ſo wird,

$$\int e^{-tt} t^{2n-2} \partial t = \frac{2n-3}{2} \int e^{-tt} t^{2n-4} \partial t$$

$$\int e^{-tt} t^{2n-4} \partial t = \frac{2n-5}{2} \int e^{-tt} t^{2n-6} \partial t$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int e^{-tt} t^2 \partial t = \frac{1}{2} \int e^{-tt} \partial t$$

alſo

$$\int e^{-tt} t^{2n} \partial t = \frac{1.3.5.7\ldots 2n-1}{2^{n-1}} \int e^{-tt} \partial t$$

$$= \frac{1.3.5.7\ldots 2n-1}{2^{n}} . \sqrt{\pi}$$

innerhalb der Gränzen $t = 0$ und $t = \infty$.

56. Die Summe der endlichen Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder $\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots \pm \varphi(x)$, das obere Vorzeichen für ein ungerades, das untere Vorzeichen für ein gerades x genommen, ergiebt ſich ſo.

Man ſuche die Summe der unendlichen Reihe $\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) +$ etc. in inf. indem man in $\varphi(x) - \varphi(x+1) + \varphi(x+2) - \varphi(x+3) +$ etc. in inf. $= S$, $x = 1$ ſetzt. Nennt man dieſe Summe $\mathfrak{S}$, ſo iſt für ein ungerades x

$$\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \ldots - \varphi(x-1) = \mathfrak{S} - S$$

alſo

$$\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots - \varphi(x-1) + \varphi(x)$$
$$= \mathfrak{S} + \varphi(x) - S$$

und auf ähnliche Art für ein gerades x

$$\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots + \varphi(x-1) - \varphi(x)$$
$$= \mathfrak{S} - (\varphi(x) - S);$$

Da $\mathfrak{S}$ eine unveränderliche Größe iſt, ſo kann man auch ſagen, die Summe σ der Reihe $\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \ldots \pm \varphi(x)$ ſey $=$ Const. $\pm (\varphi(x) - S)$ unter der angegebenen Bedingung der Vorzeichen, und die Conſtante dadurch zu beſtimmen, daß für $x = 0$, auch $\sigma = 0$, für $x = 1$, $\sigma = \varphi(1)$, für $x = 2$, $\sigma = \varphi(1) - \varphi(2)$ u. ſ. w. werden müſſe. Setzt man $\varphi(x) = y$, $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = a'$, $\varphi(3) = a''$ u. ſ. w., ſo wird aus (48)

$$a - a' + a'' - a''' + \ldots \pm y =$$

$$\text{Const.} \pm \left(\frac{1}{2} y + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} . \frac{\partial y}{\partial x} \right.$$

$$- \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$$

$$\left. - \text{etc.} \right)$$

Euler hat dieſe Formel in den Institt. calc. diff. P. II. c. VII. §. 183.

57. Die eben erhaltene Formel läßt ſich auch aus den beiden Summirungsformeln in (35) und (40) folgendergeſtalt ableiten.

Aus (35) iſt

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) - ..... + \varphi(x) =$$

$$\text{Const.} + \int y \partial x + \frac{1}{2} y + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$- \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2...6} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

Aus (40) aber, wenn man $x - \frac{1}{2}$ ſtatt x ſchreibt, wodurch ſich T in $\varphi(x)$ oder y und y in $\varphi\left(x - \frac{1}{2}\right)$ verwandelt,

$$\varphi(\tfrac{1}{2}) + \varphi(\tfrac{3}{2}) + \varphi(\tfrac{5}{2}) + ... + \varphi(x - \tfrac{1}{2}) =$$

$$\text{Const.} + \int y \partial x - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{2\partial x}$$

$$+ \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{(2\partial x)^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6} \cdot \frac{\partial^5 y}{(2\partial x)^5} + \text{etc.}$$

alſo durch Subtraction, wenn $\varphi(\frac{1}{2})$ mit zur Conſtans gezogen wird,

$$\varphi(1) - \varphi(\tfrac{3}{2}) + \varphi(2) - \varphi(\tfrac{5}{2}) + .. + \varphi(x - \tfrac{1}{2}) + \varphi(x)$$

$$= \text{Const.} + \frac{1}{2} y + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{2\partial x}$$

$$-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3 y}{(2\partial x)^3}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots 6}\cdot\frac{\partial^5 y}{(2\partial x)^5} - \text{etc.}$$

Hier hat das letzte Glied $\varphi(x)$ das Vorzeichen $+$. Da es aber auch $-$ haben kann, ſo gebe man der Reihe, indem man ſie rückwärts ſchreibt, wodurch es unbeſtimmt bleibt, wie weit ſie ſich nach dieſer Richtung erſtreckt, doppelte Vorzeichen. Alsdann wird

$$\pm\left(\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{1}{2}\right)+\varphi(x-1)-\varphi\left(x-\frac{3}{2}\right) + \text{etc.}\right)$$

$$= \text{Const.} \pm \left\{\frac{1}{2}y+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\cdot\frac{\partial y}{2\partial x} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3 y}{(2\partial x)^3} + \text{etc.}\right\}$$

wo die Conſtans, welche im allgemeinen immer als additiv betrachtet werden kann, ohne doppeltes Vorzeichen geblieben iſt. Ihre Beſtimmung hängt nun davon ab, wie weit man in der Reihe $\varphi(x)-\varphi(x-\frac{1}{2}) + \varphi(x-1) -$ etc. zurückgeht. In dieſer Reihe iſt $\varphi(x-\frac{1}{2})$ das nächſte Glied an $\varphi(x)$ oder y und

$$\varphi(x-\tfrac{1}{2}) = y - \frac{\partial y}{2\partial x} + \frac{\partial^2 y}{1.2\,(2\partial x)^2} - \frac{\partial^3 y}{1.2.3\,(2\partial x)^3} + \text{etc.}$$

Soll $\varphi(x-1)$ das nächſte Glied werden, ſo hat man, weil

$$\varphi(x-1) = y - \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

und dieſer Ausdruck aus dem von $\varphi(x-\frac{1}{2})$ hervorgeht, wenn ſtatt $2\partial x$ überall bloß ∂x geſetzt wird, nur nöthig, dieſelbe Veränderung in der erhaltenen Summenformel vorzunehmen. Dadurch wird

$$\pm(\varphi(x)-\varphi(x-1)+\varphi(x-2)-\varphi(x-3)+\text{etc.})$$
$$=\text{Const.}\pm\left(\frac{1}{2}y+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\text{etc.}\right)$$

Setzt man $\pm(\varphi(x)-\varphi(x-1)+\varphi(x-2)-\ldots\ldots\pm\varphi(1))$, wo $\varphi(1)$ das Vorzeichen $+$ bey einem ungeraden x erhält, $=\sigma$, alſo $\sigma=\varphi(1)-\varphi(2)+\varphi(3)-\ldots\ldots\pm\varphi(x)$, ſo gelangt man wieder zu der vorigen Formel. Man wird gegen dieſe Herleitung weiter kein Bedenken haben, wenn man bemerkt, daß in den beiden Reihen

$$\varphi(x)-\varphi(x-\tfrac{1}{2})+\varphi(x-1)-\varphi(x-\tfrac{3}{2})+\text{etc.}$$

und

$$\varphi(x)-\varphi(x-1)+\varphi(x-2)-\varphi(x-3)+\text{etc.}$$

die Glieder der zweyten $\varphi(x-2)$, $\varphi(x-3)$, $\varphi(x-4)$ u. ſ. w. aus den gleichſtelligen Gliedern der erſten $\varphi(x-1)$, $\varphi(x-\frac{3}{2})$, $\varphi(x-2)$ u. ſ. w. eben ſo entſtehen, wie es vorhin von den Gliedern $\varphi(x-1)$ und $\varphi(x-\frac{1}{2})$ gezeigt iſt. $\varphi(x)$ oder y bleibt dabey ungeändert.

57[b]. Vermittelſt der Formel für die Summe der Reihe $\varphi(1)-\varphi(\frac{3}{2})+\varphi(2)-\varphi(\frac{5}{2})+\ldots\ldots-\varphi(x-\frac{1}{2})+\varphi(x)$ läßt ſich der oben in (45) gefundene Ausdruck für $\frac{1}{2}\log 2\pi$ auf folgende, vielleicht weniger Einwendungen ausgeſetzte Art erhalten.

Es ſey nämlich y oder $\varphi(x)=\log 2x$, alſo $\varphi(x-\frac{1}{2})=\log(2x-1)$; $\varphi(x-1)=\log(2x-2)$; ... ... $\varphi(\frac{5}{2})=\log 5$; $\varphi(2)=\log 4$; $\varphi(\frac{3}{2})=\log 3$; $\varphi(1)=\log 2$; ſo iſt $\frac{\partial y}{\partial x}=x^{-1}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=1.2\,x^{-3}$; $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=1.2.3.4\,x^{-5}$; u. ſ. w. alſo

$$\log 2-\log 3+\log 4-\log 5+\ldots-\log(2x-1)+\log 2x$$

$$= \text{Const.} + \frac{1}{2}\log 2x + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.(2x)}$$
$$- \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.(2x)^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.(2x)^5} - \text{etc.}$$

Setzt man hier zur Beſtimmung der Conſtans $x=1$, ſo wird

$$\log 2 = \text{Const.} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2}$$
$$- \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4.\ 2^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6.\ 2^5} - \text{etc.}$$

und

$$\log \frac{2.4.6.8.\ 2x-2}{3.5.7.9..\ 2x-1}\sqrt{2x} = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\ 2.\ 2^3}\left(1-\frac{1}{x^3}\right) - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{3.\ 4.\ 2^5}\left(1-\frac{1}{x^5}\right) + \text{etc.}$$

alſo für ein unendlich großes x

$$\log \frac{2.4.6.8..\ 2x-2}{3.5.7.9..\ 2x-1}.\sqrt{2x} = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2}$$
$$+ \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\ 2.\ 2^3} - \text{etc.}$$

Aber nach Walliſens bekanntem Ausdrucke iſt für ein unendlich großes x der Werth von $\frac{2.4.6...\ 2x-2}{3.5.7...\ 2x-1}\sqrt{2x}$, $=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Daher, weil $\log\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\log 2$ $= \frac{1}{2}\log 2\pi - \log 2$ iſt,

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = \frac{3}{2}\log 2 - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4.\ 2^3}$$
$$- \text{etc.}$$

In (45) iſt gefunden

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2} - \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,2^3}$$
$$+ \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,2^5} - \text{etc.}$$

Bringt man dieſen Werth in den vorigen Ausdruck, ſo wird erhalten

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = 1 - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6} + \text{etc.}$$

wie in (44) und (45) gefunden iſt.

58. Man ſieht, wie die Sätze von 54. bis 57. dienen können die Logarithmen von Factoriellen (Facultäten) mit gebrochenen Exponenten zu finden.

Die Factorielle $1^{\frac{1}{2}|r}$ nach Kramps Bezeichnung iſt, wenn man in dem Art., Hypergeometriſche Reihe, $a=1$, $b=r$, $n=\frac{1}{2}$ und, $\alpha=1$ ſetzt, und x ſtatt i ſchreibt

$$= \frac{1.(1+r)(1+2r)\ldots\ldots\ldots 1+(x-1)r}{\left(1+\frac{1}{2}r\right)\left(1+\frac{3}{2}r\right)\left(1+\frac{5}{2}r\right)\ldots 1+\left(x-\frac{1}{2}\right)r}.$$
$$\times(1+xr)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{r}\left(\frac{2}{r}+2\right)\left(\frac{2}{r}+4\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2}{r}+2x-2}{\left(\frac{2}{r}+1\right)\left(\frac{2}{r}+3\right)\left(\frac{2}{r}+5\right)\ldots\ldots \frac{2}{r}+2x-1}.$$
$$\times\left(\frac{2}{r}+2x\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für ein unendlich großes x.

Nun ſey $\varphi(x)$ oder $y = \log\left(\frac{2}{r}+2x\right)$, alſo

$$\varphi\left(x-\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{r}+2x-1\right);\quad \varphi(x-1)$$

$$= \log\left(\frac{2}{r} + 2x - 2\right); \ldots \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{r} + 3\right);$$

$$\varphi(1) = \log\left(\frac{2}{r} + 2\right); \ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{r} + 1\right);$$

$\varphi(0) = \log\frac{2}{r}$ ferner $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{1}{r} + x} = \left(\frac{1}{r} + x\right)^{-1};$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 1.2.\left(\frac{1}{r} + x\right)^{-3}; \ \frac{\partial^5 y}{\partial x^3} = 1.2.3.4\left(\frac{1}{r} + x\right)^{-5};$$

u. ſ. w. daher

$$\log\frac{2}{r} - \log\left(\frac{2}{r} + 1\right) + \log\left(\frac{2}{r} + 2\right)$$

$$- \log\left(\frac{2}{r} + 3\right) \ldots\ldots - \log\left(\frac{2}{r} + 2x - 1\right)$$

$$+ \log\left(\frac{2}{r} + 2x\right)$$

$$= \text{Const.} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{r} + 2x\right)$$

$$+ \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2} \cdot \frac{r}{2(1+rx)} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4} \cdot \frac{r^3}{2^3(1+rx)^3}$$

$$+ \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6} \cdot \frac{r^5}{2^5(1+rx)^5}$$

alſo, da für $x = 0$ die Summe $= \log\frac{2}{r}$ ſeyn muß,

$$\text{Const.} = \frac{1}{2}\log\frac{2}{r} - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2} \cdot \frac{r}{2}$$

$$+ \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^3 - \text{etc.}$$

Dadurch wird

$$\log \frac{\frac{2}{r}\left(\frac{2}{r}+2\right)\left(\frac{2}{r}+4\right)\ldots\ldots\ldots \frac{2}{r}+2x-2}{\left(\frac{2}{r}+1\right)\left(\frac{2}{r}+3\right)\left(\frac{2}{r}+5\right)\ldots\ldots \frac{2}{r}+2x-1} \cdot \times\left(\frac{2}{r}+2x\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2}\cdot\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{1+rx}\right) + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^3\left\{1-\frac{1}{(1+rx)^3}\right\} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^5\left\{1-\frac{1}{(1+rx)^5}\right\} + \text{etc.}$$

folglich x unendlich groß gemacht

$$\log 1^{\frac{1}{2}|r} = -\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2}\cdot\frac{r}{2} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^3 - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^5 - \text{etc.}$$

alſo, wenn man die Zahlwerthe von $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$.... einführt, und von den Logarithmen zu den Zahlen zurückgeht

$$1^{\frac{1}{2}|r} = 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{r}{2} + \frac{1}{32}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{5}{128}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^3 - \frac{21}{2048}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^4 - \frac{399}{8192}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^5 + \frac{869}{65536}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^6 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten zu den Potenzen von $\frac{r}{2}$ bis auf die Vorzeichen einerley ſind mit denen der Potenzen von $\frac{1}{2n+1}$ in der erſten Reihe für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ in (54), wovon man den

Grund leicht auffinden wird. Der gefundene Ausdruck ſtimmt mit dem von Kramp, Analyse des refructions, Nro. 139. überein.

59. Es ſey jetzt die Reihe, deren allgemeines Glied $p^x y$ iſt, zu ſummiren, ſo daß alſo die Summe von $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + 'yp^{x-1} + yp^x$ verlangt wird, wo die Bezeichnungen aus dem vorhergehenden bekannt ſind. Man ſetze dieſe Summe $= s$. Druckt man nun hier, wie in (27), $'y$, $''y$, ... a'', a', a nach dem Taylorſchen Lehrſatze aus, und rechnet man, wie dort, zuerſt das der Stelle o angehörige Glied $'a$ mit ein, nachher aber wieder ab, ſo wird

$$s = p^x y + p^x y\, S\frac{1}{p^x} - p^x.\frac{\partial y}{\partial x}.S\frac{x}{p^x} + p^x.\frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2}.S\frac{x^2}{p^x} - p^x.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3}.S\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.} - {}'a$$

wo $S\frac{x^r}{p^x} = \frac{1^r}{p} + \frac{2^r}{p^2} + \frac{3^r}{p^3} + \frac{4^r}{p^4} + \ldots + \frac{x^r}{p^x}$ iſt.

Da die in dieſem Summenausdrucke vorkommende Summen $S\frac{1}{p^x}$; $S\frac{x}{p^x}$; $S\frac{x^2}{p^x}$; u. ſ. w. der Reihen $\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^3} + \frac{4}{p^4} + \text{etc.}$; $\frac{1}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{9}{p^3} + \frac{16}{p^4} + \text{etc.}$; $\frac{1}{p} + \frac{8}{p^2} + \frac{27}{p^3} + \frac{64}{p^4} + \text{etc.}$; u. ſ. w. unbeſtimmte Größen ſind, die unendlichen Summen dieſer Reihen aber, wie aus (3) erhellt, einen beſtimmten (nicht von x abhängigen) Werth haben, ſo führe man letztere ſtatt der erſteren in die Formel ein. Bezeichnet man

in

in dieſer Abſicht die unendlichen Summen jener Rei-
hen durch $\mathfrak{S}\frac{1}{p^x}$; $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$; $\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$; u. ſ. w. ſo giebt (3), das dortige $r=\frac{1}{p}$ gemacht, und die übrigen Bezeichnungen gehörig vertauſcht,

$$S\frac{1}{p^x}=\mathfrak{S}\frac{1}{p^x}-\frac{1}{p^x(p-1)}$$

$$S\frac{x}{p^x}=\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}-\frac{x}{p^x(p-1)}-\frac{1}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$$

$$S\frac{x^2}{p^x}=\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}-\frac{x^2}{p^x(p-1)}-\frac{2}{1}\cdot\frac{x}{px}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$$
$$-\frac{2.1}{1.2}\cdot\frac{1}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$$

$$S\frac{x^3}{p^x}=\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}-\frac{x^3}{p^x(p-1)}-\frac{3}{1}\cdot\frac{x^2}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$$
$$-\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{x}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}-\frac{3\,2.1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}$$

u. ſ. w.

Hierdurch wird, wenn man ſtatt $\mathfrak{S}\frac{1}{p^x}$ ſeinen Werth $=\frac{1}{p-1}$ ſetzt, und alles gehörig ordnet

$$S=\frac{p^{x+1}}{p-1}y-p^x.\frac{\partial y}{\partial x}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}+p^x.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2}.\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$$
$$-p^x.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}+\text{etc.}$$
$$-{}'a$$
$$-\frac{1}{p-1}\left(y-x.\frac{\partial y}{\partial x}+x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2}\right.$$
$$\left.-x^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}+\text{etc.}\right)$$

$$+ \mathfrak{S}\frac{x}{p^x}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - x.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2.\frac{\partial^3 y}{1.2\partial x^3} - x^3.\frac{\partial^4 y}{1.2.3\partial x^4} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{1.2}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x^2.\frac{\partial^4 y}{1.2\partial x^4} - x^3.\frac{\partial^5 y}{1.2.3\partial x^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - x.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + x^3.\frac{\partial^5 y}{1.2\partial x^5} - x^3.\frac{\partial^6 y}{1.2.3\partial x^6} + \text{etc.}\right)$$

$$- \text{etc.}$$

Da die hier in $\frac{1}{p-1}$ multiplicirte Reihe, $y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - \text{etc.}$, das der Stellenzahl o angehörige Glied der Reihe, deren allgemeines Glied y, oder der Werth von y für $x = o$, alſo $= {}'a$, iſt, ſo wird ${}'a + \frac{1}{p-1}\left(y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - \text{etc.}\right) = {}'a + \frac{1}{p-1}.{}'a = \frac{p\,{}'a}{p-1}$ d. i., der Werth von $\frac{p^{x+1}y}{p-1}$ für $x = o$. Eben ſo ſind die in $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$; $\frac{1}{1.2}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$; $\frac{1}{1.2.3}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}$; u. ſ. w. multiplicirten Reihen beziehungsweiſe die der Stellenzahl o angehörigen Glieder der Reihen, deren allgemeine Glieder $\frac{\partial y}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$; u. ſ. w. ſind, oder die Werthe von

$\frac{\partial y}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$; u. ſ. w. für $x = 0$. Werden dieſe Werthe durch $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$; $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$; $\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]$; u. ſ. w. bezeichnet, ſo wird

$$s = \frac{p^{x+1}y}{p-1} - p^x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \mathfrak{S}\frac{x}{p^x} + p^x \cdot \frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$$
$$- p^x \cdot \frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.}$$
$$-\left(\frac{p\,'a}{p-1} - \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \cdot \mathfrak{S}\frac{x}{p^x} + \left[\frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2}\right] \cdot \mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}\right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3}\right] \cdot \mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.}\right)$$

Es iſt alſo s der Unterſchied zweyer Reihen, wovon die zweyte, weil $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$, $\mathfrak{S}\frac{x^x}{p^x}$, $\mathfrak{S}\frac{x^x}{p^x}$ u. ſ. w. von x ganz unabhängig ſind, der Werth der erſten für $x = 0$, oder die der erſten beyzufügende Conſtans iſt, damit für $x = 0$, auch $s = 0$ werde.

Demnach iſt

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1} y - p^x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \mathfrak{S}\frac{x}{p^x} + p^x \cdot \frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$$
$$- p^x \cdot \frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.} \pm \text{Const.}$$

wo (aus 7)

$$\mathfrak{S}\frac{x^m}{p^x} = \frac{Ap^m + A'p^{m-1} + A''p^{m-2} + A'''p^{m-3} + \ldots + A^{(m-1)}p}{(p-1)^{m+1}}$$

und

$$A^{(\lambda-1)} = \lambda^m - \left[\frac{\lambda+1}{1}\right](\lambda-1)^m + \left[\frac{\lambda+1}{2}\right](\lambda-2)^m - .$$

$$\ldots \mp \left[\frac{\lambda+1}{3}\right] . 2^m \pm \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] . 1^m$$

iſt, und die Const. dadurch beſtimmt werden muß, daß für $x = 0$, auch $s = 0$ werde.

60. Will man die Summe der Reihe $ap + a'p^2 + a''p^3 + a'''p^4 + \ldots p^x y$ finden, ohne die Kenntniß der unendlichen Summen, die ſo eben durch $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$; $\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$; $\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}$; u. ſ. w. bezeichnet wurden, vor=auszuſetzen, ſo ſetze man jene Summe oder $s = p^{x+1}S$, wo S eine Function von x iſt. Iſt alſo $'S$ die ähnliche Function von $x - 1$, ſo daß $'S$ aus S entſteht, wenn darin $x - 1$ ſtatt x geſetzt wird, ſo iſt $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + p^{x-1}y = p^x{}'S$, alſo, dieſe Summe von der vorigen abgezogen,

$$p^{x+1}S - p^x{}'S = p^x y$$

und auf beiden Seiten mit p^x dividirt,

$$pS - {}'S = y$$

wo ſich zugleich der Grund der Annahme von $p^{x+1}S$ für die Summe zeigt.

Da $${}'S = S - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{1.2\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$$

ſo erhält man aus der vorigen Gleichung dieſe

$$(p-1)S + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{1.2\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\partial x^3} - \text{etc.}$$
$$= y \; (\odot)$$

Hieraus iſt näherungsweiſe $S = \frac{y}{p-1}$, und wenn man dieſen Werth gebraucht, noch näher

$S = \frac{y}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$. Es ſey alſo

$$S = \frac{y}{p-1} - \frac{\alpha}{p-1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\beta}{p-1} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{p-1} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\delta}{p-1} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

ſo wird

$$\begin{array}{lll}
(p-1)S & = y - \alpha\frac{\partial y}{\partial x} + \beta\frac{\partial x^2}{\partial x^2} & - \gamma\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.} \\
+ \frac{\partial S}{\partial x} & = + \frac{1}{p-1} - \frac{\alpha}{p-1} & + \frac{\beta}{p-1} - \text{etc.} \\
- \frac{\partial^2 S}{1.2\partial x^2} & = & - \frac{1}{1.2(p-1)} + \frac{\alpha}{1.2(p-1)} - \text{etc.} \\
+ \frac{\partial^3 S}{1.2.3\partial x^3} & = & + \frac{1}{1.2.3(p-1)} - \text{etc.} \\
- \text{etc.} & & - \text{etc.} \\
- y & = - y &
\end{array}$$

woraus vermöge (⊙) zur Beſtimmung von $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ſich folgende Gleichungen ergeben

$$\alpha(p-1) - 1 = 0$$

$$\beta(p-1) - \alpha - \frac{1}{1.2} = 0$$

$$\gamma(p-1) - \beta - \frac{\alpha}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} = 0$$

$$\delta(p-1) - \gamma - \frac{\beta}{1.2} - \frac{\alpha}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} = 0$$

u. ſ. w.

Aus dieſen Gleichungen wird

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}$$

$$\gamma = \frac{pp+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}$$

$$\delta = \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4(p-1)^4}$$

u. ſ. w. gefunden.

Das Geſetz, nach welchem die Coefficienten α, β, γ, δ u. ſ. w. unter einander zuſammenhängen, überſehbarer zu machen, und, wo möglich zu vereinfachen, formire man eine Reihe mit denſelben Coefficienten $1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\delta t^4+$ etc. und ſetze die Summe derſelben v, ſo daß

$$v = 1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\delta t^4+ \text{etc.}..$$

Nun formire man nach Anleitung der obigen Relationen zwiſchen α, β, γ, δ, u. ſ. w. folgende Reihen

$$(p-1)v = p-1+(p-1)\alpha t+(p-1)\beta t^2+(p-1)\gamma t^3+\text{etc.}$$

$$-tv = \quad -1 \quad -\alpha \quad -\beta \quad -\text{etc.}$$

$$-\frac{t^2 v}{1.2} = \quad -\frac{1}{1.2} \quad -\frac{\alpha}{1.2} \quad -\text{etc.}$$

$$-\frac{t^3 v}{1.2.3} = \quad -\frac{1}{1.2.3} \quad -\text{etc.}$$

etc. etc.

ſo entſteht durchs Zuſammenrechnen, weil rechter Hand alle in t und ſeine Potenzen multiplicirten Glieder wegfallen

$$v\left(p-1-t-\frac{t^2}{1.2}-\frac{t^3}{1.2.3}-\frac{t^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right)=p-1$$

d. i.

$$v(p-e^t) = p-1$$

alſo $$v = \frac{p - 1}{p - e^t}$$

Hier läßt ſich die tranſcendente e^t durch Differentiation wegbringen, und dadurch ein einfacheres Bildungsgeſetz für α, β, γ, δ, u. ſ. w. erhalten. Zu dem Ende iſt

$$e^t = \frac{pv - p + 1}{v}$$

alſo $$t = \log(pv - p + 1) - \log v$$

und $$\partial t = \frac{p\partial v}{pv - p + 1} - \frac{\partial v}{v} = \frac{(p-1)\partial v}{v(pv - p + 1)}$$

woraus

$$(p-1)\frac{\partial v}{\partial t}\; pv^2 + (p-1)v = 0$$

folgt. Es iſt

$$\begin{aligned}
(p-1)\frac{\partial v}{\partial t} &= (p-1)\alpha + 2(p-1)\beta t + 3(p-1)\gamma t^2 + \text{etc.}\\
-\,pv^2 &= -\,p - 2p\alpha - p\alpha^2 - \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\quad - 2p\beta - \text{etc.}\\
+\,(p-1)v &= +\,p-1 + (p-1)\alpha + (p-1)\beta + \text{etc.}
\end{aligned}$$

alſo, weil die Summe linker Hand $= 0$ iſt,

$$\begin{aligned}
(p-1)\alpha &= 1\\
2(p-1)\beta &= (p+1)\alpha\\
3(p-1)\gamma &= (p+1)\beta + p\alpha^2\\
4(p-1)\delta &= (p+1)\gamma + p\,.\,2\alpha\beta\\
5(p-1)\varepsilon &= (p+1)\delta + p(2\alpha\gamma + \beta\beta)\\
6(p-1)\zeta &= (p+1)\varepsilon + p(2\alpha\delta + 2\beta\gamma)\\
\text{etc.} &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo das Geſetz des Fortgangs klar iſt. Die Factoren zu $p + 1$ nämlich ſind die Coefficienten des Polynoms $\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$ nach der Reihe, die Factoren zu p aber die Coefficienten von $(\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.})^2$, welche zu einerley Potenz von t mit jenen gehören.

Euler hat die Formeln für die Coefficienten α, β, γ, δ, u. ſ w. Institt. Calc. diff. P. II. c. VII. §. 175., die Coefficienten ſelbſt bis mit zu η, ebendaſelbſt §. 173.

Hätte man anfangs die Summe der Reihe $'a + ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots\ldots + p^x y$, oder $''a . \frac{1}{p} + 'a + ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots\ldots + p^x y$, u. ſ. w $p^{x+1}S$ geſetzt, ſo würde man zur Beſtimmung von S dieſelbe Gleichung wie oben

$$p^{x+1}S - p^{x\prime}S = p^x y$$

oder

$$p'S - \ 'S = y$$

erhalten haben. Es bleibt alſo, wenn S auf dieſe Weiſe beſtimmt wird, in der That unbeſtimmt, wie viel Glieder der Reihe von dem Gliede $p^x y$ an rückwärts genommen zu der Summe gezogen ſind, wie auch daraus erhellt, daß wenn man $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots\ldots + p^x y = p^{x+1}S \pm$ Const. angenommen hätte, ebenfalls die Gleichung $p^{x+1}S - p^{x\prime}S = p^x y$ gekommen ſeyn würde. Daher iſt S.$p^x y$ oder

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(y - \alpha . \frac{\partial y}{\partial x} + \beta . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \gamma . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \delta . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\right) \pm \text{Const.}$$

welcher Ausdruck, wenn hier ſtatt α, β, γ, δ, u. ſ. w. und in (59) ſtatt $S\frac{x}{p^x}$, $S\frac{x^2}{p^x}$, $S\frac{x^3}{p^x}$, u. ſ. w. ihre Werthe in p geſetzt werden, mit dem in (59) gefundenen vollkommen übereinſtimmt.

61. Ein dritter Weg, die Summe der Reihe $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots\ldots + p^x y$ zu finden, iſt folgender.

Es iſt, wie ſich aus (4) leicht ergiebt

$$ap + a'p^2 + a''p^3 + a'''p^4 + \text{etc. in inf.}$$

$$= -\frac{ap}{p-1} + \frac{pp}{(p-1)^2}\Delta a - \frac{p^3}{(p-1)^3}\Delta^2 a + \frac{p^4}{(p-1)^4}\Delta^3 a - \text{etc.}$$

wo die Reihe rechter Hand des Gleichheitszeichens einmal irgendwo abbricht, wenn die Reihe a, a', a'', a''' .... auf verſchwindende Differenzen führt, ſonſt aber ins Unendliche fortläuft.

Auf dieſelbe Weiſe iſt

$$yp^x + y'p^{x+1} + y''p^{x+2} + y'''p^{x+3} + \text{etc. in inf.}$$

$$= p^x\left(-\frac{y}{p-1} + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^2 y + \frac{p^3}{(p-1)^4}\Delta^3 y - \text{etc.}\right)$$

Sind nun y, y', y'', y''' ..... die den Stellenzahlen x, x + 1, x + 2, x + 3,... zugehörigen Glieder der Reihe a, a', a'', a'''...., ſo giebt die letzte Summe von der erſten abgezogen die Summe von $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + p^{x-1}{}'y$ d. i. $S.p^x y - p^x y$. Daher wird nach Hinzufügung des Gliedes $p^x y$ zu dem Reſte $S.p^x y$ oder s

$$= \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \frac{pp}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{p}{p-1}\left(a - \frac{p}{p-1}\Delta a + \frac{pp}{(p-1)^2}\Delta^2 a - \frac{p^3}{(p-1)^3}\Delta^3 a + \text{etc.}\right)$$

In der Reihe, womit $\frac{p}{p-1}$ multiplicirt iſt, führe man $'a$, $\Delta'a$, $\Delta^{2\prime}a$, u. ſ. w. ſtatt a, Δa, $\Delta^2 a$, u. ſ. w. ein, indem man $a = 'a + \Delta'a$, $\Delta a = \Delta'a + \Delta^{2\prime}a$, $\Delta^2 a = \Delta^{2\prime}a + \Delta^{3\prime}a$, u. ſ. w. macht, ſo verwandelt ſich dieſelbe in $'a - \frac{1}{p-1}\Delta'a + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^{2\prime}a - \frac{pp}{(p-1)^3}\Delta^{3\prime}a +$ etc., welche mit jener dieſelbe Anzahl Glieder hat, und mit der Reihe $y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y -$ etc. worein $\frac{p^{x+1}}{p-1}$ multiplicirt iſt, ſich vergleichen läßt. Die Vergleichung zeigt, daß jene nichts anders als der Werth dieſer für $x = 0$ iſt, indem nämlich, ſo wie $'a$ der Werth von y für $x = 0$ iſt, eben ſo $\Delta'a$, $\Delta^{2\prime}a$, u. ſ. w., die Werthe von Δy, $\Delta^2 y$ u. ſ. w., für denſelben Werth von x ſind. Letzteres erhellt ſo.

Da

$$'a = y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - x^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$$

und

$$a = y - (x-1)\frac{\partial y}{\partial x} + (x-1)^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - (x-1)^3\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$$

ſo wird

$$\Delta'a = a - 'a = \frac{\partial y}{\partial x} - (2x-1)\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + (3x^2-3x+1)\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}$$
$$- (4x^3-6x^2+4x-1)\frac{\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x} - x.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2.\frac{\partial^3 y}{1.2.\partial x^3} - x^3.\frac{\partial^4 y}{1.2.3\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x^2.\frac{\partial^4 y}{1.2\partial x^4} - x^3.\frac{\partial^5 y}{1.2.3\partial x^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - x.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + x^2.\frac{\partial^5 y}{1.2\partial x^5} - x^3.\frac{\partial^6 y}{1.2.3\partial x^6} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Die erſte Reihe dieſes Ausdrucks für $\Delta' a$ iſt der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = o$; die zweyte Reihe der Werth von $\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2}$ für denſelben Werth von x; die dritte der Werth von $\frac{\partial^3 y}{1.2.3}$ für $x = o$ u. ſ. w. Alſo iſt $\Delta' a$ der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$, d. i., von Δy für $x = o$. Eben ſo läßt ſich zeigen, daß $\Delta^{2\prime} a$, $\Delta^{3\prime} a$, u. ſ. w. die Werthe von $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, u. ſ. w. für $x = o$ ſind.

Da alſo $a - \frac{p}{p-1}\Delta a + \frac{p^2}{(p-1)^2}\Delta^2 a - \text{etc.}$ der Werth von $y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \text{etc.}$ für $x = o$ iſt, und dies von dem Factor $\frac{1}{p-1}$ in An=

ſeßung des Factors $\frac{p^{x+1}}{p-1}$ gleichfalls gilt, ſo iſt das Product $\frac{p}{p-1}\left(a-\frac{p}{p-1}\Delta a+\frac{p^2}{(p-1)^2}\Delta^2 a-\text{etc.}\right)$ der Werth des Products $\frac{p^{x+1}}{p-1}\Big(y-\frac{1}{p-1}\Delta y$ $+\frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y-\text{etc.}\Big)$ für $x=0$, d. i., die dem letzteren beyzufügende Conſtante, damit für $x=0$ auch $s=0$ werde. Man hat alſo

$$s=\frac{p^{x+1}}{p-1}\Big(y-\frac{1}{p-1}\Delta y+\frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y$$
$$-\frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y+\frac{p^3}{(p-1)^4}\Delta^3 y-\text{etc.}\Big)+C.$$

Um dieſe Formel, deren Glieder ein ſehr einfaches Fortſchreitungsgeſetz befolgen, durch ein Exempel zu erläutern, ſey $y=x^3$, ſo iſt $\Delta y=3xx+3x+1$; $\Delta^2 y=6x+6$; $\Delta^3 y=6$; $\Delta^4 y$ und alle folgende Differenzen $=0$. Daher iſt s oder

$$S.x^3p^x=\frac{p^{x+1}}{p-1}\Big(x^3-\frac{3px^2}{p-1}+\frac{(3p+3)x}{(p-1)^2}$$
$$-\frac{pp+4p+1}{(p-1)^3}\Big)+C.$$

Die Conſtans, aus dem Falle $x=0$ beſtimmt, iſt $=\frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}$. Sie iſt der Totalwerth der ins Unendliche fortgeſetzten Reihe $1^3.p+2^3p^2+3^3.p^3$ + etc. Man vergleiche 17. 18. und 19.

Führt man in die Formel für s die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. ſ. w. ein, indem man ſtatt $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y,$

u. ſ. w. ihre durch $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, u. ſ. w. ausgedruckten Werthe ſetzt, welche, weil $\Delta x = 1$ iſt, ſind *)

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \frac{\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{2\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + \frac{6\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \frac{14\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{6\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \frac{36\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{24\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

etc. etc.

ſo wird

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\Big(y - \frac{1}{p-1}.\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{p^2+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4(p-1)^4}.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\Big) + C.$$

eben ſo, wie vorhin gefunden iſt.

Um die von x unabhängigen Coefficienten zu $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, u. ſ. w. in dem eingeſchloſſenen Factor dieſes Ausdrucks allgemein zu beſtimmen, ſetze man

$$y - \frac{1}{p-1}.\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}.\Delta^2 y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}$$
$$= y - \alpha'.\frac{\partial y}{\partial x} + \alpha''.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha'''.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

*) S. Eulers Institt. calc. diff. P. II. C. III. §. 56.

Nimmt man hier $y = e^{mx}$, ſo wird, weil $\Delta x = 1$, $\Delta y = e^{m+xm} - e^{mx} = e^{mx}(e^m - 1)$; $\Delta^2 y = e^{mx}(e^m - 1)^2$; $\Delta^3 y = e^{mx}(e^m - 1)^3$, u. ſ. w. alſo

$$y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}.\Delta^2 y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

$$= e^{mx}\left(1 - \frac{1}{p-1}(e^m - 1) + \frac{p}{(p-1)^2}(e^m - 1)^2 - \frac{p^2}{(p-1)^3}(e^m - 1)^3 + \text{etc.}\right)$$

$$= e^{mx}\left\{1 - \frac{1}{p-1}(e^m - 1)\left(1 - \frac{p}{p-1}.(e^m - 1) + \frac{p^2}{(p-1)^2}(e^m - 1)^2 - \text{etc.}\right)\right\}$$

$$= e^{mx}\left(1 - \frac{1}{p-1}(e^m - 1).\frac{1}{1 + \frac{p}{p-1}(e^m - 1)}\right)$$

$$= \frac{(p-1)e^{mx+m}}{pe^m - 1}$$

Ferner wird, da $\frac{\partial y}{\partial x} = me^{mx}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m^2 e^{mx}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m^3 e^{mx}$, u. ſ. w.

$$y - \alpha'.\frac{\partial y}{\partial x} + \alpha''.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha'''.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.} = e^{mx}(1 - \alpha' m + \alpha'' m^2 - \alpha''' m^3 + \text{etc.})$$

Hierdurch ergiebt ſich

$$\frac{(p-1)e^m}{pe^m - 1} = 1 - \alpha' m + \alpha'' m^2 - \alpha''' m^3 + \text{etc.}$$

und wenn man m in $-m$ verwandelt

$$\frac{p-1}{p-e^m} = 1 + \alpha' m + \alpha'' m^2 + \alpha''' m^3 + \text{etc.}$$

Die Coefficienten α', α'', α''', u. ſ. w. ſind alſo einerley mit denen der Entwickelung von $\frac{p-1}{p-e^m}$ in eine Reihe nach den ſteigenden Potenzen von m, welches ſchon in (60) gefunden iſt.

Da dieſe Beſtimmung der Coefficienten eine recurrirende iſt, ſo ſoll hier noch eine independente beygefügt werden. Es ſey alſo $y = \frac{1}{x}$, ſo iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = -1x^{-2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +1.2x^3$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1.2.3x^{-4}$, u. ſ. w. Daher

$$y - \alpha' . \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha'' . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha''' . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1.\alpha'}{x^2} + \frac{1.2\alpha''}{x^3} + \frac{1.2.3\alpha'''}{x^4} + \text{etc.}$$

Ferner iſt $\Delta y = -\frac{1}{x(x+1)}$, $\Delta^2 y = \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$, $\Delta^3 y = -\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, u. ſ. w. Mithin

$$y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2} . \Delta^2 y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{p-1} . \frac{1}{x(x+1)} + \frac{p}{(p-1)^2} . \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+ \frac{p^2}{(p-1)^3} . \frac{1.2.3}{x(x+1)..(x+3)} + \text{etc.}$$

Hieraus wird

$$1 + \frac{1.\alpha'}{x} + \frac{1.2\alpha''}{x^2} + \frac{1.2.3\alpha'''}{x^3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{p}{(p-1)^2}\cdot\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}$$
$$+ \frac{p^2}{(p-1)^3}\cdot\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \text{etc.}$$

Man ſetze hier ſtatt $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$, $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+2)}$, u. ſ. w. ihre Entwickelungen nach den Potenzen von $\frac{1}{x}$, indem man

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{{}'A}{x^2} + \underset{(1)}{\frac{{}'B}{x^3}} - \frac{{}'C}{x^4} + \frac{{}'D}{x^5} - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x^2} - \underset{(1,\,2)}{\frac{{}'A}{x^3}} + \frac{{}'B}{x^4} - \frac{{}'C}{x^5} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x^3} - \underset{(1,\,2,\,3)}{\frac{{}'A}{x^4}} + \frac{{}'B}{x^5} - \text{etc.}$$

u. ſ. w. macht, ſo giebt die Vergleichung der Coeffi⸗cienten zu den gleichnamigen Potenzen von $\frac{1}{x}$

$$\alpha' = \frac{1}{p-1}$$

$$1.2\alpha'' = \frac{1.2p}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1}\,{}'A_{(1)}$$

$$1.2.3\alpha''' = \frac{1.2.3p^2}{(p-1)^3} - \frac{1.2p}{(p-1)^2}\,{}'A_{(1,2)} + \frac{1}{p-1}\cdot{}'B_{(1)}$$

$$1.2.3.4\alpha^{IV} = \frac{1.2.3.4p^3}{(p-1)^4} - \frac{1.2.3p^2}{(p-1)^3}\,{}'A_{(1,2,3)} + \frac{1.2p}{(p-1)^2}\,B_{(1,2)}$$
$$- \frac{1}{p-1}\cdot{}'C_{(\ )}$$

u. ſ. w.,

u. ſ. w., wo das Geſetz des Fortgangs offenbar iſt. Dieſe Ausdrücke für die Coefficienten α', α'', α''', u. ſ. w. ſind freylich nicht ſo bequem, als die in (59) aus (7) mitgetheilten. Die letzteren laſſen ſich übrigens auch aus der erſten hier gefundenen Formel für s ableiten, wovon jedoch die Ausführung für dieſen Artikel zu weitläufig werden würde.

62. Man ſetze $p = -1$, und bezeichne die Werthe, welche α', α'', α''' u. ſ. w. für dieſen Werth von p erhalten, durch β', β'', β''' u. ſ. w., ſo wird, je nachdem x gerade oder ungerade iſt,

$$a - a' + a'' - a''' + \ldots \pm y = C \pm \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\beta' . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta'' . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\beta''' . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\beta^{IV} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\right)$$

Oben in (56) wurde gefunden

$$a - a' + a'' - a''' + \ldots . \pm y = C \pm \left(\frac{1}{2}y + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2} . \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\ 2.\ 3.\ 4} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots.6} . \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}\right)$$

Weil beide Summenformeln identiſch ſeyn müſſen, ſo folgt zuerſt $\beta''=0$, $\beta^{IV}=0$, $\beta^{VI}=0$ u. ſ. w., d. i.

$$\underset{(1)}{{}'A} - \frac{1.2}{2} = 0$$

$$\underset{(1)}{{}'C} - \frac{1.2}{2}\underset{(1,2)}{{}'B} + \frac{1.2.3}{2^2}\underset{(1,2,3)}{{}'A} - \frac{1.2.3.4}{2^3} = 0$$

$$\underset{(1)}{{}'E} - \frac{1.2}{2}\underset{(1,2)}{{}'D} + \frac{1.2.3}{2^2}\underset{(1,2,3)}{{}'C} - \frac{1.2..4}{2^3}\underset{(1,2..4)}{{}'B} + \frac{1.2...5}{2^4}\underset{(1,2,..5)}{{}'A} - \frac{1.2...6}{2^5} = 0$$

u. ſ. w.

Ferner ergeben ſich auch noch folgende Ausdrücke für die Bernoulliſchen Zahlen

$$\mathfrak{B}^{(1)} = + \frac{1}{2^2 - 1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathfrak{B}^{(2)} = - \frac{2}{2^4 - 1} \left\{ \frac{1.2.3}{2^3} - \frac{1.2}{2^2}\, {}'\!\underset{(1,2)}{A} + \frac{1}{2}\, {}'\!\underset{(1)}{B} \right\}$$

$$\mathfrak{B}^{(3)} = + \frac{3}{2^6 - 1} \left\{ \frac{1.2.3.4.5}{2^6} - \frac{1.2.3.4}{2^4}\, {}'\!\underset{(1,2,3,4)}{A} + \frac{1.2.3}{2^3}\, {}'\!\underset{(1,2,3)}{B} - \frac{1.2}{2^2}\, {}'\!\underset{(1,2)}{C} + \frac{1}{2}\, {}'\!\underset{(1)}{D} \right\}$$

u. ſ. w.

Will man hiernach einen Ausdruck für die mte Bernoulliſche Zahl bilden, ſo führt die Hindenburgiſche Bezeichnungsart, wo der Claſſenexponent durch die Stelle des Claſſenzeichens im Alphabete angezeigt wird, in der Bezeichnung der (2m—2)ten Claſſe auf Umſchweife. Dieſe werden vermieden, wenn man mit Poſſelt (Dissertatio de quibusdam functionibus symmetricis. Götting., 1818. §. 3) die mte Claſſe der Combinationen mit Wiederholungen aus den n erſten Elementen des Index durch ${}^{m}(0)^{n}$ bezeichnet. Wendet man dieſe auch in anderer Rückſicht vorzügliche Bezeichnungsart hier an, ſo wird

$$\mathfrak{B}^{(m)} = \frac{m}{2^{2m} - 1} \cdot \left\{ \frac{1.2.3 \ldots 2m-1}{2^{2m-1}} - \frac{1.2.3 \ldots 2m-2}{2^{2m-2}} \cdot {}^{1}(0)^{2m-2} + \frac{1.2.3 \ldots 2m-3}{2^{2m-3}} \cdot {}^{2}(0)^{2m-3} - \frac{1.2.3 \ldots 2m-4}{2^{2m-4}} \cdot {}^{3}(0)^{2m-4} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot {}^{2m-2}(0)^{1} \right\} \cdot (-1)^{m-1}$$

$$(1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

63. Die Summe der unendlichen Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder

$$p^x y - p^{x+1} y' + p^{x+2} y'' - p^{x+3} y''' + \text{etc.}$$

wo $y = \varphi x$, $y' = \varphi(x+1)$, $y'' = \varphi(x+2)$ u. ſ. w., iſt aus (61), wenn man dort $-p$ ſtatt p ſetzt,

$$= \frac{p^x}{p+1}\left(y - \frac{p}{p+1}\Delta y + \frac{p^2}{(p+1)^2}\Delta^2 y - \frac{p^3}{(p+1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}\right)$$

Drückt man die eingeklammerte Reihe ſo aus

$$(p+1)y - p\left(y + \frac{1}{p+1}\Delta y - \frac{p}{(p+1)^2}\Delta^2 y + \frac{p^2}{(p+1)^3}\Delta^3 y - \frac{p^3}{(p+1)^4}\Delta^4 y + \text{etc.}\right)$$

ſo läßt ſich auf die in p multiplicirte Reihe die in (61) gewieſene Umwandlung, nach welcher

$$y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

$$= y - \frac{1}{p-1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{p^2+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

iſt, anwenden, wenn man p negativ ſetzt, als wodurch

$$y + \frac{1}{p+1}\Delta y - \frac{p}{(p+1)^2}\Delta^2 y + \frac{p^2}{(p+1)^3}\Delta^3 y - \text{etc.}$$

$$= y + \frac{1}{p+1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{p-1}{1.2(p+1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{p^2-4p+1}{1.2.3(p+1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \text{etc.}$$

alſo

$$p^x y - p^{x+1} y' + p^{x+2} y'' - p^{x+3} y''' + \text{etc.}$$

$$= \frac{p^x}{p+1}\left(y - \frac{p}{p+1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{p(p-1)}{1.2(p+1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{p(p^2-4p+1)}{1.2.3(p+1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{p(p^3-11p^2+11p-1)}{1.2.3.4(p+1)^4}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\right)$$

wird.

Das Geſetz, nach welchem die Coefficienten der eingeſchloſſenen Reihe aus einander entſtehen, ergiebt ſich ſo.

Dieſe Reihe ſey

$$Ay - \frac{B}{p+1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{C}{(p+1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{D}{(p+1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

Ferner ſetze man die Reihe, welche entſteht, wenn man in der in dem Ausdrucke für $S.yp^x$ mit $\frac{p^{x+1}}{p-1}$ multiplicirten Reihe p negativ nimmt,

$$= y + \alpha'.\frac{\partial y}{\partial x} - \beta'.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \gamma'.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \text{etc.}$$

ſo iſt $\alpha' = \frac{1}{p+1}$, $\beta' = \frac{p-1}{1.2(p+1)^2}$, $\gamma =$ $\frac{p^2-4p+1}{1.2.3(p+1)^3}$, u. ſ. w. alſo

$A = 1$
$B = p(p+1)\alpha'$
$C = p(p+1)^2\beta'$
$D = p(p+1)^3\gamma'$
u. ſ. w.

Aus (60) aber iſt

$$(p+1)\alpha' = 1$$
$$2(p+1)\beta' = (p-1)\alpha'$$
$$3(p+1)\gamma' = (p-1)\beta' - p\alpha'\alpha'$$
$$4(p+1)\delta' = (p-1)\gamma' - p.2\alpha'\beta'$$

u. ſ. w.

Werden dieſe Gleichungen nach der Reihe mit p, $p(p+1)$, $p(p+1)^2$, u. ſ. w. multiplicirt und ſtatt $p(p+1)\alpha'$, $p(p+1)^2\beta'$, $p(p+1)^3\gamma'$, u. ſ. w. ihre Werthe geſetzt, ſo erhält man folgende Relationen

$$B = p$$
$$2C = (p-1)B$$
$$3D = (p-1)C - BB$$
$$4E = (p-1)D - 2BC$$
$$5F = (p-1)E - 2BD - CC$$
$$6G = (p-1)F - 2BE - 2CD$$

etc.

Euler giebt die Summenformel und dieſe Relationen in den Nou. Act. Petrop. T. II; nur ſteht bey ihm n ſtatt p, und X, X′, X″ u. ſ. w. ſtatt y, y′, y″ u. ſ. w. Seine Ableitung iſt eine andere.

64. So wie ſich Differentialformeln und Differentialgleichungen durch Reihen integriren laſſen, ſo kann man umgekehrt zu einer vorgegebenen Reihe die Differentialformel oder Differentialgleichung ſuchen, deren Integration die vorgegebene Reihe giebt. Läßt ſich alsdann das Integral noch auf eine andere Weiſe, und zwar durch einen geſchloſſenen Ausdruck, darſtellen, ſo erhält man die Summe der vorgegebenen Reihe. In andern Fällen wird zwar nicht die wirkliche Summe, aber doch ein veränderter Ausdruck der Reihe erhalten, der dazu dienen kann, der Summe der Reihe ſich leichter und ſchneller als auf dem gewöhnlichen Wege zu näheren. Leibnitz und Joh. Bernoulli haben dieſe Summirungsmethode zuerſt erdacht (Commerc. epistol. T. I. p. 213.); Euler hat ſie nach-

her vervollkommnet. Sie ſetzt übrigens voraus, daß die Glieder der zu ſummirenden Reihe in die Potenzen einer unbeſtimmten x multiplicirt ſind. Wofern alſo dieſes nicht der Fall iſt, ſo muß man erſt eine Reihe formiren, in welcher die angezeigte Beſchaffenheit der Glieder Statt hat, und von der die vorgegebene Reihe ein beſonderer Fall iſt, d. h., aus ihr hervorgeht, wenn dem x ein beſtimmter Werth, wofür man am einfachſten und bequemſten 1 nimmt, beygelegt wird, und dieſe Reihe nun zu ſummiren ſuchen. Die Exponenten von x in der zu formirenden Reihe hat man ſo zu wählen, daß dadurch die Hauptabſicht der ganzen Operation, welche iſt, durch ein- oder mehrmaliges Differentiiren, der angenommenen Reihe mit anderen Umwandlungsmitteln nach Befinden verbunden, entweder zu einer für ſich ſummirbaren Reihe, von welcher alsdann der Rückweg zu der vorgegebenen durch Integration genommen wird, oder wieder zu der urſprünglichen Reihe ſelbſt zu gelangen, in welchem letzteren Falle die Summirung dann auf die Integration einer Differentialgleichung gebracht wird. Beyſpiele werden dieſe allgemeinen Bemerkungen am beſten erläutern.

65. Es ſey die Reihe $\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+r)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2r)} +$ etc. in inf. zu ſummiren.

Zu dem Ende nehme man die Reihe $\frac{x^q}{pq} + \frac{x^{q+r}}{(p+r)(q+r)} + \frac{x^{q+2r}}{(p+2r)(q+2r)} +$ etc. in inf., aus welcher die vorgegebene wird, wenn $x = 1$ iſt, und ſetze die Summe derſelben s. Durch Differentiirung entſteht nun

$$\frac{x^{q-1}}{p} + \frac{x^{q+r-1}}{p+r} + \frac{x^{q+2r-1}}{p+2r} + \text{etc.} = \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Man multiplicire beiderſeits mit x^{p-q+1}, und nehme aufs neue wieder die Differentiale, ſo wird

$$\partial x(x^{p-1} + x^{p+r-1} + x^{p+2r-1} + \text{etc.}) = \partial.\left(x^{p-p+1}.\frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

d. i.

$$\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r} = \partial.\left(x^{p-q+1}.\frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

folglich, wenn man integrirt,

$$x^{p-q+1}.\frac{\partial s}{\partial x} = \int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$$

wo, weil die Größe linker Hand für $x = 0$ verſchwindet, auch das Integral rechter Hand für $x = 0$ verſchwinden muß. Man hat nun ferner

$$\partial s = x^{q-p-1}\partial x\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$$

alſo

$$s = \int x^{q-p-1}\partial x\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}.$$

Es iſt durch theilweiſe Integration

$$\int x^{q-p-1}\partial x\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r} = \frac{x^{q-p}}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r} - \frac{1}{q-p}\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}.$$

Da $\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$ ſchon für $x = 0$ verſchwindet, ſo muß auch $\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}$ für $x = 0$ verſchwinden, damit für $x = 0$, auch $s = 0$ werde.

Wird $x = 1$ geſetzt, ſo entſteht

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}-\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}$$

$$=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}$$

wo die Integrale von $x=0$ bis $x=1$ zu erſtrecken ſind.

Iſt $p=q$, ſo ſetze man $q=p+\omega$, wo ω unendlich klein iſt, ſo wird

$$\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}=\frac{1}{\omega}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x\ )}{1-x^r}$$

$$=\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}\log\frac{1}{x}$$

weil $\frac{1-x^\omega}{\omega}=-\log x=\log\frac{1}{x}$ iſt.

Demnach hat man

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+r)^2}+\frac{1}{(p+2r)^2}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}\log\frac{1}{x}$$

das Integral von $x=0$ bis $x=1$ genommen.

65[b]. Nimmt man in der Reihe $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+r)^2}+\frac{1}{(p+2r)^2}+$ etc. $p=r=1$, ſo wird nach der letzten Formel $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+$ etc. in inf. $=\int\frac{\partial x}{1-x}\log\frac{1}{x}$ das Integral innerhalb der angegebenen Gränzen genommen. Man wird dieſes nicht

gebrauchen, um die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc., welche anderswoher bekannt, und $= \frac{1}{6}\pi^2$ iſt, zu finden; ſondern vielmehr durch die bekannte Summe der Reihe den Werth des beſtimmten Integrals angeben. Es iſt alſo von $x = 0$, bis $x = 1$

$$\int \frac{\partial x}{1 - x} \log \frac{1}{x} = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Setzt man $p = 1$, $r = 2$, ſo iſt innerhalb derſelben Gränzen

$$\int \frac{\partial x}{1 - x^2} \log \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{8}\pi^2$$

Hieraus folgt, da überhaupt, wenn die Integrale für $x = 0$ verſchwinden,

$$\int \frac{\partial x}{1 + x} \log \frac{1}{x} = 2\int \frac{\partial x}{1 - x^2} \log \frac{1}{x} - \int \frac{\partial x}{1 - x} \log \frac{1}{x}$$

von $x = 0$ bis $x = 1$

$$\int \frac{\partial x}{1 + x} \log \frac{1}{x} = \frac{1}{12}\pi^2.$$

Setzt man aber $p = 2$, $r = 2$, ſo wird auf ähnliche Art

$$\int \frac{x\partial x}{1 - x^2} \log \frac{1}{x} = \frac{1}{24}\pi^2.$$

66. Verlangt man von der eben ſummirten unendlichen Reihe bloß die Summe der n erſten Glieder, ſo ſuche man die unendliche Summe von dem $n + 1$ten

Gliede an, d. i., die Summe von $\frac{1}{(p+nr)(q+nr)}$ $+ \frac{1}{(p+(n+1)r)(q+(n+1)r)} +$ etc. und ziehe ſolche von der vorigen Summe ab, ſo bleibt die geſuchte. Die abzuziehende Summe findet ſich aus der vorigen, wenn $p+nr$, $q+nr$ beziehungsweiſe ſtatt p, q geſetzt werden. Daher iſt

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{(p+(n-1)r)(q+(n-1)r)}=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}$$
$$-\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p+nr-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}$$
$$=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})(1-x^{nr})}{1-x^r}$$

ſämmtliche Integrale von $x=0$ bis $x=1$ genommen.

67. Exempel. Es ſey $p=2$, $q=6$, $r=2$, ſo wird

$$\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}=\frac{1}{4}\int\frac{x\partial x(1-x^4)}{1-x^2}$$
$$=\frac{1}{4}\int x\partial x(1+x^2)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4\right)$$

welches für $x=0$ verſchwindet. Macht man nun $x=1$, ſo wird

$$\frac{1}{2.6}+\frac{1}{4.8}+\frac{1}{6.10}+\text{etc. in inf.}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}.$$

Ferner wird

$$\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})(1-x^{nr})}{1-x^r}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{x\partial x(1-x^4)(1-x^{2n})}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{4}\int x\partial x(1+x^2)(1-x^{2n})$$

$$= \frac{1}{4}(\int x\partial x + \int x^3\partial x - \int x^{2n+1}\partial x - \int x^{2n+3}\partial x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+4}}{2n+4}\right)$$

welches für $x = 0$, ſchon 0 wird. Setzt man nun $x = 1$, ſo iſt

$$\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.8} + \frac{1}{6.10} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+4)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}.\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$$

So oft als $q - p$, wie in dieſem Beyſpiel, ein Vielfaches von r oder $= r$ iſt, läßt ſich ſowohl die endliche als die unendliche Summe der Reihe $\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+r)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2r)} +$ etc. algebraiſch angeben.

68. Da $\frac{1}{(p+zr)(q+zr)} = \frac{1}{q-p}.\frac{1}{p+zr} - \frac{1}{q-p}.\frac{1}{q+zr}$, wie ſich nach dem in dem Art., Function, 20., u. ſ. w. gelehrten Verfahren ergiebt, ſo iſt die Reihe $\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+r)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2r)}$ + etc. der Unterſchied zweyer Reihen, wovon die erſte

$$\frac{1}{q-p}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+r}+\frac{1}{p+2r}+\text{etc.}\right\},$$ die andere aber

$$\frac{1}{q-p}\left\{\frac{1}{q}+\frac{1}{q+r}+\frac{1}{q+2r}+\text{etc.}\right\}$$ iſt.

Die Summe der erſten ins Unendliche fortgeſetzten Reihe nach der eben erklärten Methode geſucht iſt $\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$, die ähnliche Summe der anderen $\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}$, beide Integrale von $x=0$ bis $x=1$ erſtreckt. Daher iſt

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\text{etc. in inf.}$$
$$=\frac{1}{q-p}\left\{\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}-\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}\right\}$$
$$=\frac{1}{q-p}.\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

wo die Gränzen der Integrale in Klammern beygefügt ſind. Die ſo erhaltene Summe iſt mit der vorigen einerley. Die endliche Summe wird entweder wie vorhin oder aus den endlichen Summen der Partialreihen gefunden.

69. Es iſt leicht, die vorgegebene Reihe ſo umzuformen, daß der Unterſchied in der Reihe der Exponenten von $x=1$ wird. Zu dem Ende ſetze man $p=\lambda r$, $q=\mu r$, ſo wird

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{rr}\left\{\frac{1}{\lambda\mu}+\frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)}+\frac{1}{(\lambda+2)\,\mu+2)}+\text{etc.}\right\}$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe findet ſich nach der hier gelehrten Art $= \frac{1}{\mu-\lambda}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^{\mu-\lambda})}{1-x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$, und dadurch

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{1}{r(q-p)}\cdot\int\frac{x^{\frac{p}{r}-1}\partial x\left(1-x^{\frac{q-p}{r}}\right)}{1-x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

70. Eine ſolche Umbildung der vorgegebenen Reihe, wie jetzt ausgeführt worden, iſt alsdann nothwendig, wenn in den arithmetiſchen Reihen, deren gleichſtellige Glieder die Factoren der Nenner in der vorgegebenen Reihe ſind, die Differenz nicht dieſelbe iſt.

Es ſey z. E. zu ſummiren die Reihe

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+t)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2t)}+\text{etc.}$$

Setzt man hier $p=\lambda r$, $q=\mu t$, ſo erhält man ſtatt der vorgegebenen Reihe dieſe zu ſummiren

$$\frac{1}{rt}\left\{\frac{1}{\lambda\mu}+\frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)}+\frac{1}{(\lambda+2)(\mu+2)}+\text{etc.}\right\}$$

deren Summe

$$=\frac{1}{rt(\mu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^{\mu-\lambda})}{1-x}$$

$$=\frac{1}{qr-pt}\int\frac{x^{\frac{p}{r}-1}\partial x\left(1-x^{\frac{q}{t}-\frac{p}{r}}\right)}{1-x}$$

die Integrale von $x=0$ bis $x=1$ genommen, iſt. Iſt $\frac{q}{t}-\frac{p}{r}$ eine ganze, poſitive oder negative Zahl, ſo läßt ſich die Summe algebraiſch angeben. In dieſem

Falle iſt nämlich $1 - x$ ein Theiler von $1 - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}}$ oder von $1 - x^{\frac{p}{r} - \frac{q}{t}}$. Es iſt aber $1 - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}}$ $= - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}}\left(1 - x^{\frac{p}{r} - \frac{q}{t}}\right)$.

71. Exempel. $p = 3$, $q = 5$, $r = 2$, $t = 3$. Hier wird

$$\frac{1}{qr - pt}\int\frac{x^{\frac{p}{r}-1}\partial x\left(1 - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}}\right)}{1 - x} =$$

$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x(1 - x^{\frac{1}{6}})}{1 - x} = \int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1 - x} - \int\frac{x^{\frac{2}{3}}\partial x}{1 - x}.$$

Es iſt

$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1 - x} = - 2x^{\frac{1}{2}} + \log\frac{1 + x^{\frac{1}{2}}}{1 - x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int\frac{x^{\frac{2}{3}}\partial x}{1 - x} = - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \log(1 - x^{\frac{1}{3}})$$

$$+ \frac{1}{2}\log(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})$$

$$- (\sqrt{3}).\ \text{Arc. tang}\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2 + x^{\frac{1}{3}}}$$

Hieraus wird, weil

$$\log(1 - x^{\frac{1}{3}}) - \log(1 - x^{\frac{1}{2}}) = \log\frac{1 - x^{\frac{2}{6}}}{1 - x^{\frac{3}{6}}} = \log\frac{1 + x^{\frac{1}{6}}}{1 + x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1 - x} - \int\frac{x^{\frac{2}{3}}\partial x}{1 - x} = - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

$$+ \log\frac{(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{6}})}{(1 + x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}})\sqrt{(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}}$$

$$+ 3^{\frac{1}{2}}.\ \text{Arc. tang}\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2 + x^{\frac{1}{3}}}.$$

welcher Ausdruck für $x = 0$ ſchon verſchwindet, alſo keiner Conſtante bedarf. Macht man nun $x = 1$, ſo wird

$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{7\cdot11}+\frac{1}{9\cdot14}+\text{etc. in inf.}$$

$$= -\frac{1}{2}+\log\frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\pi\sqrt{3}.$$

Lorgna, aus deſſen Specimen de ſeriebus convergentibus, §. XIX. Exemp. IV. die Reihe genommen iſt, giebt ihre Summe $= \frac{1}{3}\pi+\log\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}$, alſo in Decimaltheilen $= 0{,}6910385\ldots.$ an, welches irrig iſt, da die Summe der Reihe offenbar kleiner als die Summe von $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+$ etc. in inf., d. i., $<\frac{1}{6}$ iſt. Lorgna begeht aber auch den Fehler, $\log(1-x^{\frac{1}{3}})$ gegen $-\log(1-x^{\frac{1}{2}})$ für $x = 1$ ſich aufheben zu laſſen, und rechnet den Bogen tang $\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2+x^{\frac{1}{3}}}$ doppelt, ſtatt ihn einfach zu nehmen. Daß der hier gegebene Ausdruck für die Summe richtig ſey, davon überzeugt man ſich leicht, wenn man nach der in dem Art., Summirbare Reihe, 22. gezeigten Art Gränzen für die Summe der vorgegebenen Reihe $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{7\cdot11}+$ etc. ſucht, indem man ſie mit der Reihe $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{9\cdot11}+$ etc. vergleicht, deren Summe, wie vorhin angegeben iſt, $\frac{1}{6}$ beträgt. Die Summe der 10 erſten Glieder jener nämlich iſt

= 0,1302480; bey dieſer iſt die Summe der 10 erſten Glieder = 0,1449276; daher die Ergänzung zu dem Totalwerthe = 0,0217391. Da nun die Ergänzung der erſten Reihe weniger als $\frac{5}{7}$, und mehr als $\frac{2}{3}$ der Ergänzung der zweyten beträgt, ſo iſt der Totalwerth der erſten Reihe > 0,1447407 und < 0,1457759. Nach dem gefundenen Ausdrucke wird derſelbe = 0,1452656...

72. Das von 65. bis hierher angewandte Summirungsverfahren iſt einer Abkürzung fähig. Anſtatt daß man nämlich von einer vorgegebenen Reihe ausgehend durch Differentiation zu einer ſummirbaren Reihe zu gelangen ſucht, von welcher alsdann der Rückweg zu der zu ſummirenden Reihe durch die entgegengeſetzte Operation des Integrirens genommen wird, kann man ſogleich von einer angenommenen ſummirbaren Reihe ausgehen. Damit man aber von ihr durch Integration oder Differentiation oder beides zugleich zu der vorgegebenen Reihe kommen könne, muß die angenommene Reihe, von der man ausgeht, einem Theile der Form nach ſchon in der zu ſummirenden Reihe enthalten ſeyn. Es müſſen daher die Coefficienten derſelben in den Coefficienten der vorgegebenen Reihe als Factoren vorkommen. Ferner muß die Reihe der Exponenten von x in der angenommenen Reihe, wofern ſie nicht ſchon anderweitig beſtimmt iſt, ſo beſchaffen ſeyn, daß durch die nach einer vorläufigen Multiplication mit einer Potenz von x angebrachten Operationen des Integrirens und Differentiirens die übrigen Factoren der Coefficienten der zu ſummirenden Reihe nach und nach als Factoren den Coefficienten der angenommenen Reihe zugeſellt werden mögen.

Beyſpiele werden auch hier die beſte Erläuterung des geſagten geben.

73. Es ſey die Reihe

$$\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.4.6} + \text{etc. in inf.}$$

zu ſummiren.

Eine Reihe von bekannter Summe, deren Coefficienten in den Coefficienten der vorgegebenen ſchon enthalten ſind, und in welcher der Unterſchied in der Reihe der Exponenten von x ſo groß iſt als in den drey arithmetiſchen Reihen, aus denen die Factoren der Nenner der vorgegebenen Reihe genommen werden, iſt

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.} = \log\frac{1}{1-x} \quad (\mathfrak{D})$$

Da jeder zweyte Factor in den Nennern der vorgegebenen Reihe um 1 größer iſt, als jeder erſte, ſo multiplicire man in ($\mathfrak{D}$) auf beiden Seiten mit ∂x, ſo wird durch Integration

$$\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \text{etc.} = \int \partial x \log\frac{1}{1-x} \quad (\mathfrak{h})$$

wo das Integral rechter Hand für $x = 0$ verſchwinden muß. — Weil ferner die dritten Factoren der Nenner der zu ſummirenden Reihe um 2 größer ſind als die zweyten, ſo multiplicire man in ($\mathfrak{h}$) noch auf beiden Seiten mit $x\partial x$, ſo entſteht durch Integration

$$\frac{x^4}{1.2.4} + \frac{x^5}{2.3.5} + \frac{x^6}{3.4.6} + \text{etc.} = \int x\partial x \int \partial x \log\frac{1}{1-x}$$

das Integral ſo genommen, daß es für $x = 0$ verſchwindet.

Macht man jetzt $x = 1$, ſo wird

$$\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.4.6} + \text{etc. in inf.}$$

$$= \int x\partial x \int \partial x \log\frac{1}{1-x} \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

wo die Integration noch auszuführen iſt, welche weiter keine Schwierigkeiten hat.

Die Summe der erſten n Glieder der vorgegebenen Reihe zu haben, geht man von der Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}=\int\frac{\partial x(1-x^n)}{1-x}$$

aus, und verfährt übrigens wie vorhin.

74. Die zu ſummirende Reihe ſey

$$\frac{a}{mnp}+\frac{a+b}{(m+q)(n+r)(p+t)}+\frac{a+2b}{(m+2q)(n+2r)(p+2t)}$$
$$+\text{ etc.}$$

Man ſetze $\frac{a}{b}=\alpha$, $\frac{m}{q}=\lambda$, $\frac{n}{r}=\mu$, $\frac{p}{t}=\nu$, ſo wird die Reihe ſo ausgedruckt

$$\frac{b}{qrt}\left(\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu}+\frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{ etc.}\right)$$

Die eingeklammerte Reihe zu ſummiren, iſt

$$\frac{x^\lambda}{\lambda}+\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2}+\text{ etc.}=\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}.$$

das Integral rechter Hand ſo genommen, daß es $=0$ wird für $x=0$.

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit $x^{\mu-\lambda-1}\partial x$ und integrirt, ſo wird

$$\frac{x^\mu}{\lambda\mu}+\frac{x^{\mu+1}}{(\lambda+1)(\mu+1)}+\frac{x^{\mu+2}}{(\lambda+2)(\mu+2)}+\text{ etc.}$$
$$=\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}$$

wo das Integral rechts für $x=0$ verſchwinden muß.

Wird hier aufs neue beiderſeits mit $x^{\nu-\mu-1}\partial x$ multiplicirt, und integrirt, ſo entſteht

$$\frac{x^{\nu}}{\lambda\mu\nu}+\frac{x^{\nu+1}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{x^{\nu+2}}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$=\int x^{\nu-\mu-1}\partial x\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}\quad(24)$$

wo das Integral rechter Hand gleichfalls für $x=0$ Null werden muß.

Um endlich noch die Factoren α, $\alpha+1$, $\alpha+2$ u. ſ. w. in die Zähler der letzten Reihe zu bringen, multiplicire man in (24) auf beiden Seiten mit $x^{\alpha-\nu}$, nehme die Differentiale, und dividire alles durch ∂x. Dadurch wird

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda\mu\nu}+\frac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{(\alpha+2)x^{\alpha+1}}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$=(\alpha-\nu)x^{\alpha-\nu-1}\int x^{\nu-\mu-1}\partial x\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}$$

$$+\,x^{\alpha-\mu-1}\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}$$

Integrirt man theilweiſe und reducirt gehörig, ſo wird

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda\mu\nu}+\frac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{(\alpha+2)x^{\alpha+1}}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$=\frac{(\alpha-\lambda)x^{\alpha-\lambda-1}}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}+\frac{(\alpha-\mu)x^{\alpha-\mu-1}}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x}{1-x}$$

$$+\frac{(\alpha-\nu)x^{\alpha-\nu-1}}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x}{1-x}$$

ſämmtliche Integrale ſo genommen, daß ſie für $x=0$ verſchwinden.

Setzt man jetzt $x=1$, ſo wird erhalten

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu}+\frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$= \frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x} + \frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x}{1-x}$$
$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x}{1-x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

Da $\frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)} = \frac{\alpha-\lambda}{(\lambda-\mu)(\nu-\lambda)} + \frac{\alpha-\nu}{(\nu-\lambda)(\mu-\nu)}$, ſo erhält man auch für die vorige Summe folgende drey zweygliedrige Ausdrücke, in welchen alle Integrale von $x=0$ bis $x=1$ zu nehmen ſind.

$$\frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^{\mu-\lambda})}{1-x}$$
$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x(1-x^{\mu-\nu})}{1-x};$$

$$\frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x(1-x^{\lambda-\mu})}{1-x}$$
$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x(1-x^{\lambda-\nu})}{1-x};$$

$$\frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^{\nu-\lambda})}{1-x}$$
$$+ \frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x(1-x^{\nu-\mu})}{1-x}.$$

Dieſe Ausdrücke, von denen der zweyte aus dem erſten durch gegenſeitige Vertauſchung von λ und μ, der dritte aus dem erſten durch Vertauſchung von μ und ν gegen einander entſteht, zeigen, daß die Summe der Reihe $\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu} + \frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} +$ etc. mithin auch die der vorgegebenen $\frac{a}{mnp} + \frac{a+b}{(m+q)(n+r)(p+t)}$ $+$ etc. algebraiſch iſt, wenn $\mu-\lambda$ und $\mu-\nu$

oder $\frac{n}{r}-\frac{m}{q}$ und $\frac{n}{r}-\frac{p}{t}$ ganze Zahlen, ſie mögen poſitiv oder negativ ſeyn, ſind, wodurch auch $\nu-\lambda$ eine ſolche Zahl wird. Übrigens wählt man in einem vorkommenden Falle von den obigen drey Ausdrücken jedesmal den, welcher die leichteſte Rechnung gewährt.

75. Exempel. $a=1$, $b=3$, $m=1$, $n=4$, $p=7$, $q=1$, $r=2$, $t=2$, alſo $\alpha=\frac{1}{3}$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $\nu=\frac{7}{2}$. Hier wird nach der erſten Formel

$$\frac{1}{1.4.7}+\frac{4}{2.6.9}+\frac{7}{3.8.11}+\text{etc.}=$$
$$\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{15}\int\partial x+\frac{38}{45}\int\frac{x\partial x(1-x^{\frac{3}{2}})}{1-x}\right)\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$
$$=-\frac{1}{5}\int\partial x+\frac{19}{30}\int\frac{x\partial x(1-x^{\frac{3}{2}})}{1-x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$
$$=\frac{499}{450}-\frac{19}{15}\log 2.$$

Lorgna giebt in der vorhin (70) angezogenen Schrift, S. 75., die Summe durch einen Rechnungsfehler wieder unrichtig, nämlich $=\frac{22}{45}-\frac{2}{3}\log 2=$ 0,02679076...., alſo kleiner als das erſte Glied $\frac{1}{28}=$ 0,035714...., an. Übrigens hat er nach einer Formel gerechnet, welche mit der dritten der zuletzt gegebenen übereinkommt.

76. Um die Summe der Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu}-\frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}$$

— etc. und dadurch auch dieſer

$$\frac{a}{mnp} - \frac{a+b}{(m+q)(n+r)(p+t)} + \frac{a+2b}{(m+2q)(n+2r)(p+2t)} - \text{etc.}$$

zu haben, hat man nur nöthig in den Nennern der Integrale in (73) $1+x$ ſtatt $1-x$ zu ſetzen, alles übrige aber ungeändert zu laſſen. Sind alsdann $\mu-\lambda$ und $\mu-\nu$, mithin auch $\nu-\lambda$, poſitive oder negative gerade Zahlen, ſo wird die Summe algebraiſch.

Exempel. $a=2$, $b=1$, $m=1$, $n=3$, $p=5$, $q=1$, $r=1$, $t=1$. Hier iſt $\alpha=2=a$, $\lambda=1=m$, $\mu=3=n$, $\nu=5=p$, und es wird nach der erſten Formel

$$\frac{2}{1.3.5} - \frac{3}{2.4.6} + \frac{4}{3.5.7} - \frac{5}{4.6.8} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{8}\int\frac{\partial x(1-x^2)}{1+x} - \frac{3}{8}\int\frac{x^4\partial x(1-x^{-2})}{1+x}$$
$$= \frac{1}{8}\int\partial x(1-x) + \frac{3}{8}\int x^2\partial x(1-x)$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

wenn man die Integrale, wie erfordert wird, von $x=0$ bis $x=1$ erſtreckt.

77. Die Summe der l erſten Glieder der Reihe

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu} + \frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} + \frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}$$

$+$ etc. findet ſich nach Anleitung von (65)

$$= \frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^l)(1-x^{\mu-\lambda})}{1-x}$$
$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x(1-x^l)(1-x^{\mu-\nu})}{1-x}$$

wo die Integrale innerhalb der oft genannten Gränzen zu nehmen ſind, und wo man auch λ und μ oder μ und ν gegenſeitig vertauſchen kann.

Schreibt man hier in den Nennern der Integrale $1+x$ ſtatt $1-x$, ſo erhält man die Summe der l erſten Glieder der Reihe

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu} - \frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} + \frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}$$

— etc., wofern l gerade iſt. Iſt es ungerade, ſo kommt in den Zählern der Integrale noch $1+x^l$ ſtatt $1-x^l$. Die Bedingungen, unter denen die Summe algebraiſch wird, ſind dieſelben wie in (74) und (76).

Hiernach wird die Summe der l erſten Glieder der Reihe $\frac{2}{1.3.5} - \frac{3}{2.4.6} + \frac{4}{3.5.7}$ — etc.

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4} \mp \frac{1}{l+1} \pm \frac{1}{l+2} \mp \frac{3}{l+3} \pm \frac{3}{l+4}\right)$$

die oberen Vorzeichen für ein gerades l, die unteren für ein ungerades genommen. Lorgna hat nur den Fall, wo l gerade iſt. Auch ſteht bey ihm wieder fehlerhaft $\frac{2}{2z+2}$ ſtatt $\frac{1}{2z+2}$, indem nämlich $l=2z$ iſt.

78. Die Glieder der zu ſummirenden Reihe können auch in die Glieder einer geometriſchen Reihe multiplicirt ſeyn, ohne daß das Verfahren ſich ändert.

Es ſey z. B. zu ſummiren die Reihe

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{3.5}\cdot\frac{1}{9} + \frac{4}{5.7}\cdot\frac{1}{27} + \frac{5}{7.9}\cdot\frac{1}{81} + \text{etc. in inf.}$$

Da

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3^2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3^3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3^4} + \text{etc.} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{3}x}$$

ſo wird, wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{1}{2}\partial x$ multiplicirt, und integrirt

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3^3}+\text{etc.}=\frac{1}{6}\cdot\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

das Integral rechter Hand ſo genommen, daß es für $x=0$ verſchwindet.

Multiplicirt man hier aufs neue mit $\frac{1}{2}\partial x$ und integrirt, ſo wird

$$\frac{1}{1.3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{1}{3.5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3^2}+\frac{1}{5.7}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{3^3}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{12}\int\partial x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

wo das Integral rechts gleichfalls für $x=0$ verſchwinden muß.

Um noch die Factoren 2, 3, 4, u. ſ. w., welche die Zähler der vorgegebenen Reihe bilden, in die Zähler der Glieder der letzten Reihe zu bringen, multiplicire man beiderſeits mit $x^{\frac{1}{2}}$, nehme die Differentiale und dividire alles mit ∂x. Dadurch wird erhalten

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{4}{5.7}\left(\frac{x}{3}\right)^3+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{24}\,x^{-\frac{1}{2}}\int\partial x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}+\frac{1}{12}\,x^{\frac{1}{2}}\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

Es iſt durch theilweiſe Integration

$$\int\partial x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}=x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}-\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

wo, wie man leicht ſieht, auch $\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$ für $x=0$ verſchwinden muß. Hierdurch entſteht

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{4}{5.7}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{1}{8}\,x^{\frac{1}{2}}\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}-\frac{1}{24}\,x^{-\frac{1}{2}}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x},$$

und, wenn man $x=1$ macht,

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5.7}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{5}{7.9}\cdot\frac{1}{3^4}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-\frac{1}{3}x)}{1-\frac{1}{3}x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}.$$

Die Summe der erſten n Glieder der vorgegebenen Reihe zu finden, geht man von der Reihe,

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3^2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3^3}+\ldots+\frac{x^{n-\frac{3}{2}}}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}(1-(\frac{1}{3}x)^n)}{1-\frac{1}{3}x}$$

aus, und verfährt übrigens wie vorhin.

79. Das erklärte Summirungsverfahren läßt ſich auch bey Reihen, deren Glieder tranſcendente Größen ſind, anbringen.

Es ſey z. E. die Reihe

$$m\sin\varphi-\frac{1}{2}m^2\sin2\varphi+\frac{1}{3}m^3\sin3\varphi-\text{etc.}$$

zu ſummiren. Wenn man hier ſtatt $\sin\varphi$, $\sin2\varphi$, $\sin3\varphi$, u. ſ. w. ihre Werthe in Exponentialausdrücken, und $e^{\varphi\sqrt{-1}}=x$ ſetzt, ſo wird die Reihe,

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\begin{Bmatrix}mx-\frac{1}{2}m^2x^2+\frac{1}{3}m^3x^3-\frac{1}{4}m^4x^4+\text{etc.}\\-(mx^{-1}-\frac{1}{2}m^2x^{-2}+\frac{1}{3}m^3x^{-3}-\frac{1}{4}m^4x^{-4}+\text{etc.})\end{Bmatrix}$$

Die Summe der erſten eingeklammerten Reihe iſt, wie man leicht bemerkt, $\log(1+mx)$. Geſetzt aber, dieſes wäre nicht bekannt, ſo läßt es ſich ſo finden.

Da

$$m-m^2x+m^3x^2-m^4x^3+\text{etc.}=\frac{m}{1+mx}$$

ſo wird, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt, und integrirt

$$mx - \frac{1}{2}m^2x^2 + \frac{1}{3}m^3x^3 - \text{etc.} = \int \frac{m\partial x}{1+mx}$$
$$= \log(1+mx)$$

ohne Conſtans, damit $\int \frac{m\partial x}{1+mx}$ für $x = 0$, auch $= 0$ werde.

Hieraus folgt, wenn man x in x^{-1} verwandelt, die Summe der zweyten eingeklammerten und ſubtractiven Reihe $= \log(1 + mx^{-1})$; mithin iſt die Summe der vorgegebenen Reihe =

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} . \log \frac{1+mx}{1+mx^{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+me^{\varphi\sqrt{-1}}}{1+me^{-\varphi\sqrt{-1}}},$$

und wenn ſtatt $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, $e^{-\varphi\sqrt{-1}}$ ihre Werthe geſetzt werden, $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + m\cos\varphi + m\sin\varphi\sqrt{-1}}{1 + m\cos\varphi - m\sin\varphi\sqrt{-1}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \frac{m\sin\varphi}{1+m\cos\varphi} . \sqrt{-1}}{1 - \frac{m\sin\varphi}{1+m\cos\varphi} . \sqrt{-1}} =$$

Arc. tang $\frac{m\sin\varphi}{1+m\cos\varphi}$, weil $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+\text{tang}\,z\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,z\sqrt{-1}}$ $= z$.

80. Die eben erhaltene Summation ſoll uns dienen die Summe folgender Reihe

Arc. tang $\frac{a}{1+b}$ + Arc. tang $\frac{a}{4+b}$ + Arc. tang $\frac{a}{9+b}$ + etc. in inf., deren allgemeines Glied

Arc. tang $\frac{a}{xx+b}$ iſt, zu finden.

Da nämlich $\frac{a}{xx+b} = \frac{a:xx}{1+b:xx}$, ſo wird, wenn

man $\frac{a}{b} = \text{tang}\,\psi$, und $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{xx} = m$ ſetzt, und zur Abkürzung $\sqrt{(aa+bb)} = c$ macht, $\frac{a}{xx+b}$ $= \frac{m\sin\psi}{1+m\cos\psi}$, und

$$\text{Arc. tang}\,\frac{a}{xx+b} = \frac{c}{xx}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{x^4}\sin 2\psi$$
$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{x^6}\sin 3\psi - \frac{1}{4}\cdot\frac{c^4}{x^8}\sin 4\psi + \text{etc.}$$

Setzt man hier x nach und nach $= 1, 2, 3, 4$ etc. ſo wird die zu ſummirende Reihe in folgende Partialreihen zerlegt

$$\frac{c}{1^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{1^4}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{1^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+\frac{c}{2^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{2^4}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{2^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+\frac{c}{3^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{3^4}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{3^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+\frac{c}{4^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4^2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{4^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+ \text{etc. in inf.}$$

Zieht man hier die Verticalreihen zuſammen, ſo erhält man ſtatt der vorgegebenen Reihe dieſe zu ſummiren

$$\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}\pi^2 c}{1.2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}\pi^4 c^2}{1.2.3.4}\sin 2\psi$$
$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}\pi^6 c^3}{1.2\ldots.6}\sin 3\psi - \frac{1}{4}\cdot\frac{2^7\mathfrak{B}^{(4)}\pi^8 c^4}{1.2\ldots.8}\sin 4\psi$$
$$+ \text{etc.}$$

wo $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$, u. ſ. w., die erſte, zweyte,

dritte, u. ſ. w., Bernoulliſche Zahl bezeichnen. Setzt man in dieſer Reihe ſtatt $\sin\psi$, $\sin 2\psi$, $\sin 3\psi$, u. ſ. w., die ihnen gleichgeltenden Exponentialausdrücke, und über dieſes $\pi^2 c e^{\psi\sqrt{-1}} = x$, $\pi^2 c e^{-\psi\sqrt{-1}} = y$, ſo verwandelt ſie ſich in

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}.$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}x - \frac{1}{2}.\frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}x^2 + \frac{1}{3}.\frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6}x^3 - \text{etc.} \\ -\left(\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}y - \frac{1}{2}.\frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}y^2 + \frac{1}{3}.\frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6}y^3 - \text{etc.}\right)\end{array}\right\}$$

Die Summe der erſten der beiden eingeklammerten Reihen heiße s, ſo entſteht durch Differentiation

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} - \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}x + \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6}x^2 - \text{etc.}$$

Es iſt aus Cyklometrie, 16.

$$\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} + \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\varphi^2 + \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2...6}\varphi^4 + \text{etc.} = \frac{1}{2\varphi^2} - \frac{\cot\varphi}{2\varphi}$$
$$= \frac{1}{2\varphi^2} - \frac{1}{2\varphi}.\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}.\sqrt{-1}$$

alſo, wenn man $\varphi = \sqrt{x}.\sqrt{-1}$ macht,

$$\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} - \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}x + \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2...6}x^2 - \text{etc.}$$
$$= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}.$$

Man hat demnach

$$\partial s = -\frac{\partial x}{2x} + \frac{\partial x}{2\sqrt{x}}.\frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}$$

und

$$s = -\frac{1}{2}\log x + \int\frac{\partial x}{2\sqrt{x}}.\frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}.$$

Es ſey $e^{\sqrt{x}} = z$, alſo $e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{z}$, $\sqrt{x} = \log z$, und $\frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = \frac{\partial z}{z}$, ſo wird

$$\int \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}} = \int \frac{(z^2 + 1)\partial z}{z(z^2 - 1)}$$

$$= \int \frac{\partial z}{z + 1} + \int \frac{\partial z}{z - 1} - \int \frac{\partial z}{z}$$

$$= \log \frac{z^2 - 1}{z} + C$$

$$= \log(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + C$$

Daher iſt

$$s = -\frac{1}{2}\log x + \log(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + C$$

$$= \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + C.$$

Da $\frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 + \frac{2x}{1.2.3} + \frac{2x^2}{1.2 \ldots 5} + \text{etc.}$: für $x = 0$, aber $s = 0$ werden muß, ſo wird $C = -\log 2$; daher

$$s = \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Man hätte dieſes Ergebniß auch ſogleich aus der Reihe für log. sinφ in Cyklometrie, 23., herleiten können.

Die Summe der Reihe in y iſt hiernach = $\log \frac{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$, und die Summe der urſprünglichen

Reihe $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \log \frac{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \right\}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{x}}}.$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x}{y} + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}}.$$

Da

$$e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sqrt{-1}\,.\sin\psi$$

$$= \frac{b + a\sqrt{-1}}{\sqrt{(bb + aa)}}$$

und $c = \sqrt{(bb + aa)}$, ſo wird $x = \pi^2 c e^{\psi\sqrt{-1}} = \pi^2(b + a\sqrt{-1})$, und auf gleiche Weiſe, oder, wenn man $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$ umwandelt, $y = \pi^2(b - a\sqrt{-1})$. Setzt man alſo $b + a\sqrt{-1} = (\beta + \alpha\sqrt{-1})^2$, wodurch $b - a\sqrt{-1} = (\beta - \alpha\sqrt{-1})^2$ wird, ſo iſt $\sqrt{x} = \pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})$, $\sqrt{y} = \pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})$, und die Summe unſerer Reihe

$$= -\frac{1}{4\sqrt{-1}} \log \frac{b + a\sqrt{-1}}{b - a\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{e^{\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})}}{e^{\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})}}$$

Weil

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + u\sqrt{-1}}{1 - u\sqrt{-1}} = \text{Arc. tang}\, u$$

ſo iſt das erſte Glied des Summenausdrucks =

$-\frac{1}{2}$ Arc. tang $\frac{a}{b}$. Um das zweyte Glied gleichfalls auf einen Kreisbogen zurückzuführen, ſetze man

$$\frac{1 + u\sqrt{-1}}{1 - u\sqrt{-1}} = \frac{e^{\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})}}{e^{\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})}}$$

und es wird

$$u =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} - e^{\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} + e^{-\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})}}{e^{\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} + e^{\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} - e^{\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}) + e^{-\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}})}{e^{\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}) - e^{-\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}})}$$

$$= \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \frac{e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}}{(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}) \cdot \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \text{tang}\,\pi\alpha.$$

Die Summe der vorgegebenen Reihe iſt alſo

$$= -\frac{1}{2}\,\text{Arc. tang}\,\frac{a}{b} + \text{Arc. tang}\,\frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \text{tang}\,\pi\alpha$$

Da der Bogen im zweyten Gliede dieſes Ausdrucks $> \pi\alpha$ iſt, ſo zerlege man ihn noch in zwey Bogen, wovon der eine $\pi\alpha$ iſt, vermittelſt der Formel

$$\text{Arc. tang}\,p = \text{Arc. tang}\,q + \text{Arc. tang}\,\frac{p-q}{1+pq}$$

indem man $p = \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}}\,\text{tang}\,\pi\alpha$, und $q = \text{tang}\,\pi\alpha$ macht. Dadurch wird

$$\frac{p-q}{1+pq} = \frac{\frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \text{tang}\,\pi\alpha - \text{tang}\,\pi\alpha}{1 + \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \text{tang}\,\pi\alpha^2}$$

$$= \frac{2e^{-\pi\beta} \cdot \sin\pi\alpha\cos\pi\alpha}{e^{\pi\beta}(\cos\pi\alpha^2 + \sin\pi\alpha^2) - e^{-\pi\beta}(\cos\pi\alpha^2 - \sin\pi a^2)}$$

$$= \frac{\sin 2\pi\alpha}{e^{2\pi\beta} - \cos 2\pi\alpha}$$

Hierdurch iſt nun

$$\text{Arc.tang}\frac{a}{1+b}+\text{Arc.tang}\frac{a}{4+b}+\text{Arc.tang}\frac{a}{9+b}+\text{etc.}$$

$$=\pi\alpha-\frac{1}{2}\text{Arc.tang}\frac{a}{b}+\text{Arc.tang}\frac{\sin 2\pi\alpha}{e^{2\pi\beta}-\cos 2\pi\alpha}.$$

wo α und β durch die Gleichung $(\beta+\alpha\sqrt{-1})^2 = b+a\sqrt{-1}$ gegeben ſind. Es wird aber $\beta = \sqrt{\frac{b+\sqrt{(aa+bb)}}{2}}$, $\alpha=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{(aa+bb)}}{2}}$,

oder, wenn man ψ beybehält, $\beta=\sqrt{\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}\psi}$

$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}\psi}$. Macht man über dieſes $e^{2\pi\beta}=\text{tang}\,\chi$, und $\text{tang}(45^\circ-\chi)\cot\pi\alpha=\text{tang}\,\omega$,

ſo iſt die Summe der Reihe $=\frac{1}{2}(\pi-\psi)-\omega$.

Auf ähnliche Art verwandelt ſich die unendliche Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder

$$\text{Arc.tang}\frac{a}{1+b}-\text{Arc.tang}\frac{a}{9+b}+\text{Arc.tang}\frac{a}{16+b}-\text{etc.}$$

in folgende

$$\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}\pi^2c}{1.2}\sin\psi-\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}\pi^4c^2}{1.2.3.4}\sin 2\psi$$
$$+\frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}\pi^6c^3}{1.2\ldots6}\sin 3\psi-\frac{(2^7-1)\mathfrak{B}^{(4)}\pi^8c^4}{1.2\ldots8}\sin 4\psi$$
$$+\text{etc.}$$

Die Summe dieſer Reihe auf die vorige Art, oder aus der Reihe für log. tang $\frac{1}{2}\varphi$ (Cyklometrie, 26.) geſucht, wird bey den vorigen Bezeichnungen

=

$$= \frac{1}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x}{y} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1)(e^{\sqrt{y}} + 1)}{(e^{\sqrt{x}} + 1)(e^{\sqrt{y}} - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Arc. tang} \frac{a}{b} - \text{Arc. tang} \frac{e^{\pi\beta} \sin \pi\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1}$$

Es iſt aber zu bemerken, daß die Summe der Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder auch aus der Summe der Reihe mit einerley Vorzeichen der Glieder abgeleitet werden kann. Man ſehe deswegen Pfaffs Disquisitt. analyt. Vol. I., wo die Summe der Reihe mit denſelben Vorzeichen der Glieder p. 65. §. XCIII., und aus ihr p. 70. §. XCIX. diejenige der Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder gefunden wird. Die ganze erſte Abhandlung dieſes Werks betrifft nämlich die Summirung von Reihen, deren Glieder Kreisbogen ſind, wovon die Tangenten nach einem gewiſſen Geſetze fortſchreiten. Die Summirung ſelbſt wird nach einer für Reihen dieſer Art eigens ſehr ſcharfſinnig ausgedachten Methode in ſehr großer Allgemeinheit zu Stande gebracht, da Euler nur mit ein Paar ziemlich eingeſchränkten Fällen, und zwar durch ein indirectes Verfahren, hatte fertig werden können. Übrigens ſetzt die obige Summirung, wie die Anwendung der Gleichung

$$\text{Arc. tang} \frac{m \sin\varphi}{1 + m \cos\varphi} = m \sin\varphi - \frac{1}{2} m^2 \sin^2\varphi$$

$+ \frac{1}{3} m^3 \sin 3\varphi$ — etc. ſogleich zeigt, voraus, daß unter den Bogen, welche die Glieder der Reihe bilden, die kleinſten zu verſtehen ſind, welche den Tangenten $\frac{a}{1+b}$, $\frac{a}{4+b}$, $\frac{a}{9+b}$ u. ſ. w. zugehören, ſo wie dieſes auch von den Bogen, welche in den Summenausdrücken vorkommen, gilt.

81. Exempel. $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$. Hier wird $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \frac{1}{2} = \alpha$, $\omega = 0$, alſo $\frac{1}{2}(\pi - \psi) - \omega = \frac{1}{4}\pi$. Demnach iſt

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{2} + \text{Arc. tang}\frac{1}{8} + \text{Arc. tang}\frac{1}{18} + \ldots$$
$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2xx} + \text{etc. in inf.} = \frac{1}{4}\pi.$$

Dieſe Reihe iſt eine von den beiden, welche Eulern Veranlaſſung zur Betrachtung der Reihen dieſer Art wurden. Die andere iſt

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{3} + \text{Arc. tang}\frac{1}{7} + \text{Arc. tang}\frac{1}{13}$$
$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{21} + \text{Arc. tang}\frac{1}{31} + \text{etc. in inf.}$$
$$= \frac{1}{4}\pi.$$

Man gelangt zu ihnen auf folgende Art.

Es iſt $\text{tang}\,\gamma = \frac{1}{m}$, wo m eine ganze Zahl iſt; man ſoll den Bogen γ in zwey andere α und β ſo zerlegen, daß $\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{n}$, $\text{tang}\,\beta = \frac{1}{p}$ werde, wo n und p gleichfalls ganze Zahlen ſind.

Da

$$\frac{1}{m} = \text{tang}\,\gamma = \text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{np}}$$

$$= \frac{n+p}{np-1}$$

ſo wird

$$mn + mp = np - 1 \ (4)$$

und

$$p = \frac{mn+1}{n-m} = m + \frac{mm+1}{n-m}.$$

Damit alſo der Forderung ein Genüge geſchehen könne, muß $n-m$ ein Theiler von $mm+1$ ſeyn.

Man ſetze, um nur bey dem allgemeinen ſtehen zu bleiben, I. $n-m=1$, alſo $n=m+1$, ſo wird $p=mm+m+1$, alſo

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+m+1} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+1}$$

Wird hier nach und nach $m+1$, $m+2$, $m+3$, u. ſ. w. ſtatt m geſetzt, ſo entſteht

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m+1} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+3m+3} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+2}$$

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m+2} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+5m+7} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+3}$$

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m+3} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+7m+13} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+4}$$

etc. etc.

Hieraus wird durch Addition mit Auslaſſung deſſen, was ſich aufhebt,

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+m+1}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+3m+3}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+5m+7} + \ldots\ldots$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+(2x-1)m+x^2-x+1}$$

$$+ \text{etc. in inf.}$$

alſo $m = 1$ gemacht

$$\frac{1}{4}\pi = \text{Arc. tang}\frac{1}{3} + \text{Arc. tang}\frac{1}{7} + \text{Arc. tang}\frac{1}{13}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{xx+x+1} + \text{etc. in inf.}$$

Dieſes iſt die zweyte der vorhin erwähnten Reihen.

Iſt m ungerade $= 2q + 1$, ſo wird $mm + 1 = 2(2qq + 2q + 1)$. Nimmt man alſo II. $n - m = 2$, folglich $n = 2q + 3$, ſo wird $p = 2qq + 2q + 1 + 2q + 1 = 2(q+1)^2$. Demnach iſt

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{2q+1} = \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+1)^2}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2q+3}$$

Hieraus wird nach der vorhin gebrauchten Art zu ſchließen

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{2q+1} = \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+1)^2}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+2)^2}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+3)^2} + \text{etc. in inf.}$$

alſo, wenn man $q=0$ macht,

$$\frac{1}{4}\pi = \text{Arc.tang}\frac{1}{2} + \text{Arc.tang}\frac{1}{8} + \text{Arc.tang}\frac{1}{18} + \ldots$$
$$+ \text{Arc.tang}\frac{1}{2xx} + \text{etc. in inf.}$$

welches die erſte der oben gedachten Reihen iſt.

Beyläufig mag noch angemerkt werden, daß man vermittelſt der vorhin entwickelten Formel unter anderen Zerlegungen von $\frac{1}{4}\pi$ auch dieſe erhält

$$\frac{1}{4}\pi = 5\,\text{Arc.tang}\frac{1}{8} + 2\,\text{Arc.tang}\frac{1}{18} + 3\,\text{Arc.tang}\frac{1}{57}$$

Da nun

$$\text{Arc.tang}\,x = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

wie in dem Art., Umbildung der Reihen, gezeigt werden wird, ſo ergiebt ſich

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{8}{13}\left\{1 + \frac{2}{3}A\frac{1}{65} + \frac{4}{5}B\frac{1}{65} + \frac{6}{7}C\frac{1}{65} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{36}{325}\left\{1 + \frac{2}{3}a\frac{1}{325} + \frac{4}{5}b\frac{1}{325} + \frac{6}{7}c\frac{1}{325} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{171}{3250}\left\{1 + \frac{2}{3}\alpha\frac{1}{3250} + \frac{4}{5}\beta\frac{1}{3250} + \frac{6}{7}\gamma\frac{1}{3250} + \text{etc.}\right\}$$

wo A, B, C, u. ſ. w.; a, b, c, u. ſ. w.; α, β, γ, u. ſ. w., die auf einander folgenden Glieder der drey Reihen bedeuten. Hat man die Glieder der erſten eingeklammerten Reihe einmal berechnet, ſo ergeben ſich daraus leicht diejenigen der zweyten, und aus dieſen die der dritten Reihe, weil $325 = 5 \cdot 65$, und $3250 = 10 \cdot 325$. Das iſt der Vortheil dieſer Zerlegung. Alle drey Reihen convergiren ſehr ſtark, ſo daß man, um $\frac{1}{4}\pi$ bis auf zehn Decimalſtellen genau zu haben, in allem 13 Glieder zu berechnen hat, und überhaupt 16 in Rechnung kommen. — Dieſes iſt ein Nachtrag zu dem Artikel, Cyklotechnie.

82. Andere Beyſpiele von der Summirung ſolcher Reihen, deren Glieder tranſcendente Größen ſind, durch Differentiation und Integration giebt die in 80. angeführte Abhandlung von Pfaff in §. CXI. CXIII. und CXXX.

In 79. ward aus der bekannten Summe der Reihe $m - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{4}m^4 + \text{etc.} = \log(1+m)$ die Summe dieſer $m\sin\varphi - \frac{1}{2}m^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}m^3\sin^3\varphi - \frac{1}{4}m^4\sin^4\varphi + \text{etc.}$ gefunden. Nach der dabey gebrauchten Art, nämlich durch Subſtitution der gleichgeltenden Exponentialausdrücke ſtatt der Sinus und Coſinus, läßt ſich überhaupt zeigen, daß, wenn

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

eine ſummirbare Reihe iſt, auch die Reihen

$$A + Bx\sin\varphi + Cx^2\sin 2\varphi + Dx^3\sin 3\varphi + \text{etc.}$$

$$A + Bx\cos\varphi + Cx^2\cos 2\varphi + Dx^3\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

ſummirbar ſind. Daſſelbe läßt ſich auch bey derſelben Vorausſetzung von den Reihen

$$A + Bx\sin(\alpha + \varphi) + Cx^2\sin(\alpha + 2\varphi) + Dx^3\sin(\alpha + 3\varphi) + \text{etc.}$$

$$A + Bx\cos(\alpha + \varphi) + Cx^2\cos(\alpha + 2\varphi) + Dx^3\cos(\alpha + 3\varphi) + \text{etc.}$$

darthun. Dieſer Satz wird zur Ergänzung des Art., Summirbare Reihe, hier nachgeholt.

83. Mehrere der durch das bisher erläuterte Verfahren ſummirbaren Reihen laſſen ſich auch durch die umgekehrte Methode der Differenzen ſummiren, wozu aber oft eine leicht ſich ergebende Transformation nöthig iſt, um nämlich den Gliedern der Reihe die in (14) angezeigte Beſchaffenheit zu geben. Dieß ſoll hier noch an der in (67) ſummirten Reihe $\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.8} + \frac{1}{6.10} + \text{etc.}$ gezeigt werden.

Man drucke dieſe Reihe ſo aus:

$$\frac{1}{2.2}\left\{\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \text{etc.}\right\}$$

ſo iſt das $(x+1)$te Glied der eingeſchloſſenen Reihe $= \frac{1}{(x+1)(x+3)}$, alſo wenn man den fehlenden Factor $x+2$ ergänzt $= \frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$$= \frac{x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$ Heißt demnach die Summe der eingeklammerten Reihe S, ſo iſt

$$S = \Sigma\frac{1}{(x+2)(x+3)} + \Sigma\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \text{Const.} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$$

Da $S = 0$ werden muß für $x = 0$, ſo wird

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

alſo

$$S = \frac{3}{4} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2x+3}{2(x+1)(x+2)},$$

und

$$\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.8} + \frac{1}{6.10} + \text{etc.} = \frac{1}{4}S$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{2x+3}{8(x+1)(x+2)}$$

wie in (67) gefunden iſt, weil hier x ſtatt des dortigen n ſteht. Man wird leicht bemerken, daß dieſe Summe hier viel kürzer gefunden worden, als in (67); dennoch aber behält die Summirung durch Differentiation und Integration vor der Summirung mittels der umgekehrten Methode der Differenzen den Vorzug, weil ſie allgemeiner iſt, welches noch mehr erhellen wird, wenn man auf das folgende Rückſicht nimmt. Übrigens hat Lorgna in dem oben (71) angeführten Specimen de seriebus convergentibus. Veronae, 1775. das Summirungsverfahren durch Differentiation und Integration, jedoch nur in ſo weit, als dazu bloß die Integration von Differentialformeln erfordert wird, mit ermüdender Weitläufigkeit abgehandelt, da das Allgemeine davon doch nur auf wenige Puncte ankommt. Im 5ten Cap. bringt er die Summation der Reihen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen

$1^n \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm$ etc. auf das beſtimmte Integral

$$\ldots\ldots \text{ etc. } \int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{1 \mp x}\left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}\right]$$

zurück (man vergleiche oben, 65[b]), und ſucht die Werthe deſſelben durch die Coteſiſchen in dem Artikel, Quadratur, mitgetheilten Formeln, eine überflüſſige und daher unnütze Arbeit.

84. In den bis jetzt nach der Leibnitz-Bernoulliſchen Summirungsmethode ſummirten Reihen enthielten die den Potenzen von x zugehörigen Coefficienten der Glieder in ihren Nennern immer dieſelbe Zahl von Factoren, und ein gleiches hatte bey den Zählern Statt. Nimmt die Zahl dieſer Factoren in den Nennern oder Zählern oder in beiden zugleich regelmäßig zu, ſo kommt die Summation auf Integrirung einer linearen Differentialgleichung an, wie die nun folgenden Exempel, bey denen man ſich an das in (64) und (72) geſagte erinnern muß, zeigen werden.

85. Es ſey die Reihe $1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ etc. in inf. zu ſummiren. Man formire die Reihe $x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ etc. in inf., aus welcher die vorgegebene entſteht, wenn $x = 1$ iſt, und ſetze die Summe derſelben y, ſo giebt die Differentiation

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

d. i.

$$1 + y = \frac{\partial y}{\partial x}$$

oder $\partial y - y\partial x - \partial x = 0$.

Dieſe Gleichung läßt ſich leicht durch Sonderung der veränderlichen Größen integriren, indem

$$\frac{\partial y}{1+y} = \partial x$$

$$\text{alſo } \log(1+y) = \text{Const.} + x$$

wird. Da y für $x=0$ verſchwindet, ſo wird Const. $=0$, alſo $1+y=e^x$, mithin $y=e^x-1$, folglich, $x=1$ gemacht, die Summe der vorgegebenen Reihe $=e-1$, wie es auch die Vergleichung mit dem bekannten Werthe von e zeigt.

86. Die zu ſummirende Reihe ſey $\frac{1}{1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{1.3.5.7}+$ etc. Man ſetze die Summe der Reihe $\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.3.5}+\frac{x^7}{1.3.5.7}+$ etc. unter welcher jene begriffen iſt, $=y$, ſo entſteht durch Differentiation

$$1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1.3}+\frac{x^6}{1.3.5}+\text{etc.} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Da nun

$$\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1.3}+\frac{x^6}{1.3.5}+\text{etc.} = x\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.3.5}+\text{etc.}\right) = xy$$

ſo wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = xy + 1$$

oder $$\partial y - xy\partial x = \partial x.$$

Der integrirende Factor zu dieſer Differentialgleichung iſt $e^{-xx:2}$, und es wird

$$y = e^{xx:2} \int e^{-xx:2} \partial x$$

wo keine Conſtante nöthig iſt, wenn man das Integral $\int e^{-xx:2} \partial x$ mit $x = 0$ anfangen läßt.

Weil aber das Integral $\int e^{-xx:2} \partial x$ von $x = 0$ an genommen ſich durch keinen geſchloſſenen Ausdruck darſtellen läßt, ſo erhält man nur eine Umformung der vorgegebenen Reihe.

Setzt man nämlich ſtatt $e^{-xx:2}$ ſeinen Werth $1 - \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} - \frac{x^6}{2.4.6} +$ etc. ſo wird nach vollbrachter Integration

$$y = e^{xx:2}\left(x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.4.5} - \frac{x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}\right)$$

alſo die vorgegebene Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{1.3.5.7} + \text{etc. in inf.}$$

$$= e^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4.5} - \frac{1}{2.4.6.7} + \text{etc.}\right)$$

Die Glieder der eingeſchloſſenen Reihe werden gegen die gleichſtelligen Glieder der urſprünglichen Reihe immer kleiner. Das Verhältniß der $(n+1)$ten Glieder iſt $\frac{1.3.5.7 \ldots 2n-1}{2.4.6.8 \ldots\ldots 2n} = \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{2}{\sqrt{(4n+1)\pi}}$ nächſtens (54.), daher die ſummatoriſche Reihe eine ſchnellere Annäherung gewährt als die urſprüngliche.

Man kann aber auch die Sache umkehren, und die Reihe $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \frac{x^7}{1.3.5.7} +$ etc. gebrauchen, um den Werth des Integrals $\int e^{-xx:2} \partial x$, von $x = 0$ an genommen, darzuſtellen. Es wird nämlich

$$\int e^{-xx:2}\partial x = e^{-xx:2}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \frac{x^7}{1.3.5.7} + \text{etc.}\right)$$

und wenn man $xx = 2tt$ ſetzt

$$\int e^{-tt}\partial t = e^{-tt}\left(1 + \frac{2t^2}{3} + \frac{(2t^2)^2}{3.5} + \frac{(2t^2)^3}{3.5.7} + \frac{(2t^2)^4}{3.5.7.9} + \text{etc.}\right)$$

Dieſe Reihe, welche 0 wird für $t = 0$, findet ſich auch, wenn die Formel $e^{-tt}\partial t$ theilweiſe integrirt, und bei dem ſummatoriſchen Theile wieder eben ſo verfahren wird u. ſ. w.

87. Dieſe beſondern Beiſpiele mögen als Einleitung zu der folgenden Auflöſung dienen, welche Euler (Institt. calc. integr. T. II. §. 1059) von dem allgemeineren Problem gegeben hat, die Summe der unendlichen Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^{i-1} + Nx^i + \text{etc.},$$

worin $B = \frac{0m+h}{1n+k}A$; $C = \frac{1m+h}{2n+k}B$; $D = \frac{2m+h}{3n+k}C$; überhaupt $N = \frac{(i-1)m+h}{in+k}M$ iſt, zu finden.

Heißt nämlich die Summe dieſer Reihe y, ſo daß $y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Mx^{i-1} + Nx^i + \text{etc.}$, ſo wird durch Differentiation und Multiplikation mit x

$$\frac{x\partial y}{\partial x} = Bx + 2Cx^2 + 3Dx^3 + \ldots + (i-1)Mx^{i-1} + iNx^i + \text{etc.}$$

und

$$\frac{nx\partial y}{\partial x} + ky = kA + (n+k)Bx + (2n+k)Cx^2 + \ldots + (in+k)Nx^i + \text{etc.}$$

NB. Dieſe Blätter werden

ferner

$$\left(\frac{mx\partial y}{\partial x} + h\right)x = (om + h)Ax + (m + h)Bx^2 + \ldots$$
$$+ ((i-1)m + h)Mx^i + \text{etc.}$$

d. i. vermöge der geſetzten Relationen zwiſchen B und A; C und B; u. ſ. w. N und M, u. ſ. w.

$$= (n + k)Bx + (2n + k)Cx^2 + \ldots$$
$$+ (in + k)Nx^i + \text{etc.}$$

Offenbar iſt alſo

$$\frac{nx\partial y}{\partial x} + ky = kA + \left(\frac{mx\partial y}{\partial x} + h\right)x$$

woraus

$$\partial y + \frac{k - hx}{x(n - mx)}y\partial x = \frac{kA\partial x}{x(n - mx)}$$

hervorgeht. Dieſe Differentialgleichung mit der in dem Art., Integralgleichung, 12., behandelten

$$\partial y + Py\partial x = Q\partial x$$

zuſammengehalten, giebt $P\partial x = \frac{(k - hx)\partial x}{x(n - mx)}$

$= \frac{k}{n} \cdot \frac{\partial x}{x} + \frac{mk - nh}{n} \cdot \frac{\partial x}{n - mx}$, und $\int P\partial x$ oder

$$(\log e)\int P\partial x = \frac{k}{n}\log x - \frac{mk - nh}{mn}\log(n - mx)$$

$= \log x^{\frac{k}{n}}(n - mx)^{\frac{nh-mk}{mn}}$, alſo $e^{\int Pdx} = x^{\frac{k}{n}}(n - mx)^{\frac{nh-mk}{mn}}$.

Aber $e^{\int Pdx}$ iſt, wie die Ausführung in dem angeführten Art. zeigt, der integrirende Factor zu der Gleichung $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, alſo wird unſere Gleichung durch Multiplication mit $x^{\frac{k}{n}}(n - mx)^{\frac{nh-mk}{mn}}$ integrabel, und man erhält

$$(n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}} x^{\frac{k}{n}} y = kA\int x^{\frac{k}{n}-1} \partial x (n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}$$

wo das Integral ſo zu nehmen iſt, daß für $x=0$, $y=A$ werde, wie es die vorgegebene Reihe erfordert. Iſt dieſe Bedingung erfüllt, ſo hat man

$$y = kAx^{-\frac{k}{n}} (n-mx)^{\frac{mk-nh}{mn}} \int x^{\frac{k}{n}-1} \partial x (n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}$$

88. Eine beſondere Entwickelung erfordert der Fall, wo $m=0$ iſt. In dieſem iſt die Differentialgleichung

$$\partial y + \frac{k-hx}{nx} y\partial x = \frac{kA\partial x}{nx}$$

und der integrirende Factor $x^{\frac{k}{n}} e^{-\frac{hx}{n}}$.

Die Integration giebt

$$x^{\frac{k}{n}} e^{-\frac{hx}{n}} y = \frac{kA}{n} \int x^{\frac{k}{n}-1} e^{-\frac{hx}{n}} \partial x$$

alſo

$$y = \frac{kA}{n} x^{-\frac{k}{n}} e^{\frac{hx}{n}} \int x^{\frac{k}{n}-1} e^{-\frac{hx}{n}} \partial x$$

89. Auch der Fall $n=0$ muß beſonders aufgelöſ't werden. Die Differentialgleichung wird für denſelben

$$\partial y + \frac{hx-k}{mx^2} y\partial x = -\frac{kA\partial x}{mx^2}$$

und der integrirende Factor iſt $x^{\frac{h}{m}} e^{\frac{k}{mx}}$. Man bekommt

$$y = -\frac{kA}{m} e^{-\frac{k}{mx}} x^{-\frac{h}{m}} \int e^{\frac{k}{mx}} x^{\frac{h}{m}-2} \partial x$$

das Integral auf die vorhin beſtimmte Art genommen.

90. Iſt $k = 0$, ſo wird y algebraiſch ausgedruckt, indem nämlich

$$(n - mx)^{\frac{h}{n}} y = C$$

oder $$y = C(n - mx)^{-\frac{h}{n}}$$

wird. Für $x = 0$ entſteht hieraus $A = n^{-\frac{h}{n}} C$, alſo $C = An^{\frac{h}{n}}$, mithin iſt

$$y = A\left(\frac{n}{n - mx}\right)^{\frac{h}{n}}$$

Aber auch wenn k ein Vielfaches von n, $= pn$ iſt, wird y algebraiſch. In dieſem Falle iſt nämlich

$$\int x^{\frac{k}{n}-1} \partial x (n - mx)^{\frac{nh-mk}{mn}-1} =$$

$$\int x^{p-1} \partial x (n - mx)^{\frac{h}{m}-p-1}$$

welches Integral nach (Integralformel, 60. I.) algebraiſch wird.

91. Exempel. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \text{etc. in inf.}$$

zu ſummiren.

Hier iſt $A = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $n = 2$, $k = 0$. Daher die Summe der Reihe oder

$$y = \left(\frac{2}{2-2x}\right)^{\frac{1}{2}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

wie bekannt.

92. Exempel. Die zu ſummirende Reihe ſey

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \text{etc.}$$

Man ſetze

$$1 + \frac{1}{4}x + \frac{1.3}{4.6}x^2 + \frac{1.3.5}{4.6.8}x^3 + \text{etc.} = y,$$

ſo iſt in (87) $A = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $n = 2$, $k = 2$, und

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}xy = \int \partial x (1-x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} + C.$$

Für $x = 0$ iſt $y = 1$, alſo

$$0 = 2 + C.$$

mithin

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}xy = \frac{2}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} - 2$$

und

$$y = \frac{2(1-\sqrt{(1-x)})}{x}$$

Hieraus kommt für $x = 1$ die Summe der vorgegebenen Reihe $= 2$.

93. Exempel. Die Reihe

$$\frac{5}{4} - \frac{5.7}{4.6} + \frac{5.7.9}{4.6.8} - \frac{5.7.9.11}{4.6.8.10} + \text{etc. in inf.}$$

zu ſummiren.

Man ſetze $\frac{5}{4} - \frac{5.7}{4.6}x + \frac{5.7.9}{4.6.8}x^2 - \text{etc.} = y$,

und nehme in (87) x negativ, wodurch auch ∂x negativ

tiv wird, ſo iſt $A = \frac{5}{4}$, $m = 2$, $h = 7$, $n = 2$, $k = 4$, und

$$(1 + x)^{\frac{3}{2}} x^2 y = \frac{5}{2} \int x \partial x (1 + x)^{\frac{1}{2}}$$

Es iſt aus (Integralformel, 59. IV.)

$$\int x \partial x (1 + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} x (1 + x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \int \partial x (1 + x)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{5} \left(x - \frac{2}{3} \right) (1 + x)^{\frac{3}{2}}$$

Daher

$$(1 + x)^{\frac{3}{2}} x^2 y = \left(x - \frac{2}{3} \right) (1 + x)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Da für $x = 0$, $y = \frac{5}{4}$ iſt, ſo wird Const. $= \frac{2}{3}$, und

$$y = \frac{3x - 2}{3x^2} + \frac{2}{3x^2 (1 + x)^{\frac{3}{2}}}$$

Macht man nun $x = 1$, ſo kommt

$$\frac{5}{4} - \frac{5.7}{4.6} + \frac{5.7.9}{4.6.8} - \frac{5.7.9.11}{4.6.8.10} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{6}.$$

94. Exempel. Die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.2}{2.3.5} + \frac{1.1.2.3}{2.3.5.7} +$ etc. in inf. zu ſummiren.

Es ſey $\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3}x + \frac{1.1.2}{2.3.5}x^2 + \frac{1.1.2.3}{2.3.5.7}x^3$ + etc. = y, ſo iſt in (87) $A = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $h = 1$, $n = 2$, $k = 1$, und es wird

$$(2x - xx)^{\frac{1}{2}} y = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x (2 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Arc. sin. vers. } x + C.$$

aus (Integralformel, 55.) Da für $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ iſt, ſo wird $C = 0$, alſo

$$y = \frac{1}{2\sqrt{(2x - xx)}} \text{ Arc. sin. vers. } x$$

und wenn man $x = 1$ ſetzt,

$$\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.2}{2.3.5} + \frac{1.1.2.3}{2.3.5.7} + \text{etc.} = \frac{1}{4}\pi$$

wo π der halbe Kreisumfang zum Halbmeſſer 1 iſt.

Man hat hieraus noch

$$\text{Arc. sin. vers. } x = \left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.2}{3.5}x^2 + \frac{1.2.3}{3.5.7}x^3 + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}x^4 + \text{etc.}\right)\sqrt{(2x - xx)}$$

und wenn man $\sqrt{(2x - xx)}$ nach dem Binomiſchen Lehrſatze entwickelt

$$= \left(1 + \frac{1}{2}.\frac{x}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^2}{2^2.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^3}{2^3.7} + \text{etc.}\right)\sqrt{2x}.$$

Dieſe Reihen fehlen in dem Artikel, Cyklometrie.

Setzt man $x = \text{sin. vers. } 2\varphi = 2\sin\varphi^2$, alſo $\cos 2\varphi = 1 - x$, ſo wird $\sqrt{(2x - xx)} = \sin 2\varphi$, und durch die erſte Reihe

$$\varphi = \sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{2}{3}\sin\varphi^2 + \frac{2.4}{3.5}\sin\varphi^4 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin\varphi^6 + \text{etc.}\right)$$

Dieſe Reihe, welche eine Transformation der bekannten Reihe für einen Kreisbogen aus ſeinem Sinus iſt, dient ſehr gut φ durch einen Kettenbruch darzuſtellen *). Davon in dem Art., Umbildung der Reihen.

95. Exempel. Die zu ſummirende Reihe ſey

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \text{etc. in inf.}$$

Wird $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}x + \frac{1}{1.2.3.4}x^2 + \frac{1}{1.2\ldots5}x^3 + \text{etc.} = y$ geſetzt, ſo iſt in (87) $A = \frac{1}{2}$, $m = 0$, $h = 1$, $n = 1$, $k = 2$, alſo aus (88)

$$x^2 e^{-x} y = \int x e^{-x} \partial x$$
$$= C - e^{-x}(1 + x)$$

zufolge (Integralformel, 100. I.) Für $x = 0$, iſt $y = \frac{1}{2}$. Dadurch findet ſich $C = 1$, und

$$y = \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$$

d. i.

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}x + \frac{1}{1.2.3.4}x^2 + \text{etc.} = \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$$

*) Aus ihr folgt die oben in (81.) gebrauchte Reihe für Arc. tang. ſehr leicht.

wie man auch ohne Integration bey einiger Aufmerkſamkeit und Übung leicht entdeckt. Multiplicirt man hier beiderſeits mit x, und dividirt die hierauf genommenen Differentiale mit ∂x, ſo entſteht

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3}x + \frac{3}{1.2.3.4}x^2 + \text{etc.} = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$$

und wenn man $x = 1$ macht

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2....5} + \text{etc.} = 1$$

Die Reihe nähert ſich dem Totalwerthe oder der Gränze ihrer Summe ſchnell. Die Summe der beiden erſten Glieder iſt $1 - \frac{1}{1.2.3}$, der drey erſten $1 - \frac{1}{1.2.3.4}$, der vier erſten $1 - \frac{1}{1.2....5}$, u. ſ. w.

Die Reihe entſteht übrigens aus der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$, wenn man auf dieſe das Verfahren in dem Art., Summirbare Reihe, 2. vergl. 10., anwendet. Man ſehe Joh. Bernoullis Werke, T. IV. p. 9., wo auch gezeigt wird, daß die Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{9}{1.2.3.4} + \frac{16}{1.2....5} + \text{etc.} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$, d. i., $= e - 1$, welches ſich aus der obigen Gleichung zwiſchen der Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3}x + \text{etc.}$ und ihrer Summe, wenn man die

Multiplication mit x, Differentiation, und Diviſion mit ∂x noch einmal anbringt, leicht findet. Auf gleiche Weiſe ergiebt ſich $\frac{1}{1.2}+\frac{8}{1.2.3}+\frac{27}{1.2.3.4}+\frac{64}{1.2\ldots\ldots5}$ + etc. = e + 1, u. ſ. w.

96. Exempel. Die hypergeometriſche Reihe $1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 -$ etc. in inf. zu ſummiren.

Setzt man $1 - 1x + 1.2x^2 - 1.2.3x^3 +$ etc. $= y$, und x in (87) negativ, ſo iſt $A = 1$, $h = 1$, $m = 1$, $n = 0$, $k = 1$, alſo aus (89)

$$e^{-\frac{1}{x}} xy = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}\partial x}{x}$$

Da für $x = 0$, wo $y = 1$ iſt, die Größe linker Hand des Gleichheitszeichens verſchwindet, ſo muß das Integral rechter Hand gleichfalls für $x = 0$ verſchwinden. Unter dieſer Bedingung alſo iſt

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}\partial x}{x}$$

folglich $x = 1$ gemacht,
$1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 - 1.2.3.4 -$ etc. in inf.

$$= e\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}\partial x}{x}\left[\begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}\right]$$

Auf dieſe Weiſe iſt alſo die Summe auf ein beſtimmtes Integral gebracht. Euler hat dadurch in der Abhandlung, De seriebus divergentibus (Nov. Comment. Petrop. T. V.), indem er $\frac{e}{xe^{\frac{1}{x}}}$ als die der Abſciſſe x zugehörige Ordinate einer Curve be-

trachtete, und den zwiſchen den Ordinaten in den Endpuncten der Abſciſſe 1, der Curve und der Abſciſſenaxe enthaltenen Flächenraum vermittelſt der Annäherungsformel in (134) des Art., Quadratur, für $n = 10$ ſuchte, die Summe der Reihe $1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + \text{etc.} = 0{,}59637164$ gefunden. Die Formeln in (144) und (145) jenes Art. geben mir die Summe $= 0{,}5962238$, welches aber noch ſehr von der Wahrheit abweicht. Die genaue Summe iſt nämlich $= 0{,}596347362323\ldots\ldots$ vermöge einer von Maſcheroni aufgefundenen Relation zwiſchen derſelben und der bey der Summe der natürlichen harmoniſchen Reihe und den Integrallogarithmen vorkommenden Conſtante (40). Man ſehe den Traité du calc. diff. et du calc. integr. T. III. §. 1227. von Lacroix. Übrigens ergiebt ſich hieraus noch die Summe der hypergeometriſchen Reihe $1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \text{etc.} = 0{,}4036526937676\ldots$, wie in dem Art., Reihe, 31., angegeben iſt.

97. Wenn in (87) $A = 1$, $m = 1$, $k = p - 1$, und $n = 1$, ſo verwandelt ſich die Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ in dieſe $1 + \frac{h}{p}x + \frac{h(h+1)}{p(p+1)}x^2 + \frac{h(h+1)(h+2)}{p(p+1)(p+2)}x^3 + \text{etc.}$ deren Summe y durch

$$(1-x)^{h-p+1}x^{p-1}y = (p-1)\int x^{p-2}(1-x)^{h-p}$$

beſtimmt wird. Wenn $p > 1$ iſt (für $p = 1$ iſt die Summe der Reihe $(1-x)^{-h}$), ſo verſchwindet der Theil linker Hand des Gleichheitszeichens für $x = 0$, indem alsdann $y = 1$ iſt. Das Integral rechter Hand muß alſo gleichfalls für $x = 0$ verſchwinden. Es werde ſo genommen, ſo iſt, $p > h$ geſetzt,

$$y = \frac{(p-1)(1-x)^{p-h-1}}{x^{p-1}} \int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-(p-h)}$$

Es iſt aus (Integralformel, 59. VI.)

$$\int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-(p-h)} = \frac{x^{p-1}}{p-h-1}(1-x)^{-(p-h-1)}$$
$$- \frac{h}{p-h-1}\int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-(p-h-1)}$$

Da der algebraiſche Theil des reducirten Integrals für $x=0$ verſchwindet, vorausgeſetzt, daß p nicht $= h+1$ iſt, ſo muß auch der ſummatoriſche Theil unter dieſer Vorausſetzung für jenen Werth von x verſchwinden. Iſt nun über dieſes $p-h$ eine ganze Zahl, ſo kann man die Reductionen auf die angefangene Weiſe fortſetzen, bis man auf das Integral $\int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-1}$ gekommen iſt. Wofern nun noch p eine ganze Zahl iſt, ſo läßt ſich das letzte Integral entweder durch Diviſion oder nach (Integralformel, 59. IV.) auf $\int \partial x(1-x)^{-1}$ bringen. Auf dieſe Weiſe wird

$$y = \frac{p-1}{p-h-1}\Big\{1 - \frac{h}{p-h-2}(1-x) + \frac{h(h+1)}{(p-h-2)(p-h-3)}(1-x)^2$$
$$- \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{h(h+1)(h+2)\ldots\ldots\ldots p-3}{(p-h-2)(p-h-3)(p-h-4)\ldots\ldots 1}(1-x)^{p-h-2}\Big\}$$
$$\mp \frac{h(h+1)\ldots\ldots\ldots p-1}{(p-h-1)(p-h-2)\ldots\ldots 1}\Big(\frac{1}{(p-2)x} + \frac{1}{(p-3)x^2}$$
$$+ \frac{1}{(p-4)x^3} + \ldots + \frac{1}{x^{p-2}}\Big)(1-x)^{p-h-1}$$
$$\mp \frac{h(h+1)\ldots\ldots p-1}{(p-h-1)(p-h-2)\ldots 1}\cdot\frac{(1-x)^{p-h-1}}{x^{p-1}}\log(1-x)$$

wo die oberen Vorzeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades $p-h$ gelten.

Setzt man $x=1$, ſo verſchwinden alle Glieder dieſes Ausdrucks außer dem erſten (wegen des Verſchwindens von $(1-x)\log(1-x)$ für $x=1$ ſehe man den Artikel, Summirbare Reihe, 7.), und es wird

$$1+\frac{h}{p}+\frac{h(h+1)}{p(p+1)}+\frac{h(h+1)(h+2)}{p(p+1)(p+2)}+\text{etc.}=\frac{p-1}{p-h-1}.$$

Dieſes Reſultat ſtimmt nun zwar mit dem in dem Art., Summirbare Reihe, 12., gefundenen überein, iſt aber wegen der Einſchränkung auf ganze Werthe von p und h bey weitem nicht ſo allgemein. Es wird ſich indeß bald ein Weg zeigen, daſſelbe eben ſo allgemein als dort zu begründen.

98. In den von (85) bis hieher ſummirten Reihen waren die Zahlen, womit die Coefficienten der gegebenen oder angenommenen Reihe in x in den Relationen derſelben multiplicirt werden, Glieder einer einfachen arithmetiſchen Fortſchreitung, und die Summirung der Reihe hing von der Integration einer linearen Differentialgleichung des erſten Grades ab. Sind jene Zahlen von zwey Dimenſionen oder Producte aus je zwey Gliedern einfacher arithmetiſcher Fortſchreitungen, ſo kommt die Summirung auf die Integration einer linearen Differentialgleichung des zweyten Grades an, wie folgendes von Joh. Bernoulli (Commerc. epistol. Leibn. et Bernoul. T. I. p. 220) gegebene Beyſpiel zeigt.

Die unendliche Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{1.2^2 3^2}+\frac{1}{1.2^2.3^2.4^2}+$ etc. auf eine Differentialgleichung zu reduciren.

Es ſey

$$y=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2^2}+\frac{x^3}{1.2^2.3^2}+\frac{x^4}{1.2^2.3^2.4^2}+\text{etc.}$$

ſo wird

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{1}+\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2^2.3^2}+\frac{x^3}{1.2^2.3^2.4}+\text{etc.}$$

alſo wenn man auf beiden Seiten mit x multiplicirt, und noch einmal differentiirt, ∂x conſtant geſetzt,

$$\frac{x\partial^2 y + \partial y\partial x}{\partial x^2} = 1 + \frac{x}{1.} + \frac{x^2}{1.2^2} + \frac{x^3}{1.2^2.3^2} + \text{etc.}$$

d. i.

$$= 1 + y$$

Hieraus kommt

$$\partial^2 y + \frac{1}{x}.\partial y\partial x - y.\partial x^2 = \frac{1}{x}\partial x^2$$

eine lineare Differentialgleichung des zweyten Grades, welche integrirt werden müßte, um die Summe der vorgegebenen Reihe zu haben.

99. Es ſey jetzt allgemein die Summe der unendlichen Reihe

$$A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + D\mathfrak{D}u^3 + \ldots + M\mathfrak{M}u^{i-1} + N\mathfrak{N}u^i + \text{etc.}$$

deren Coefficienten eine ſolche Beziehung zu einander haben, daß

$$B = \frac{0m+h}{n+k}A;\ C = \frac{1m+h}{2n+k}B;\ D = \frac{2m+h}{3n+k}C; \ldots\ldots N = \frac{(i-1)m+h}{in+k}M;\ \text{u. ſ. w.}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{0\mu+\eta}{\nu+\vartheta}\mathfrak{A};\ \mathfrak{C} = \frac{1\mu+\eta}{2\nu+\vartheta}\mathfrak{B};\ \mathfrak{D} = \frac{2\mu+\eta}{3\nu+\vartheta}\mathfrak{C}; \ldots\ldots \mathfrak{N} = \frac{(i-1)\mu+\eta}{i\nu+\vartheta}\mathfrak{M};\ \text{etc.}$$

iſt, zu finden.

Die geſuchte Summe heiße y, ſo daß

$$y = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + D\mathfrak{D}u^3 + \text{etc.}$$

iſt. Man nehme die Reihe

$$A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + \text{etc.}$$

und ſetze ihre Summe z, ſo iſt aus (87) wenn man $ux = s$ macht,

$$z = kAs^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{mk-nh}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}\partial s(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}$$

das Integral ſo genommen, daß $z = A$ werde für $s = 0$.

Man multiplicire nun die Reihe

$$z = A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + \text{etc.}$$

durch $P\partial x$, wo P eine Function von x iſt, und nehme die Integrale, indem man u als unveränderlich betrachtet, in Beziehung auf x, ſo entſteht

$$\int Pz\partial x = A\int P\partial x + Bu\int Px\partial x + Cu^2\int Px^2\partial x + \ldots\ldots$$
$$+ Nu^i\int Px^i\partial x + \text{etc.}$$

Läßt ſich nun die Function P ſo beſtimmen, daß, die Integrale innerhalb gewiſſer Gränzen (von einem gewiſſen Werthe der veränderlichen x bis zu einem andern) genommen,

$$\int Px\partial x = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

$$\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

$$\int Px^3\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

überhaupt

$$\int Px^i\partial x = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\int Px^{i-1}\partial x = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

iſt, ſo wird

$$\int Pz\partial x = \left(A + \frac{B\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}u + \frac{C\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}u^2 + \text{etc.}\right)\int P\partial x$$

$$= \frac{y}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

folglich

$$y = \frac{\mathfrak{A}\int Pz\partial x}{\int P\partial x}$$

Um die Function P ſo zu beſtimmen, daß die angezeigten Relationen Statt haben, bemerke man, daß, weil die Gleichung

$$\int Px^i\partial x = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\int Px^{i-1}\partial x = \frac{(i-1)\mu+\eta}{i\nu+\vartheta}\int Px^{i-1}\partial x$$

nur innerhalb gewiſſer Werthe von x gilt, man überhaupt annehmen kann, es ſey

$$(i\nu+\vartheta)\int Px^i\partial x = ((i-1)\mu+\eta)\int Px^{i-1}\partial x + x^iQ$$

wo Q eine Function von x iſt, wofern nur das Glied x^iQ für die Gränzen der Integrale verſchwindet. Differentiirt man die letzte Gleichung, und dividirt beiderſeits mit x^{i-1}, ſo wird

$$(i\nu+\vartheta)Px\partial x = ((i-1)\mu+\eta)P\partial x + x\partial Q + iQ\partial x$$

Da dieſe Gleichheit für jeden Werth von i beſtehen muß, ſo entſtehen daher die beiden folgenden Gleichungen

$$\nu Px\partial x = \mu P\partial x + Q\partial x$$

und

$$\vartheta Px\partial x = (\eta-\mu)P\partial x + x\partial Q$$

Aus der erſten folgt

$$P\partial x = -\frac{Q\partial x}{\mu-\nu x}$$

aus der anderen aber

$$P\partial x = -\frac{x\partial Q}{\eta-\mu-\vartheta x}$$

und aus dieſen

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x(\eta - \mu - \vartheta x)}{x(\mu - \nu x)} = \frac{(\eta - \mu)\partial x}{\mu x} - \frac{(\vartheta\mu + \mu\nu - \eta\nu)\partial x}{\mu(\mu - \nu x)}$$

woraus durch Integration

$$Q = x^{\frac{\eta}{\mu}-1} (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}+1} \times \text{Const.}$$

wird. Setzt man, um $P\partial x$ poſitiv zu erhalten, Const. $= -1$ (eine allgemeinere Annahme derſelben, etwa $= -C'$ iſt nicht nöthig, weil C' aus der Rechnung von ſelbſt wieder weggehen würde), alſo

$$Q = -x^{\frac{\eta}{\mu}-1} (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}+1}$$

ſo wird

$$P\partial x = x^{\frac{\eta}{\mu}-1} \partial x (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}}.$$

Da nun überhaupt

$$(i\nu + \vartheta)\int P x^i \partial x = ((i-1)\mu + \eta)\int P x^{i-1}\partial x$$
$$- x^{i+\frac{\eta}{\mu}-1} (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}+1}$$

ſo zeigt ſich, daß, wenn die Integrale von $x = 0$ bis $x = \frac{\mu}{\nu}$ genommen werden, die Relation

$$(i\nu + \vartheta)\int P x^i \partial x = ((i-1)\mu + \eta)\int P x^{i-1}\partial x$$

Statt findet, weil nämlich für jene Werthe von x der algebraiſche Theil der vorigen Gleichung verſchwindet, wofern nur

$$i + \frac{\mu}{\eta} - 1 > 0$$

und zugleich
$$\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$$

iſt. Werden dieſe Bedingungen, die erſte auch für den kleinſten Werth von $i = 1$, erfüllt, ſo iſt

$$y\int x^{\frac{\eta}{\mu}-1}\partial x(\mu-\nu x)^{\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$$

$$=\mathfrak{A}\int x^{\frac{\eta}{\mu}-1}z\partial x(\mu-\nu x)^{\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$$

wo z aus der Summe der Reihe $A+Bs+Cs^2+Ds^3+$ etc. bekannt iſt, und aus derſelben hervorgeht, wenn $s=ux$ geſetzt wird. Bey der Integration von $\int x^{\frac{\eta}{\mu}-1}z\partial x(\mu-\nu x)^{\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$ wird dann u als conſtant betrachtet, und die Integrale ſelbſt, wodurch y beſtimmt wird, von $x=0$ bis $x=\frac{\mu}{\nu}$ erſtreckt.

Die Function Q geht zwar nicht ſelbſt in die Schlußformel ein, ihre Kenntniß iſt aber doch nöthig, um die Gränzen der Integrale feſtzuſetzen. Wenn μ oder $\nu=0$ iſt, ſo muß ſie beſonders beſtimmt werden.

Im erſten Falle iſt

$$\frac{\partial Q}{Q}=-\frac{\partial x(\eta-\vartheta x)}{\nu xx}=\frac{\vartheta\partial x}{\nu x}-\frac{\eta\partial x}{\nu xx}$$

woraus $Q=e^{\frac{\eta}{\nu x}}x^{\frac{\vartheta}{\nu}}$, alſo $x^iQ=e^{\frac{\eta}{\nu x}}x^{i+\frac{\vartheta}{\nu}}$ wird, welches nicht $=0$ werden kann, außer wenn $\frac{\eta}{\nu x}=-\infty$, alſo $x=0$ wird.

In dem andern Falle, wo $\nu=0$ iſt, hat man

$$\frac{\partial Q}{Q}=\frac{\partial x(\eta-\mu-\vartheta x)}{\mu x}=\frac{\eta-\mu}{\mu}\cdot\frac{\partial x}{x}-\frac{\vartheta\partial x}{\mu}$$

und hieraus $Q=e^{-\frac{\vartheta x}{\mu}}x^{\frac{\eta}{\mu}-1}$, mithin $x^iQ=e^{-\frac{\vartheta x}{\mu}}x^{i+\frac{\eta}{\mu}-1}$, welches, wenn $\frac{\vartheta}{\mu}$ poſitiv iſt, für $x=\infty$ verſchwindet,

für ein negatives $\frac{\vartheta}{\mu}$ hingegen für $x = -\infty$. Da alſo in beiden Fällen $x^{\lambda}Q$ nur für einen Werth von x verſchwindet, ſo iſt nicht nöthig, ſich mit der Beſtimmung von $P\partial x$ weiter aufzuhalten.

Weil übrigens die Relationen der Glieder in den beiden Coefficientenreihen A, B, C, D, u. ſ. w., und 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, u. ſ. w., einander vollkommen ähnlich ſind, ſo entſteht daher, wenn man jene Reihe unter ſich vertauſcht, noch ein anderer Ausdruck für y, ſo daß man alſo hierdurch zwey Integralformeln für die Summe erhält.

100. Man ſieht leicht, daß mit dem ſo eben aufgelöſ'ten Problem zugleich das folgende aufgelöſ't iſt:

Es iſt die Summe der Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} \ldots = X$$

gegeben, man ſoll die Summe der Reihe $A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + D\mathfrak{D}u^3 + \text{etc.}$ finden, deren Coefficienten entſtehen, wenn die Coefficientenreihe jener A, B, C, D .... Glied für Glied in die gleichſtelligen Glieder der Reihe 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ..., zwiſchen welchen die in (100) angezeigten Relationen Statt haben, multiplicirt wird. Die vorhin durch z bezeichnete Größe iſt nämlich das, worin ſich X verwandelt, wenn darin ux ſtatt x geſetzt wird.

101. Exempel. Die Summe der unendlichen Reihe $s + \frac{1}{2}.\frac{s^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{s^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{s^7}{7} + \text{etc.}$ zu finden.

Man ſetze $s^2 = u$, ſo wird die Reihe ſo ausgedrückt

$$\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{u}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{u^2}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{u^3}{7} + \text{etc.}\right).\sqrt{u}$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe heiße y. Aus (91) oder ſonſt woher iſt bekannt, daß, wenn

$$1 + \frac{1}{2}ux + \frac{1.3}{2.4}u^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}u^3x^3 + \text{etc.} = z$$

geſetzt wird, $z = (1 - ux)^{-\frac{1}{2}}$ iſt. In (99) iſt alſo $\mathfrak{A} = 1$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{5} = \frac{3}{5}\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{7} = \frac{5}{7}\mathfrak{C}$; u. ſ. w., folglich $\mu = 2$, $\eta = 1$, $\nu = 2$, $\vartheta = 1$, $\frac{\eta}{\mu} - 1 = -\frac{1}{2}$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = 0$. Hier werden alſo die Bedingungen $1 + \frac{\eta}{\mu} - 1 > 0$ und $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$ erfüllt, und es wird

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1 - ux)^{-\frac{1}{2}}$$

Da von $x = 0$ bis $x = \frac{\mu}{\nu} = 1$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x = 2$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1 - ux)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\text{Arc.}\cos(1 - 2u)$$

$$= \frac{2}{u^{\frac{1}{2}}}\text{Arc}\sin.u^{\frac{1}{2}}$$

ſo wird $y = \frac{\text{Arc.}\sin.u^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}}$, alſo $y\sqrt{u} = \text{Arc.}\sin u^{\frac{1}{2}} = \text{Arc.}\sin s$, mithin

$$s + \frac{1}{2}.\frac{s^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{s^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{s^7}{7} + \text{etc.}$$
$$= \text{Arc.}\sin s$$

wie bekannt.

102. Exempel. Die Reihe

$$1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.1^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1^2.1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \text{etc. in inf.}$$

zu ſummiren.

Man drücke die Reihe ſo aus

$$1 + \frac{1^2}{2^2}\left(1 + \frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2.3^2}{4^2.6^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{4^2.6^2.8^2} + \text{etc.}\right)$$

und ſetze

$$1 + \frac{1^2}{4^2}u + \frac{1^2.3^2}{4^2.6^2}u^2 + \frac{1^2.3^2.5^2}{4^2.6^2.8^2}u^3 + \text{etc.} = y.$$

Nimmt man nun

$$z = 1 + \frac{1}{4}ux + \frac{1.3}{4.6}u^2x^2 + \frac{1.3.5}{4.6.8}u^3x^3 + \text{etc.}$$

ſo iſt aus (92) $z = \frac{2(1 - \sqrt{(1 - ux)})}{ux}$, und in (99)

$\mathfrak{A} = 1$, $\eta = 1$, $\mu = 2$, $\vartheta = 2$, $\nu = 2$, alſo $\frac{\eta}{\mu} - 1 = -\frac{1}{2}$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = \frac{1}{2}$, mithin $i + \frac{\eta}{\mu} - 1$, für $i = 1$, > 0 und $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$. Es wird alſo

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{u}\int x^{-\frac{3}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}(1 - (1 - ux)^{\frac{1}{2}})$$

oder

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1 - x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{u}\int x^{-\frac{3}{2}}\partial x(1 - x)^{\frac{1}{2}}(1 - (1 - ux)^{\frac{1}{2}})$$

Das Integral, welches ſich rechter Hand des Gleichheitszeichens befindet, hängt im allgemeinen von der Rectification der Ellipſe ab. Da hier aber nur der Werth von y für u = 1 geſucht wird, und über dieſes u bey der Integration als conſtant zu betrachten iſt, ſo kann man auch vor der Integration in dem Diffe-

Differentialfactor $u = 1$ ſetzen, um jenen Werth von y, welcher σ heißen mag, zu erhalten. Es wird alſo

$$\sigma \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x (1 - x)^{\frac{1}{2}} = 2 \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1 - x)$$
$$- 2 \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1 - x)$$

Es iſt (Integralformel, 59. V. und 55.)

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \text{Arc.sin.vers.} 2x + \text{Const.}$$

alſo von $x = 0$ bis $x = 1 = \frac{\mu}{\nu}$ genommen

$$= \frac{1}{2} \pi.$$

Ferner (Ebendaſelbſt, 59. I. und 55.)

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} = - 2x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} - \text{Arc.sin.vers.} 2x + C'$$

und

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x) = - 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C''$$

Daher

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} - \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x) = 2x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}$$
$$- \text{Arc. sin. vers.} 2x + C' - C''$$

Da $- 2x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} = - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$,

ſo iſt der algebraiſche Theil der Integralgröße $= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$, alſo $= 0$ für $x = 0$. Da die ganze Größe für $x = 0$ verſchwinden muß, ſo wird $C' - C'' = 0$, mithin

$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1 - x)^{\frac{1}{2}} - \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)$ von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen $4 - \pi$, folglich

$$\frac{1}{2} \pi \sigma = 8 - 2\pi$$

und $1 + \frac{1}{4} \sigma$, welches die Summe der vorgegebenen Reihe iſt, $= \frac{4}{\pi}$.

103. Die eben gefundene Summe wird auch ſo erhalten.

Man nehme

$$z = 1 - \frac{1}{2}ux - \frac{1.1}{2.4}u^2x^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}u^3x^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}u^4x^4 - \text{etc.}$$

$$= \sqrt{(1-ux)}$$

ſo iſt,

$$y = 1 + \frac{1^2}{2^2}u + \frac{1^2.1^2}{2^2.4^2}u^2 + \frac{1^2.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}u^3 + \frac{1^2.1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}u^4$$

$+$ etc. geſetzt, in (99) $\mathfrak{A} = 1$; $\mathfrak{B} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}$;

$\mathfrak{C} = -\frac{1.1}{2.4} = \frac{1}{4}\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D} = -\frac{1.1.3}{2.4.6} = \frac{3}{6}\mathfrak{C}$; u. ſ. w.

Demnach $\eta = -1$, $\mu = 2$, $\vartheta = 0$, $\nu = 2$, und $\frac{\eta}{\mu} - 1 = -\frac{3}{2}$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = \frac{1}{2}$. Hier wird alſo zwar die Bedingung $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$, aber nicht die $i + \frac{\eta}{\mu} - 1 > 0$ für $i = 1$ erfüllt, ſondern letztere erſt für $i = 2$ und größere Werthe von i. Deshalb kann man y nicht durch die Endformel in (99) finden, ſondern man muß zu den Grundformeln zurückgehen.

Es war aber

$$\int Pz\partial x = A\int P\partial x + Bu\int Px\partial x + Cu^2\int Px^2\partial x + \text{etc.}$$

Da die Relation $\int Px\partial x = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$ vermöge des vorigen nicht Statt hat, wohl aber die folgenden

$$\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x;\ \int Px^3\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x;$$

$\int Px^4\partial x = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}}\int Px^3\partial x = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x$; u. ſ. w. ſo erhält man

$$\int Pz\partial x = A\int P\partial x + \left(Bu + \frac{C\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}u^2 + \frac{D\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}u^3 + \text{etc.}\right)\int Px\partial x$$

d. i.

$$= A\int P\partial x + \frac{y - A\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.\int Px\partial x$$

woraus

$$y\int Px\partial x = \mathfrak{B}\int Pz\partial x - A\mathfrak{B}\int P\partial x + A\mathfrak{A}\int Px\partial x$$

wird, die Integrale von $x = 0$ bis $x = \frac{\mu}{\nu}$, hier $= 1$, genommen.

In unſerem Falle iſt

$$P\partial x = x^{-\frac{3}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$Px\partial x = x^{-\frac{1}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$Pz\partial x = x^{-\frac{3}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}(1 - ux)^{\frac{1}{2}}$$

und, weil bloß σ, der Werth von y für $u = 1$, geſucht wird,

$$= x^{-\frac{3}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}\partial x(1 - x)$$

Dadurch wird nun

$$\int Px\partial x = -2^{\frac{3}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\text{Arc.sin.vers.}2x + C'$$
$$\int Px\partial x = 2^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}}.\text{Arc.sin.vers.}2x$$

ohne Conſtans, weil es für $x = 0$ ſchon verſchwindet.

$$\int Pz\partial x = -2^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C''.$$

alſo $\mathfrak{B}\int Pz\partial x - A\mathfrak{B}\int P\partial x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\mathfrak{B}(-2^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\text{Arc.sin.vers.}2x + C'' - C')$$

Da dieſer Ausdruck 0 werden muß für $x = 0$, ſo wird

wie in (102) $C'' - C' = 0$, und wenn man jetzt $x = 1$, und für $\mathfrak{B}$ und $A\mathfrak{A}$ ihre Werthe $-\frac{1}{2}$ und 1 ſetzt

$$\sigma \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

alſo

$$\sigma = \frac{4}{\pi}$$

wie vorhin.

Die Summe unſerer Reihe, welche in der Hindenburgiſchen Bezeichnungsart der Binomialcoefficienten ſo ausgedruckt wird

$1^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{A})^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{B})^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{C})^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{D})^2 +$ etc. in inf., läßt ſich auch durch den von Lagrange gefundenen und in dem Art., Binomial-Coefficienten, 17. vorgetragenen Satz erhalten. Dazu aber bedarf es eines Ausdrucks für die Binomialcoefficienten, welcher die Interpolation derſelben möglich macht. Ein ſolcher findet ſich folgendergeſtalt.

Aus 87. des Artikels, Integralformel, ergiebt ſich leicht, wenn man dort $a = 1$, $n = 1$ ſetzt, daß zwiſchen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$ iſt

$$\int x^{m-1} \partial x (1-x)^r = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r}{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}$$

wo aber erfordert wird, daß m nicht < 1 und r poſitiv ſey. Macht man hier nun $m + r = n + 1$, alſo $m = n - r + 1$, ſo wird, wenn man die Folge der Factoren im Nenner umkehrt,

$$\int x^{n-r} \partial x (1-x)^r = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r}{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

alſo

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r} = \frac{1}{(n+1)\int x^{n-r} \partial x (1-x)^r}$$

Es iſt aber $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots r}$ der rte Binomialcoefficient aus der Potenz n, und da derſelbe auch $= \frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots n-r}$, ſo erhält man für ihn noch den Ausdruck $\frac{1}{(n+1)\int x^r \partial x (1-x)^{n-r}}$, wenn man nämlich in dem vorhergehenden n — r ſtatt r ſchreibt. Jeder dieſer beiden Ausdrücke kann nun zur Interpolation der Reihe der Binomialcoefficienten einer gewiſſen Potenz dienen, indem r ein poſitiver Bruch ſeyn kann.

Die Summe der Reihe

$$1^2 + (^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A})^2 + (^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B})^2 + (^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C})^2 + \text{etc. in inf.}$$

iſt nun zufolge des vorhin angeführten Satzes $^1\overset{-\frac{1}{2}}{\mathfrak{A}}$, alſo der Coefficient zu der Stelle $\frac{1}{2}$ in der Potenz 1; folglich, wenn man $n = 1$, und $r = \frac{1}{2}$ macht, nach dem einen oder dem andern Ausdrucke $= \frac{1}{2\int x^{\frac{1}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}}}$ das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen. Es iſt aber $2\int x^{\frac{1}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}}$ von $x = 0$ an genommen die Area eines Segments, deſſen Sagitte oder Sinus verſus x iſt, in einem Kreiſe, deſſen Durchmeſſer $= 1$; alſo für $x = 1$, die ganze Kreisfläche $= \frac{1}{4}\pi$. Daher

$$1 + (^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A})^2 + (^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B})^2 + (^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C})^2 + \text{etc.} = \frac{1}{\pi : 4} = \frac{4}{\pi}\ {}^{*)}.$$

*) In den Institutt. calc. diff. P. II. c. XVII. §. 402. Exemp. III. findet Euler für den Binomialcoefficienten der nten

Man ſehe der letzten Summirungsart wegen die Abhandlung Eulers de mirabilibus proprietatibus vnciarum binomii in den Act. Petrop. T. V. P. I. nach.

104. Exempel. Die Reihe

$$1 - \frac{1.1}{2.2} - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} \text{ etc. in inf.}$$

zu ſummiren.

Setzt man

$$y = 1 - \frac{1.1}{2.2}u - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}u^2 - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}u^3 - \text{etc.}$$

und nimmt

$$z = 1 - \frac{1}{2}ux - \frac{1.1}{2.4}u^2x^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}u^3x^3 - \text{etc.} = (1-ux)^{\frac{1}{2}}$$

Potenz, deſſen Stelle $\frac{1}{2}$ iſt, den Ausdruck $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.8\ldots.\ 2n}{1.3.5.7..\ (2n-1)}$.

Setzt man hier $n=1$, ſo wird ${}^{1}\mathfrak{A}^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1} = \frac{4}{\pi}$, wie oben. Eulers Ausdruck folgt ſehr leicht aus dem weiter unten (107) beyzubringenden Ausdrucke für das Integral $\int x^{rm-1}\partial x(1-x^r)^n \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$.

Nach demſelben iſt nämlich $\int x^{n-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1}\cdot$

$$\times\frac{2(2n+4)4(2n+6)6(2n+8)\ldots(2n+2)(4n+4)(2n+4)..\text{ etc.}}{3(2n+3)5(2n+5)7(2n+7)\ldots(2n+3)(4n+3)(2n+5)..\text{ etc.}}$$

$$= \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2.2.4.4.6.6\ldots.}{1.3.3.5.5.7\ldots.}\cdot\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2n+1}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n+2}$$

$$= \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5.7\ldots\ 2n+1}{2.4.6.8\ldots\ 2n+2}$$

alſo

$${}^{n}\mathfrak{A}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)\int x^{n-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.8\ldots\ 2n+2}{1.3.5.7\ldots\ 2n+1}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.8.\ldots.\ 2n}{1.3.5.7\ldots.\ (2n-1)}.$$

ſo iſt in (99) $\mathfrak{A}=1$; $\mathfrak{B}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{C}=\frac{1.3}{2.4}=\frac{3}{4}\mathfrak{B}$;

u. ſ. w., alſo $\eta=1$, $\mu=2$, $\vartheta=0$, $\nu=2$, $\frac{\eta}{\mu}-1=-\frac{1}{2}$,

$\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}=-\frac{1}{2}$, alſo $i+\frac{\eta}{\mu}-1$ für $i=1$, und

$\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}+1>0$. Folglich, wenn man ſogleich den Factor $\surd 2$ aufhebt,

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1-ux)^{\frac{1}{2}}$$

die Integrale von $x=0$ bis $x=\frac{\mu}{\nu}=1$ genommen.

Iſt σ der Werth von y für $u=1$, d. i., die Summe der vorgegebenen Reihe, ſo folgt

$$\sigma\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x$$

d. i., wenn man die Integrale innerhalb der vorgeſchriebenen Gränzen nimmt,

$$\sigma.\pi = 2$$

alſo

$$\sigma = \frac{2}{\pi}$$

Die Reihe folgt aus der Rectification der Ellipſe. Da nämlich (Rectification, 9). $\frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1.1}{2.2}e^2 - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}e^4-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6-\text{etc.}\right)$ der Quadrant einer Ellipſe iſt, deren halbe große Axe $=1$, halbe kleine $=\surd(1-e^2)$, und, wenn $e^2=1$, die Ellipſe in eine gerade Linie ſich verwandelt, welche mit der großen Axe zuſammenfällt, der Quadrant dieſer zur geraden Linie gewordenen Ellipſe aber $=1$ iſt, ſo ergiebt ſich auf der Stelle

$$1 = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1.1}{2.2} - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.4.4} - \text{etc.}\right)$$

woraus σ wie vorhin folgt.

Den Gebrauch, welchen Euler von der eben ſummirten Reihe zur Transformation der Reihe für den elliptiſchen Quadranten gemacht hat, ſehe man in deſſen Opuscul. varii argumenti, T. II. p. 138. u. folgg.

Es iſt ganz allgemein $\int \frac{\partial x \sqrt{(1 - ux)}}{\sqrt{x(1 - x)}} \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}\right]$ der halbe Umfang einer Ellipſe, deren halbe große Axe $= 1$, halbe kleine $= \sqrt{(1 - u)}$ iſt.

105. Exempel. Die Reihe

$$1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \text{etc. in inf.}$$

zu ſummiren.

Wenn man hier

$$1 - \frac{1^2}{2^2}u + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}u^2 - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}u^3 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}u^4 - \text{etc.} = y$$

ſetzt, und

$$z = 1 - \frac{1}{2}ux + \frac{1.3}{2.4}u^2x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}u^3x^3 + \text{etc.} = (1 + ux)^{-\frac{1}{2}}$$

nimmt, ſo findet ſich ganz ſo wie in (104)

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1 - x)^{-\frac{1}{2}}(1 + ux)^{-\frac{1}{2}}$$

die Integrale innerhalb der Gränzen $x = 0$, und $x = 1$ genommen.

Das Integral rechter Hand hängt für jeden Werth von u von der Rectification der Ellipſe ab. Für $u = 1$ ſey σ der Werth von y, ſo wird

$$\sigma\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$$

d. i.

$$\pi\sigma = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzt man $x = z^2$, ſo wird

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x(1-xx)}} = 2\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$$

von $z = 0$ bis $z = 1$ genommen.

Es iſt $\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$ von $z = 0$ bis $z = 1$ die Länge der rechtwinkligen Elaſtica. Man ſehe Jak. Bernoulli's Werke T. II. S. 964. Setzt man alſo jene Länge $= A$, ſo wird

$$\sigma = \frac{2A}{\pi}.$$

Stirling findet (Method. different. Prop. XI. Exempl. IV.) $A = 1,311028777146$........ Daraus ergiebt ſich $\sigma = 0,834626841674$.......

Man kann dieſe Summe auch durch das beſtimmte Integral $\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}\left[\begin{matrix}z=0\\z=1\end{matrix}\right]$ ausdrucken.

Aus (Integralformel, 64.) nämlich folgt, daß, innerhalb der Gränzen $x = 0$ und, $x = 1$, iſt

$$\int\frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}\cdot\int\frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Setzt man hier $x = z^\lambda$, wo λ poſitiv iſt, wodurch die Gränzen nun $z = 0$, und $z = 1$ werden, ſo wird erhalten

$$\lambda\lambda\int\frac{z^{2\lambda n+\lambda-1}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}}\cdot\int\frac{z^{2\lambda n+2\lambda-1}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und wenn man jetzt $2\lambda n + \lambda - 1 = \mu$ ſetzt, wodurch $2\lambda n + 2\lambda - 1 = \mu + \lambda$, und $(2n+1)\lambda = \mu + 1$ wird, ſo entſteht

$$\int\frac{z^\mu \partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}}\cdot\int\frac{z^{\mu+\lambda}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}}=\frac{1}{\lambda(\mu+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Nimmt man hier $\mu=0$, $\lambda=2$, und ſetzt den Werth des Integrals $\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$, von $z=0$ bis $z=1$ genommen, $=B$, ſo folgt

$$AB=\frac{1}{4}\pi$$

alſo

$$A=\frac{\pi}{4B}$$

und

$$\sigma=\frac{1}{2B}.$$

Die Größe B, welches die Ordinate zu dem Endpuncte der rectangulären Elaſtica iſt, hat Stirling a. a. O. Exemp. III. gleichfalls berechnet, und $= .. 0{,}59907011736 7 .....$ gefunden. Gauß hat ſeine Rechnung beſtätigt in der Abhandlung Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Commentatt. Göttingens. a. a. 1812.

106. Durch die Rectification der Ellipſe werden die Größen A und B folgendergeſtalt beſtimmt.

Es iſt ganz allgemein

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}+\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}=\int\frac{(1+z^2)\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$$

$$=\int\partial z\sqrt{\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)}$$

Es ſey $1-z^2=u^2$, alſo $z^2=1-u^2$, und $z=\sqrt{(1-uu)}$; $\partial z=-\frac{u\partial u}{\sqrt{(1-uu)}}$, ſo iſt

$$\int\partial z\sqrt{\left(\frac{1+zz}{1-zz}\right)}=-\int\partial u\sqrt{\left(\frac{2-uu}{1-uu}\right)}$$

Nimmt man $\int \partial z \surd\left(\frac{1+zz}{1-zz}\right)$ von $z=0$ bis $z=1$, ſo muß man $\int \partial u \surd\left(\frac{2-uu}{1-uu}\right)$ von $u=1$ bis $u=0$ nehmen der Gleichung $1-z^2=u^2$ gemäß. Nun weiß man aber auch, daß wenn man die Gränzen eines Integrals umkehrt, das Integral dadurch den entgegengeſetzten Werth von dem, welchen es vorhin hatte, bekommt. Denn der Werth des vollſtändigen Integrals $F(x)+C$, wo F das Functionszeichen iſt, von $x=a$ bis $x=b$ genommen, iſt $= F(b)-F(a)$, von $x=b$ bis $x=a$ genommen aber $F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a))$.

Hiernach wird alſo

$$\int \partial z \surd\left(\frac{1+zz}{1-zz}\right)\left[\begin{matrix}z=0\\ z=1\end{matrix}\right]$$

$$=\int \partial u \surd\left(\frac{2-uu}{1-uu}\right)\left[\begin{matrix}u=0\\ u=1\end{matrix}\right]$$

$$=2\left(\surd\frac{1}{2}\right).\int \partial u \surd\left(\frac{1-\frac{1}{2}uu}{1-uu}\right)\left[\begin{matrix}u=0\\ u=1\end{matrix}\right]$$

Es iſt, wie ſich aus (Rectification, 8) leicht ergiebt, $\left(\surd\frac{1}{2}\right).\int \partial u \surd\left(\frac{1-\frac{1}{2}uu}{1-uu}\right)$ von $u=0$ bis $u=1$ genommen, der Quadrant einer Ellipſe, für welche $a=\surd\frac{1}{2}$, $e^2=\frac{1}{2}$, alſo $b=a\surd(1-e^2)$ $=\frac{1}{2}$. Folglich iſt $2\left(\surd\frac{1}{2}\right)\int \partial u \surd\left(\frac{1-\frac{1}{2}uu}{1-uu}\right)\left[\begin{matrix}u=0\\ u=1\end{matrix}\right]$ die halbe Peripherie einer Ellipſen, deren Axe $\surd 2$ und 1 ſind. Hieraus erhellt die Richtigkeit der Behauptung Stirlings a. a. O. Exempl. IV.

Setzt man den Quadranten einer Ellipſe, deren halbe Axen $a=1$, $b=\surd\frac{1}{2}$ ſind, $=E$, ſo iſt der Quadrant einer ihr ähnlichen Ellipſe, deren halbe Axen $a=\surd\frac{1}{2}$,

$b = \frac{1}{2}$ ſind, $E\sqrt{\frac{1}{2}}$ und die Länge der halben Peripherie $= 2E\sqrt{\frac{1}{2}} = E\sqrt{2}$. Vermittelſt des jetzt und in (105) erwieſenen hat man nun

$$A + B = E\sqrt{2}$$

und
$$AB = \frac{1}{4}\pi$$

woraus, weil $A > B$,

$$A = \frac{E\sqrt{2} + \sqrt{(2EE - \pi)}}{2}$$

$$B = \frac{E\sqrt{2} - \sqrt{(2EE - \pi)}}{2}$$

folgt. Sucht man alſo einen Winkel ψ ſo, daß $\sin\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{E\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{E}\sin 45^\circ$ iſt, ſo wird

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \cot\frac{1}{2}\psi$$

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \tang\frac{1}{2}\psi.$$

Die Größe E kann man aus einer Tafel (Tab. VIII.) in Legendre's Exercices de calc. intégr. T. III nehmen. Sie iſt = 1,350643881048.., und log. vulg. E = 0,130540885400.. zufolge Tab. I. eben daſelbſt. Damit finden ſich A und B wie vorhin angegeben iſt.

107. Es iſt noch ein Weg übrig, die Summe unſerer Reihe zu finden, nämlich die Darſtellung der beſtimmten Integrale durch die von Kramp (nach Arbogaſt) ſogenannten Factoriellen (Facultäten), wovon Euler in ſeiner Integralrechnung, T. I. c. IX., und in vielen, den akademiſchen Sammlungen einverleibten Schriften gehandelt hat, und die von den Analyſten nach ihm, unter andern von Legendre und Gauß, fleißig bearbeitet, zum Theil vereinfacht, und beträchtlich erweitert worden iſt. Einen Fundamentalſatz dieſes Theorie, welcher hier gebraucht wird, werde ich auf

eine andere Art, als von jenen Analyſten geſchehen iſt, zu begründen ſuchen.

Es iſt, wenn man $(1-x^r)^n$ nach dem Binomiſchen Lehrſatze entwickelt,

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^r)^n = \frac{x^m}{m} - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^{m+r}}{m+r} + \frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{x^{m+2r}}{m+2r} - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{x^{m+3r}}{m+3r} + \text{etc.} \ldots + C.$$

Sind alſo m und r poſitive Zahlen, ſo hat man innerhalb der Gränzen $x=0$ und $x=1$

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^r)^n = \frac{1}{m} - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{m+r} + \frac{n.n-1}{1.\ 2}\cdot\frac{1}{m+2r} - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{1}{m+3r} + \text{etc.}$$

d. i., vermöge des in der Anmerkung zu (39.) angeführten Satzes

$$= \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n.r^n}{m(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots(m+nr)}$$

wo aber vorausgeſetzt wird, daß n eine ganze poſitive Zahl iſt. Schreibt man jetzt mr ſtatt m, ſo wird

$$mr\int x^{mr-1}\partial x(1-x^r)^n = \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}$$

Soll n hier jeden beliebigen Werth erhalten können, ſo muß der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens eine ſolche Geſtalt annehmen, wobey ſein Werth zwar ungeändert, aber die Beſchaffenheit von n, ob es eine ganze oder gebrochene, poſitive oder negative Zahl iſt, ohne Einfluß bleibt. Nun beſtimmt n in der jetzigen Geſtalt des Ausdrucks die Zahl der Factoren im Zähler und Nenner deſſelben. Kann man alſo jenen Ausdruck dahin abändern, daß, unbeſchadet ſeines Werthes, die Factorenreihe im Zähler und Nenner nicht abbricht, ſo kommt die Beſchaffenheit von n weiter in keinen Betracht, indem für alle Werthe von n die

Anzahl der Factoren dieſelbe (unendlich groß) iſt. Jenes wird dadurch erhalten, daß man Zähler und Nenner mit $(n+1)(n+2)(n+3) \ldots\ldots$ etc. in inf. $\times (m+n+1)(m+n+2)(m+n+3) \ldots\ldots$ etc. in inf. multiplicirt. Dadurch wird nämlich

$$mr\int x^{mr-1}\partial x(1-x^r)^n$$
$$= \frac{1(m+n+1)2(m+n+2)3(m+n+3)\ldots\ldots \text{ etc. in inf.}}{(n+1)(m+1)(n+2)(m+2)(n+3)(m+3). \text{ etc. in inf.}}$$

wo n jede beliebige Zahl, nur keine ganze negative ſeyn kann, wenn der Werth des Integrals nicht unendlich werden ſoll.

Einen Beweis a posteriori von der Richtigkeit dieſes Ausdrucks gewährt der bekannte, aus andern Gründen erweisbare, Walliſiſche Ausdruck für $\frac{\pi}{2}$. Wenn nämlich $mr-1=0$, $r=2$, $n=-\frac{1}{2}$, alſo $m=\frac{1}{2}$, $m+n=0$ iſt, ſo wird $mr\int x^{mr-1}\partial x(1-x^r)^n$ $=\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$, welches von $x=0$ bis $x=1$ genommen nach (Integralformel, 64.) $=\frac{\pi}{2}$ iſt. Vermöge unſerer Formel iſt alſo

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ \ldots\ldots \text{ etc.}}{\frac{1}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{7}{2}.\ \ldots\ldots \text{ etc.}}$$
$$= \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ \ldots\ldots \text{ etc. in inf.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ \ldots\ldots \text{ etc. in inf.}}$$

welches Walliſens Ausdruck iſt.

Bezeichnet man nun mit Gauß (in der unter 105. angeführten Abhandlung) die Gränze, welcher ſich die

Größe

$$\frac{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, \ldots\ldots\ldots \, k \, . \, k^z}{(z+1)(z+2)(z+3) \ldots\ldots (z+k)}$$

bey unendlich wachſendem k ohne Ende nähert, durch Πz, ſo verwandelt ſich die obige Gleichung in dieſe

$$mr \int x^{mr-1} \partial x (1-x^r)^n = \frac{\Pi m . \Pi n}{\Pi (m+n)}$$

Iſt $mr - 1 = 0$, $r = 4$, $n = -\frac{1}{2}$, alſo $m = \frac{1}{4}$, $m + n = -\frac{1}{4}$, ſo entſteht hieraus

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\Pi(\frac{1}{4}) . \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{4})}$$

und auf ähnliche Art, wenn $mr - 1 = 2$ iſt,

$$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\Pi(\frac{3}{4}) . \Pi(-\frac{1}{2})}{3\Pi(\frac{1}{4})}$$

Die Werthe der Function Πz für negative gebrochene Werthe von z ergeben ſich aus denen für poſitive gebrochene z. Da nämlich der obigen Erklärung zufolge

$$\frac{\Pi(z+1)}{\Pi z} = \frac{(z+1)k}{(z+1+k)} = \frac{z+1}{1 + \frac{z+1}{k}}$$

für $k = \infty$ aber $1 + \frac{z+1}{k} = 1$ iſt, ſo wird

$$\Pi(z+1) = (z+1)\Pi z$$

und hiernach, wenn $z = -\frac{1}{2}$ iſt

$$\Pi(-\tfrac{1}{2}) = 2\Pi(\tfrac{1}{2})$$

und eben ſo

$$\Pi(-\tfrac{1}{4}) = \frac{4}{3}\Pi(\tfrac{3}{4})$$

Gauß hat ſeiner Abhandlung eine Tafel angehängt, welche die Werthe von $\log \Pi z$ von $z=0$ bis $z=1$ für alle Hunderttheile vermittelſt der Formeln in (44) und (45) auf zwanzig Decimalſtellen berechnet enthält. Eine ähnliche Tafel findet ſich in Legendre's Exercices T. II. p. 86. et suivv. für alle Tauſendtheile des Intervalls von $z=0$ bis $z=1$; doch ſind die Logarithmen nur in 12 Decimalſtellen angegeben. Zur Vergleichung iſt zu bemerken, daß die Function, welche Gauß durch Πz bezeichnet, bey Legendre $\Gamma(z+1)$ heißt. Vermittelſt der einen oder der andern dieſer beiden Tafeln laſſen ſich nun die Werthe der beſtimmten Integrale $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$; $\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, und damit die Summe der Reihe $1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} +$ etc. (105) leicht finden.

108. Die Reihe $1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2}$ + etc. kommt in dem Ausdrucke für die Zeit des Falls eines ſchweren Körpers durch den Quadranten eines verticalen Halbkreiſes vor. Heißt nämlich die Zeit des Falls durch einen Bogen, deſſen Endpunct in die Ruhelinie fällt, und deſſen Sagitte oder Sinus verſus c für den Halbmeſſer r iſt, t, ſo iſt

$$t = \frac{\pi}{2} . \frac{r}{\sqrt{(2r-c)g}} \left(1 - \frac{1^2}{2^2} . \frac{c}{2r-c} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} . \left(\frac{c}{2r-c}\right)^2 - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} . \left(\frac{c}{2r-c}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

wo g die Höhe des freyen Falls in einer Secunde anzeigt. Für den Quadranten iſt $c=r$, daher die Zeit des Falls durch denſelben

=

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}\right) . \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Dieſe Zeit verhält ſich alſo zu der Zeit des Falls durch einen unendlich kleinen Bogen, für welchen $c = 0$ iſt, wie die Summe der eingeklammerten Reihe zu $\sqrt{\frac{1}{2}}$, d. i., wie 0,8346268 : 0,7071068 oder wie 59 : 50 nächſtens. Huygens giebt im erſten Theile ſeines Horolog. oscillator. (Opp. var. T. I. p. 38) für jenes Verhältniß das annähernde 34:29 an, welches von dem 59:50 nicht ſehr abweicht, ſagt aber nirgends, wie er ſolches gefunden habe.

Aus dem gewöhnlichen Ausdrucke für die Zeit t des Falls durch einen Kreisbogen, welcher iſt

$$t = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} . \frac{c}{2r} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} . \left(\frac{c}{2r}\right)^2 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} . \left(\frac{c}{2r}\right)^3 + \text{etc.}\right) . \sqrt{\frac{r}{2g}}$$

folgt das Verhältniß der Fallzeit durch den Quadranten zu derjenigen durch einen unendlich kleinen Bogen wie $1 + \frac{1^2}{2^2} . \frac{1}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} . \frac{1}{4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} . \frac{1}{8} + \text{etc.} : 1$.

Die Summe der Reihe im Vordergliede dieſes Verhältniſſes ergiebt ſich aus (105), wenn man dort $u = -\frac{1}{2}$ macht, und iſt =

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial x}{\sqrt{x} . \sqrt{(1-x)(1-\frac{1}{2}x)}} \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}.$$ Setzt man $1 - x = zz$, ſo wird

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x} . \sqrt{(1-x)(1-\frac{1}{2}x)}} \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

$$= -2^{\frac{3}{2}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)(1+zz)}}\begin{bmatrix}z=1\\z=0\end{bmatrix}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}\begin{bmatrix}z=0\\z=1\end{bmatrix}.$$

Das beſtimmte Integral $\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}\begin{bmatrix}z=0\\z=1\end{bmatrix}$, welches in (105) als die Länge der rectangulären Elaſtica angegeben worden, iſt auch die Länge eines Quadranten der Lemniſcata. S. den Art., Lemniſcata. Behält man die Bezeichnung von (105) bey, ſo wird das Verhältniß der Zeit des Falls durch den Quadranten eines Kreiſes zu der durch einen unendlich kleinen Bogen $\frac{2A\sqrt{2}}{\pi} : 1 = \frac{2A}{\pi} : \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, welches mit dem vorhin angegebenen einerley iſt.

Noch folgt hieraus, daß

$$1+\frac{1^2}{2^2}.\frac{1}{2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{1}{4}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{1}{8}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\left(1-\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+\text{etc. in inf.}\right)\sqrt{2}.$$

Ferner ergiebt ſich noch leicht, daß die Summe der Reihe $1+\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+$ etc. unendlich groß iſt. Dieſe Summe wird nämlich aus (105), wenn man dort $u = -1$ macht, $=$

$\frac{1}{\pi}\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-1}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$. Es iſt aber $\int\frac{\partial x}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$ ſo genommen, daß es für $x=0$ verſchwindet, $=\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, welches, wenn man $x=1$ ſetzt, unendlich groß wird.

Wendet man auf die Reihe $1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} +$ etc. die in dem Art., Summirbare Reihe, 22., aus Maclaurin angeführte Regel an, indem man A, B, C das mte, (m+1)te und (m+2)te Glied ſeyn läßt, ſo findet ſich $\frac{A}{C} = \frac{(2m)^2(2m+2)^2}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$, $\frac{A-B}{B-C} = \frac{(2m+2)^2(4m-1)}{(2m-1)^2(4m+3)}$. Soll $\frac{A}{C} > \frac{A-B}{B-C}$ ſeyn, ſo giebt dieſes $\left(\frac{2m}{2m+1}\right)^2 > \frac{4m-1}{4m+3}$, d. i., $(2m)^2(4m+3) > (2m+1)^2(4m-1)$, oder $16m^3 + 12m^2 > 16m^3 + 12m^2 - 1$, welches offenbar für jeden Werth von m Statt hat. Nach jener Regel, die Montucla ſehr rühmt, wäre alſo die Summe der Reihe endlich, welches ſie doch nicht iſt. Für die Anwendung der Gaußiſchen in jenem Art., 24., mitgetheilten Regel iſt $\frac{M'}{M} = \frac{4mm - 4m + 1}{4mm} = \frac{mm - m + \frac{1}{4}}{mm}$, alſo $A = -1$, $a = 0$. Demnach nehmen, weil $A < a$ iſt, zwar die Glieder der Reihe unendlich ab, allein die Summe der Reihe iſt, weil $a - A = 1$, dennoch unendlich. Es muß indeß zur Ehre Maclaurin's hier angeführt werden, daß die obige von Montucla ihm zugeſchriebene Regel nicht von ihm ſelbſt herrührt. Er nennt aber den Urheber derſelben nicht mit Namen.

109. Exempel. Die zu ſummirende Reihe ſey

$$1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} u + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.\ 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} u^2$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} u^3$$
$$+ \text{etc. in inf.}$$

Nimmt man hier

$$z = 1 + \frac{\alpha}{1}ux + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}u^2x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.\ 2.\ 3}u^3x^3 + \text{etc.}$$
$$= (1-ux)^{-\alpha}$$

ſo iſt in (99.) $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{C} = \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} = \frac{\beta+1}{\gamma+1}\mathfrak{B}$; u. ſ. w., alſo $\mu = 1$, $\eta = \beta$, $\nu = 1$, $\vartheta = \gamma - 1$; ferner $\frac{\eta}{\mu} - 1 = \beta - 1$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = \gamma - \beta - 1$. Damit alſo die Bedingungen $i + \frac{\eta}{\mu} - 1 > 0$, und $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$, und zwar jene von $i = 1$ an, Statt haben, muß $\beta - 1 > 0$ und $\gamma - \beta > 0$ ſeyn. Folglich müſſen β und γ poſitiv, und $\gamma > \beta$ ſeyn. Hat dieſes Statt, ſo wird die Summe der Reihe

$$y = \frac{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}}{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}}$$

die Integrale von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen, und u als Conſtante behandelt.

Die Summe σ für den beſtimmten Werth $u = 1$ wird hiernach durch folgende Formel dargeſtellt.

$$\sigma = \frac{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}.$$

Aus (107) iſt

$$\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix} = \frac{\Pi\beta\,.\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\beta\,.\,\Pi(\gamma-\alpha-1)}$$

und, $\alpha = 0$ gemacht,

$$\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\frac{\Pi\beta.\Pi(\gamma-\beta-1)}{\beta.\Pi(\gamma-1)}$$

Dadurch wird

$$\sigma=\frac{\Pi(\gamma-1).\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1).\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

wo aber, damit σ nicht unendlich werde, noch erfordert wird, daß $\gamma-\alpha-\beta$ weder o noch eine ganze negative Zahl ſey. — Der gefundene Ausdruck für σ ſtimmt mit dem von Gauß auf einem anderen Wege erhaltenen überein.

Iſt $\alpha=1$, ſo wird hieraus

$$1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{\Pi(\gamma-1).\Pi(\gamma-\beta-2)}{\Pi(\gamma-2).\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

folglich, da (107) $\Pi(\gamma-1)=(\gamma-1)\Pi(\gamma-2)$, und eben ſo $\Pi(\gamma-\beta-1)=(\gamma-\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-2)$,

$$=\frac{\gamma-1}{\gamma-\beta-1}$$

wo nur erfordert wird, daß β und γ poſitiv, und $\gamma>\beta+1$ ſey, wenn die Summe nicht unendlich werden ſoll. Dieſes iſt die oben in (97) verſprochene allgemeinere Begründung der gegebenen Summe. Übrigens kann auch β eine negative ganze Zahl ſeyn, und dann folgt die Summirung entweder aus der ſchon mehrmals erwähnten Relation der Binomialcoefficienten, oder aus dem Euleriſchen in (11) beygebrachten Satze auf folgende Art.

Es iſt, $1-\frac{\beta}{1}x+\frac{\beta(\beta-1)}{1.\ 2}x^2-\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3$ + etc. für die dortige Reihe $a+a'x+a''x^2+$ etc. genommen, $S=(1-x)^\beta$; alſo $\frac{\partial S}{\partial x}=-\beta(1-x)^{\beta-1}$;

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \beta(\beta-1)(1-x)^{\beta-2}; \quad \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} = -\beta(\beta-1)(\beta-2)(1-x)^{\beta-3};$$

u. ſ. w. Ferner iſt $A = 1$; $A' = \frac{1}{\gamma}$; $A'' = \frac{1.\ 2}{\gamma(\gamma+1)}$; $A''' = \frac{1.\ 2.\ 3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}$; u. ſ. w., und es ergiebt ſich

$$\Delta A = -\frac{\gamma-1}{\gamma}; \quad \Delta A^2 = +\frac{\gamma-1}{\gamma+1}; \quad \Delta^3 A = -\frac{\gamma-1}{\gamma+2};$$

überhaupt $\Delta^n A = \frac{\gamma-1}{\gamma+n-1} \cdot (-1)^n$. Dadurch wird Z oder die Summe der Reihe $1 - \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\beta(\beta-1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$

$$= (1-x)^\beta + \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot x(1-x)^{\beta-1}$$

$$+ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{\beta(\beta-1)}{1.\ 2} x^2 (1-x)^{\beta-2}$$

$$+ \frac{\gamma-1}{\gamma+2} \cdot \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.\ 2.\ 3} x^3 (1-x)^{\beta-3} + \text{etc.}$$

Iſt β eine ganze Zahl, ſo bricht dieſe Reihe mit dem Gliede $\frac{\gamma-1}{\gamma+\beta-1} \cdot x^\beta$ ab. Macht man nun $x = 1$, ſo verſchwinden alle Glieder in Z bis auf das letzte, und es wird

$$1 - \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta(\beta-1)}{\gamma(\gamma+1)} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \text{etc.} = \frac{\gamma-1}{\gamma+\beta-1}.$$

109[b]. Wenn von Reihen der Art, als von (85) an bis hieher ſummirt worden, nicht die ganze unendliche Summe, ſondern nur die einer beſtimmten Anzahl Glieder vom Anfang der Reihe an geſucht wird, ſo iſt die

bisherige Methode ſo gut wie unausführbar. Wollte man z. E. von der in (92) ſummirten Reihe die Summe der erſten 1000 Glieder haben, ſo müßte die Reihe $1 + \frac{1}{4}x + \frac{1.3}{4.6}x^2 +$ etc. von dem Gliede an, welches in x^{1000} multiplicirt iſt, ſummirt, und der Werth dieſer Summe für $x = 1$ von dem in (92) gefundenen Totalwerthe abgezogen werden. Man müßte alſo die Summe von

$$\frac{1.3.5 \ldots 1999}{4.6.8 \ldots 2002}x^{1000}\left(1 + \frac{2001}{2004}x + \frac{2001.2003}{2004.2006}x^2 + \text{etc. in inf.}\right)$$

ſuchen, wo die Summe der eingeklammerten Reihe $= y$ durch die Gleichung

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}x^{1001}y = 1001\int x^{1000}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

beſtimmt werden würde. Welche menſchliche Geduld möchte aber hinreichen, die Entwickelung des Integrals zu vollführen! Man muß alſo zu den allgemeinen Gliedern dieſer Reihen zurückkehren, und aus ihnen die Summe durch die umgekehrte Methode der Differenzen ſuchen. Die allgemeinen Glieder gehören freylich zu den ſogenannten inexplicabeln Functionen, laſſen ſich aber doch, wie die Factoriellen mit gebrochenen Exponenten (man ſehe hier, 58) gleichfalls vermittelſt der umgekehrten Methode der Differenzen durch unendliche Reihen darſtellen. Dieſe Reihen müſſen aber nach den fallenden Potenzen der Stellenzahl x geordnet ſeyn, damit für große Werthe von x wenige Glieder der Reihe hinreichen den Werth des xten Gliedes oder die Summe von x Gliedern der gegebenen Reihe zu berechnen, indem, wenn die Summe verlangt wird, für kleine Werthe von x der gemeine Weg der Addition einzuſchlagen iſt. Es wird alſo zuerſt nöthig ſeyn, von der Erfindung der allgemeinen Glieder zu handeln.

110. Es ſeyen T und T′ zwey zunächſt auf einander folgende Glieder einer Reihe, zwiſchen denen die Relation $\frac{x+n}{x}T = T'$, wo x die Stellenzahl von T oder T′, n aber eine unveränderliche Größe iſt, Statt hat, man ſoll irgend ein Glied dieſer Reihe angeben.

Da $(x+n)T = xT' = x(T+\Delta T)$, ſo wird $nT = x\Delta T$.

Man ſetze der Erinnerung in (109^b) gemäß

$$T = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \text{etc.}$$

ſo wird, weil $\Delta x = 1$ iſt,

$$\Delta T = A((x+1)^n - x^n) + B((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + C((x+1)^{n-2} - x^{n-2}) + \text{etc.}$$

alſo, wenn man nach dem Binomiſchen Lehrſatze entwickelt, und mit x multiplicirt,

$$x\Delta T = nAx^n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}Ax^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}Ax^{n-2} + \text{etc.}$$
$$+ (n-1)B \qquad + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}B \qquad + \text{etc.}$$
$$+ \qquad (n-2)C$$

Da nun

$nT = nAx^n + nBx^{n-1} + nCx^{n-2} + \text{etc.}$ iſt, ſo giebt die Vergleichung der Coefficienten zu den gleichnamigen Potenzen von x,

$$B = \frac{n.n-1}{1.\ 2}A$$

$$C = \frac{n-1.n-2}{2.\ 2}\left(B + \frac{n}{3}A\right)$$

$$D = \frac{n-2.n-3}{3.\ 2}\left(C + \frac{n-1}{3}B + \frac{n(n-1)}{3.\ 4}A\right)$$

$$E = \frac{n-3.n-4}{4.\ 2}\left(D + \frac{n-2}{3}C + \frac{(n-1)(n-2)}{3.\ 4}B + \frac{n(n-1)(n-2)}{3.\ 4.\ 5}A\right)$$

etc.

wo das Geſetz des Fortgangs klar iſt. Der Coefficient A bleibt unbeſtimmt, und muß in jedem Falle beſonders beſtimmt werden.

Die vorgetragene Auflöſung giebt Stirling Method. diff. Prop. XXVI., und nach ihm Emerſon Method. of increments, Probl. XVI. Keiner von beiden ſagt, wie er zu der Annahme $T = Ax^n + \text{etc.}$ gekommen iſt. Zu dem Ende bemerke ich, daß, da $nT = x\Delta T = x\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{1.2\partial x^2} + \text{etc.}\right)$ iſt, man näherungsweiſe $nT = \frac{x\partial T}{\partial x}$ hat, woraus $T = Ax^n$ folgt, wo A die durch die Integration hereingebrachte Conſtans iſt.

Auf den Fall $n = 1$ iſt die gegebene Auflöſung nicht anwendbar. Dieſes gilt auch, wenn x nicht die Stellenzahl, ſondern eine lineare Function derſelben iſt, weil der Factor $n - 1$ in allen Gliedern außer dem erſten bleibt. Wie man, wenn $n = 1$ iſt, helfen kann, wird weiter unten (122) gezeigt werden.

111. Exempel. Die Reihe ſey $1, \frac{1}{2}a, \frac{3}{4}b, \frac{5}{6}c, \frac{7}{8}d$, u. ſ. w., wo a, b, c, d die Glieder der Reihe nach der Ordnung anzeigen, ſo iſt, wenn x die Stelle des Gliedes T iſt, $T' = \frac{2x-1}{2x}T = \frac{x-\frac{1}{2}}{x}$ alſo in (110) $n = -\frac{1}{2}$, und man erhält

$$B = \frac{3}{8}A$$

$$C = \frac{15}{16}\left(B - \frac{1}{6}A\right) = \frac{25}{128}A$$

$$D = \frac{35}{24}\left(C - \frac{3}{6}B + \frac{1}{16}A\right) = \frac{105}{1024}A$$

$$E = \frac{63}{32}\left(D - \frac{5}{6}C + \frac{5}{16}B - \frac{1}{32}A\right) = \frac{1659}{32768}A$$

$$F = \frac{99}{40}\left(E - \frac{7}{6}D + \frac{35}{48}C - \frac{7}{32}B + \frac{7}{384}A\right) = \frac{6237}{262144}A$$

etc.

Mithin iſt

$$T = \frac{A}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{25}{128x^2} + \frac{105}{1024x^3} + \frac{1659}{32768x^4} + \frac{6237}{262144x^5} + \text{etc.}\right)$$

Um den Coefficienten A zu beſtimmen, berechne man ein etwas weit vom Anfange der Reihe entferntes Glied nach dem bekannten Bildungsgeſetze der Reihe wirklich, z. E. das 16te. Es iſt $\frac{5.9.17.19.23.29}{2^{26}} =$ 0,144464448... . Dieſen Werth ſchreibe man für T, und für x ſeinen entſprechenden Werth 16, ſo iſt

$$0,144464448 = \frac{A}{4}\left(1 + \frac{3}{8.16} + \frac{25}{128.16^2} + \text{etc.}\right)$$

Die Summe der eingeſchloſſenen Reihe findet ſich = 1,02422627, und dadurch A = 0,564189583.

Dieſer Werth iſt aber auch $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, wie folgendergeſtalt erhellt. Man ſetze x = n, wo n unendlich groß iſt, ſo iſt der terminus infinitesimus dem gefundenen Ausdrucke zufolge $= \frac{A}{\sqrt{n}}$; vermöge des Ge-

ſetzes der Reihe aber $= \frac{1.3.5.7\ldots\ 2n-1}{2.4.6.8\ldots\ldots\ 2n}$. Nun iſt nach Wallis's bekanntem Ausdrucke $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ der letzte Werth von $\frac{1.3.5\ldots\ 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots\ 2n}\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$; daher jenes Glied auch $= \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})}}$ iſt. Für ein unendlich großes n iſt aber $\sqrt{(n+\frac{1}{2})}$ von $\sqrt{n}$ nicht verſchieden, daher $A = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}564189583547756\ldots$

Man hat alſo

$$T = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{25}{128x^2} + \frac{105}{1024x^3} + \frac{1659}{32768x^4} + \text{etc.}\right)$$

wodurch nun die etwas weit vom Anfange der Reihe abſtehenden Glieder leicht gefunden werden können.

Da (Binomialcoefficienten, 13.) für ${}^{2n}\mathfrak{N}$, den mittelſten Coefficienten in der Potenz 2n, iſt

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1.3.5.7\ldots\ldots\ 2n-1}{2.4.6.8\ldots\ldots\ 2n}$$

die Größe rechter Hand aber das (n+1)te Glied unſerer Reihe darſtellt, ſo wird, wenn man x = n + 1 macht,

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}\left(1 + \frac{3}{4(2n+2)} + \frac{25}{32(2n+2)^2} + \frac{105}{128(2n+2)^3} + \frac{1659}{2048(2n+2)^5} + \text{etc.}\right)$$

Hier ſind die Coefficienten des Reihenausdrucks bis auf die Vorzeichen einerley mit denen in Laplace's Ausdruck für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ in (54), und laſſen ſich daher auch durch die daſelbſt gegebenen Formeln leicht weiter fortſetzen. Man erhält übrigens durch Vergleichung beider Ausdrücke für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)}}\left\{1+\frac{3}{4(2n+2)}+\frac{25}{32(2n+2)^2}+\frac{105}{128(2n+2)^3}+\text{etc.}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(n-\frac{1}{2})}}\left\{1-\frac{3}{4(2n-1)}+\frac{25}{32(2n-1)^2}-\frac{105}{128(2n-1)^3}+\text{etc.}\right\}$$

wo n jeden beliebigen Werth haben kann.

Auch ergiebt ſich aus dem Werthe von $\log\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ woraus die Laplaciſche Formel für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ in (54) abgeleitet iſt, noch leicht folgender Ausdruck für denſelben Logarithmen

$$\log\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}=-\frac{1}{2}\log(n+1)\pi+\frac{3}{4(2n+2)}+\frac{1}{2(2n+2)^2}+\frac{3}{8(2n+2)^3}+\frac{1}{4(2n+2)^4}+\frac{3}{20(2n+2)^5}+\text{etc.}$$

ſo daß man alſo in allem vier Reihen für $\log\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ und eben ſo viele für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ hat.

112. Exempel. Die Reihe ſey 1, $\frac{1}{4}a$, $\frac{3}{6}b$, $\frac{5}{8}c$, $\frac{7}{10}d$, u. ſ. w., wo a, b, c.... die vorhergehenden Glieder ſind; man ſucht den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes der Reihe.

Wenn x—1 die Stelle von T, alſo x die Stelle von T′ iſt, ſo hat man $T' = \frac{2x-3}{2x}T = \frac{x-\frac{3}{2}}{x}T$; alſo in (110) $n = -\frac{3}{2}$, und es wird nach gehörig ausgeführter Rechnung

$$T = \frac{A}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{15}{8x^2} + \frac{385}{128x^3} + \frac{4725}{1024x^4} + \frac{228459}{32768x^5} + \frac{2747745}{262144x^6} + \text{etc.}\right)$$

Um A zu beſtimmen, ſuche man das 19te Glied der Reihe, indem man x—1 = 19, alſo x = 20 ſetzt. Es iſt $\frac{5.23.29.31.33.35}{2^{34}} = 0{,}006950558$; und man erhält

$$0{,}006950558 = \frac{A}{\sqrt{20}}\left(\frac{1}{20} + \frac{15}{8.20^2} + \frac{385}{128.20^3} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{20}} \cdot 0{,}0550947$$

woraus

$$A = 0{,}5641892$$

gefunden wird. Dieſer Werth ſtimmt mit dem in (111) für das dortige A gefundenen in den erſten ſechs

Decimalſtellen überein, und es läßt ſich auch, wie dort zeigen, daß derſelbe genau $= \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ iſt, in dem für ein unendlich großes n

$$\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{4.6.8\ldots.2n+2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{(n+1)\sqrt{(n+\frac{1}{2})}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

iſt.

113. Die Glieder einer Reihe ſind durch die Gleichung $T' = \frac{xx+r}{xx}T$ verknüpft, wo x eine lineare Function der Stellenzahl iſt, oder auch die Stellenzahl ſelbſt ſeyn kann, man ſoll den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes finden.

Da $(xx+r)T = xxT' = xx(T+\Delta T)$, ſo wird $rT = xx\Delta T$. Hieraus iſt näherungsweiſe $rT = xx\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x$, folglich weil ſich x mit der Stellenzahl gleichförmig ändert, alſo Δx conſtant iſt, $\frac{r}{\Delta x}\cdot\frac{\partial x}{xx} = \frac{\partial T}{T}$, woraus durch Integration $T = Ae^{-\frac{r}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}} = A\left(1 - \frac{r}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x} + \text{etc.}\right)$ folgt.

Man ſetze alſo

$$T = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \text{etc.}$$ ſo iſt, wenn man $\Delta x = \omega$ ſetzt,

$$\Delta T = -\frac{B\omega}{xx} + \frac{B\omega^2}{x^3} - \frac{B\omega^3}{x^4} + \frac{4}{x^5} - \text{etc.}$$

$$- \frac{2C\omega}{x^3} + \frac{3C\omega^2}{x^4} - \frac{4C\omega^3}{x^5} + \text{etc.}$$

$$- \frac{3D\omega}{x^4} + \frac{6D\omega^2}{x^5} - \text{etc.}$$

$$- \frac{4E\omega}{x^5} + \text{etc.}$$

$$- \text{etc.}$$

$$rT = rA + \frac{rB}{x} + \frac{rC}{x^2} + \frac{rD}{x^3} + \frac{rE}{x^4} + \text{etc.}$$

$$xx\Delta T = -B\omega + \frac{B\omega^2}{x} - \frac{B\omega^3}{x^2} + \frac{B\omega^4}{x^3} - \frac{B\omega^5}{x^4} + \text{etc.}$$

$$- \frac{2C\omega}{x} + \frac{3C\omega^2}{x^2} - \frac{4C\omega^3}{x^3} + \frac{5C\omega^4}{x^4} - \text{etc.}$$

$$- \frac{3D\omega}{x^2} + \frac{6D\omega^2}{x^3} - \frac{10D\omega^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$- \frac{4E\omega}{x^3} + \frac{10E\omega^2}{x^4} - \text{etc.}$$

$$- \frac{5F\omega}{x^4} + \text{etc.}$$

$$- \text{etc.}$$

und die Vergleichung der gleichnamigen Potenzen von $\frac{1}{x}$ giebt

$$B = -\frac{rA}{\omega}$$

$$C = \frac{\omega\omega - r}{2\omega} B = -\frac{\omega\omega - r}{2\omega\omega} rA$$

$$D = \frac{(3\omega\omega - r)C - B\omega^3}{3\omega}$$

$$E = \frac{(6\omega\omega - r)D - 4C\omega^3 + B\omega^4}{4\omega}$$

$$F = \frac{(10\omega\omega - r)E - 10D\omega^3 + 5C\omega^4 - B\omega^5}{5\omega}$$

$$G = \frac{(15\omega\omega - r)F - 20E\omega^3 + 15D\omega^4 - 6C\omega^5 + B\omega^6}{6\omega}$$

etc.

wo man das Geſetz des Fortgangs leicht bemerken wird.

Eine andere Auflöſung erhält man ſo. Man bezeichne die ſucceſſiven Werthe der unbeſtimmten x, welche ſind x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, u. ſ. w., durch x_1, x_2, x_3, u. ſ. w., ſo iſt

$$\Delta \frac{1}{x x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n+1)\omega}\right)$$

$$= \frac{(n+1)\omega}{x x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}$$

Nun ſey

$$T = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x x_1} + \frac{D}{x x_1 x_2} + \frac{E}{x \ldots x_3} + \text{etc.}$$

ſo wird

$$\Delta T = -\frac{B\omega}{x x_1} - \frac{2C\omega}{x x_1 x_2} - \frac{3D\omega}{x \ldots x_3} - \frac{4E\omega}{x \ldots x_4} - \text{etc.}$$

alſo

$$xx\Delta T = -\frac{Bx^2\omega}{x x_1} - \frac{2Cx^2\omega}{x x_1 x_2} - \frac{3Dx^2\omega}{x \ldots x_3} - \frac{4Ex^2\omega}{x \ldots x_4}$$
$$- \text{etc.}$$

Hier ſind nun noch $\frac{x^2}{x x_1}$, $\frac{x^2}{x x_1 x_2}$, u. ſ. w. in andere Brüche, deren Zähler unveränderliche Größen ſind, zu zerlegen, damit die Coefficienten A, B, C..... unab-

hän-

hängig von der unbeſtimmten x ausgedruckt werden können. Zu dem Ende ſey

$$\frac{xx}{x x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{\mathfrak{A}}{x x_1 x_2 \ldots x_{n-2}} + \frac{\mathfrak{B}}{x x_1 \ldots x_{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{x x_1 \ldots x_n}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ noch zu beſtimmende Coefficienten ſind. Bringt man rechter Hand alles auf einerley Benennung, und ſetzt ſtatt x_n, x_{n-1} ihre Werthe $x + n\omega$, $x + (n-1)\omega$, ſo wird

$$\begin{array}{llll} x^2 = \mathfrak{A}x^2 & + (2n-1)\omega\mathfrak{A}\, x & + n(n-1)\omega^2\mathfrak{A} \\ & + \mathfrak{B} & + n\omega\, \mathfrak{B} \\ & & + \mathfrak{C} \end{array}$$

Hieraus wird $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = -(2n-1)\omega$, $\mathfrak{C} = nn\omega^2$; ſo daß

$$\frac{x^2}{x x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{1}{x x_1 \ldots x_{n-2}} - \frac{(2n-1)\omega}{x x_1 \ldots x_{n-1}} + \frac{nn\omega^2}{x x_1 \ldots x_n}$$

Um die Zerlegung von $\frac{xx}{xx_1}$ zu haben, multiplicire man beiderſeits mit $x_2 x_3 \ldots x_n$, ſo wird

$$\frac{xx}{xx_1} = \frac{x_{n-1} x_n}{xx_1} - \frac{(2n-1)\omega x_n}{xx_1} + \frac{nn\omega^2}{xx_1}$$

und wenn man nun $n = 1$ macht, und ſich erinnert, daß $x_0 = x$,

$$\frac{xx}{xx_1} = 1 - \frac{\omega}{x} + \frac{\omega^2}{xx_1}$$

Die übrigen Fälle geben ſich durch die allgemeine Formel.

Man hat nun

$$rT = rA + \frac{rB}{x} + \frac{rC}{xx_1} + \frac{rD}{xx_1x_2} + \text{etc.}$$

und, wenn man auf die gewieſene Art reducirt,

$$xx\Delta T = -B\omega + \frac{B\omega^2}{x} - \frac{B\omega^3}{xx_1} - \frac{2.4C\omega^3}{xx_1x_2} - \text{etc.}$$

$$-\frac{2C\omega}{x} + \frac{2.3C\omega^2}{xx_1} + \frac{3.5D\omega^2}{xx_1x_2} + \text{etc.}$$

$$-\frac{3D\omega}{xx_1} - \frac{4E\omega}{xx_1x_2} - \text{etc.}$$

woraus durch Vergleichung der Coefficienten zu $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{xx_1}$ u. ſ. w. entſteht

$$B = -\frac{rA}{\omega}$$

$$C = \frac{\omega\omega - r}{2\omega}B$$

$$D = \frac{(2.3\omega\omega - r)C - B\omega^3}{3\omega}$$

$$E = \frac{(3.5\omega\omega - r)D - 2.4C\omega^3}{4\omega}$$

$$F = \frac{(4.7\omega\omega - r)E - 3.9D\omega^3}{5\omega}$$

$$G = \frac{(5.9\omega\omega - r)F - 4.16E\omega^3}{6\omega}$$

etc.

wo das Geſetz des Fortgangs nicht ſchwer zu überſehen iſt.

114. Exempel. Den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes der Reihe 1, $\frac{2.4}{3.3}a$, $\frac{4.6}{5.5}b$, $\frac{6.8}{7.7}c$, $\frac{8.10}{9.9}d$, u. ſ. w. zu finden.

Es ſey z die Stelle von T, alſo z + 1 die von T' ſo iſt

$$T' = \frac{2z(2z+2)}{(2z+1)^2} T$$

Macht man 2z + 1 = x, wodurch Δx oder $\omega = 2\Delta z = 2$ wird, ſo hat man

$$T' = \frac{(x-1)(x+1)}{xx} T$$

$$= \frac{xx-1}{xx} T$$

folglich r in (113) = − 1. Nach der erſten Auflöſung wird nun

$$B = \frac{1}{2} A$$

$$C = \frac{5}{4} B = \frac{5}{8} A$$

$$D = \frac{13C - 8B}{6} = \frac{11}{16} A$$

$$E = \frac{25D - 52C + 16B}{8} = \frac{83}{128} A$$

$$F = \frac{41E - 80D + 80C - 32B}{10} = \frac{143}{256} A$$

$$G = \frac{61F - 160E + 240D - 192C + 64B}{12} = \frac{625}{1024} A$$

u. ſ. w.

Mithin

$$T = A\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{5}{8xx} + \frac{11}{16x^3} + \frac{83}{128x^4} + \frac{143}{256x^5} + \frac{625}{1024x^6} + \text{etc.}\right)$$

Zur Beſtimmung von A berechne man das 10te Glied der Reihe wirklich. Es iſt $\frac{8^{11}}{5.11^2.13^2.17^2.19^2}$ $= 0{,}80527224$. Durch die Formel für T es zu erhalten, hat man $z = 10$, folglich $x = 21$. Es wird alſo jenes Glied $= A\left(1 + \frac{1}{2.21} + \frac{5}{8.21.21} + \text{etc.}\right)$ $= A \times 1{,}02530447$, mithin $A = \frac{80527224}{102530447} =$ $0{,}78539816\ldots$. Dieſes iſt ſehr genau der Werth von $\frac{1}{4}\pi$, ſo daß $A = \frac{1}{4}\pi$, und

$$T = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{5}{8xx} + \frac{11}{16x^3} + \frac{83}{128x^4} + \text{etc.}\right)$$

iſt. Wenn x unendlich groß iſt, ſo ergiebt ſich hieraus, daß das letzte Glied der Reihe oder das Product $1 \times \frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49} \times \frac{80}{81}$ etc. in inf. $= \frac{1}{4}\pi$ iſt, welches der von Wallis gefundene Satz iſt, den man alſo auf dieſe Weiſe hätte herausbringen können, wenn er noch nicht bekannt geweſen wäre.

Nach der zweyten Auflöſung wird

$$B = \frac{1}{2}A$$

$$C = \frac{5}{4}B = \frac{5}{8}A$$

$$D = \frac{25C - 8B}{6} = \frac{31}{16}A$$

$$E = \frac{61D - 64C}{8} = \frac{1251}{128}A$$

$$F = \frac{113E - 216D}{10} = \frac{17559}{256}A$$

$$G = \frac{181F - 512E}{12} = \frac{632385}{1024}A$$

etc.

Demnach iſt

$$T = A\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{5}{8xx_1} + \frac{31}{16xx_1x_2} + \frac{1251}{128x \ldots x_3} + \frac{17559}{256x \ldots x_4} + \frac{632385}{1024x \ldots x_5} + \text{etc.}\right)$$

Das 12te Glied der Reihe iſt $\frac{16^{10}}{3.(7.13.17.19.23)^2}$ $= 0{,}8019275$. Da für daſſelbe $z = 12$ iſt, ſo wird $x = 2z + 1 = 25$, mithin $x_1 = x + \omega = 27$, $x_2 = x + 2\omega = 29$, u. ſ. w.; daher

$$0{,}8019275 = A\left(1 + \frac{1}{2.25} + \frac{5}{8.25.27} + \frac{31}{16.25.27.29} + \text{etc.}\right)$$

$$= A \times 1{,}0210457$$

woraus A wie vorhin $= 0{,}785398 = \frac{1}{4}\pi$ ſich ergiebt.

Da A ſich hier, wie in (112) auch noch auf andere Art beſtimmen läßt, ſo zeigt ſich, daß, ohngeachtet des ſtarken Anwachſens der Coefficienten in der Reihe für T ſowohl hier als in (112) die Reihe in ihrem convergenten Theile ſicher zur Berechnung von T gebraucht werde. Man vergleiche oben (39).

115. Wenn die Glieder einer Reihe durch die Gleichung $T' = \frac{xx}{xx + r}T$, wo x daſſelbe, wie in

(114) iſt, beſtimmt werden, den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes der Reihe durch x, x_1, x_2, x_3 u. ſ. w. zu finden.

Da $T' = \frac{xx}{xx + r} T$, ſo wird $xxT' + rT' = xxT$ oder $xx(T + \Delta T) + rT' = xxT$, woraus $rT' + xx\Delta T = 0$ folgt.

Man ſetze nun,

$$T = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{xx_1} + \frac{D}{xx_1x_2} + \frac{E}{x \ldots x_3} + \text{etc.}$$

welche Annahme ſich auf ähnliche Weiſe, wie in (113) rechtfertigen läßt, ſo wird, $x + \Delta x$ oder $x + \omega$ ſtatt x geſetzt

$$T' = A + \frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1x_2} + \frac{D}{x_1x_2x_3} + \frac{E}{x_1 \ldots x_4} + \text{etc.}$$

alſo

$$rT' = rA + \frac{rB}{x_1} + \frac{rC}{x_1x_2} + \frac{rD}{x_1x_2x_3} + \frac{rE}{x_1 \ldots x_4} + \text{etc.}$$

Ferner iſt

$$\Delta T = -\frac{B\omega}{xx_1} - \frac{2C\omega}{xx_1x_2} - \frac{3D\omega}{x \ldots x_3} - \frac{4E\omega}{x \ldots x_4} - \text{etc.}$$

alſo

$$xx\Delta T = -\frac{Bx\omega}{x_1} - \frac{2Cx\omega}{x_1x_2} - \frac{3Dx\omega}{x_1x_2x_3} - \frac{4Ex\omega}{x_1 \ldots x_4} - \text{etc.}$$

Um hier die unbeſtimmte x aus den Zählern wegzuſchaffen, und zugleich $xx\Delta T$ auf die Form von rT' zu bringen, bemerke man, daß

$$\frac{x}{x_n} = \frac{x}{x + n\omega} = 1 - \frac{n\omega}{x + n\omega} = 1 - \frac{n\omega}{x_n}$$

alſo

$$\frac{x}{x_1} = 1 - \frac{\omega}{x_1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = 1 - \frac{\omega}{x_2}$$

u. ſ. w. iſt. Hierdurch wird

$$xx\Delta T = -B\omega + \frac{B\omega^2}{x_1} + \frac{4C\omega^2}{x_1 x_2} + \frac{9D\omega^2}{x_1 x_2 x_3} + \text{etc.}$$
$$- \frac{2C\omega}{x_1} - \frac{3D\omega}{x_1 x_2} - \frac{4E\omega}{x_1 x_2 x_3} - \text{etc.}$$

und vermöge der Gleichung $rT' + xx\Delta T = 0$ erhält man

$$B = \frac{rA}{\omega}$$

$$C = \frac{\omega\omega + r}{2\omega} B = \frac{r(\omega\omega + r)}{\omega .\ 2\omega} A$$

$$D = \frac{4\omega\omega + r}{3\omega} C = \frac{r(\omega\omega + r)(4\omega\omega + r)}{\omega .\ 2\omega .\ 3\omega} A$$

$$E = \frac{9\omega\omega + r}{4\omega} D = \frac{r(\omega\omega + r)(4\omega\omega + r)(9\omega\omega + r)}{\omega .\ 2\omega .\ 3\omega .\ 4\omega} A$$

etc.

wo das Geſetz des Fortgangs klar iſt.

Demnach iſt

$$T = A\left(1 + \frac{r}{\omega x}\mathfrak{A} + \frac{\omega\omega + r}{2\omega x}\mathfrak{B} + \frac{4\omega\omega + r}{3\omega x}\mathfrak{C} + \text{etc.}\right)$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ u. ſ. w. die nächſtvorhergehenden Glieder anzeigen.

Stirling hat die Aufgabe und ihre Auflöſung, Method. diff., Prop. XXVII; Emerſon, Method of Increments, Probl. XVIII.

116. Exempel. Den Werth des Products

$$\frac{2.\,2.\,6.\,6.\,10.\,10.\,14.\,14.\ \text{etc. in inf.}}{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13.\,15.\ \text{etc. in inf.}}$$

zu finden.

Man formire die Reihe $1,\ \frac{2.2}{1.3}a,\ \frac{6.6}{5.7}b,\ \frac{10.10}{9.11}c,\ \frac{14.14}{13.15}d$, u. ſ. w., und ſuche den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes derſelben.

Da, wenn z die Stelle des Gliedes T iſt,

$$T' = \frac{(4z-2)^2}{(4z-3)(4z-1)}$$

ſo wird, wenn man $4z-2 = x$ macht, wodurch $\omega = \Delta x = 4\Delta z = 4$ iſt,

$$T' = \frac{xx}{xx-1}T$$

und man erhält aus (115), wo $r = -1$ iſt,

$$T = A\left(1 - \frac{1}{4x}\mathfrak{A} + \frac{15}{8x_1}\mathfrak{B} + \frac{63}{12x_2}\mathfrak{C} + \frac{143}{16x_3}\mathfrak{D} + \frac{255}{20x_4}\mathfrak{E} + \text{etc.}\right)$$

Um A zu beſtimmen, berechne man das 13te Glied der Reihe. Es iſt $\frac{7.\,17.\,19.\,23.\,2^{24}}{9.\,15.\,29.\,31.\,33.\,37.\,41.\,43} =$ 1,4068706. Nach dem gefundenen Ausdrucke für T erhält man dafür

$$A\left(1 - \frac{1}{4.50} - \frac{1.15}{4.8.50.54} - \frac{1.15.63}{4.8.12.50.54.58} - \text{etc.}\right)$$

$= A \times 0{,}9948079$. Dieſes giebt $A = 1{,}414213\ldots$ oder $= \sqrt{2}$. Wenn z, alſo auch x unendlich groß wird, ſo iſt das letzte Glied der Reihe = A, d. i.,

$$\frac{2.2.6.6.10.10.14.14.\text{ etc. in inf.}}{1.3.5.7.\ 9.11.13.15.\text{ etc. in inf.}} = \sqrt{2}.$$

wie ſich aus dem Werthe von $\cos\frac{m\pi}{2n}$ in Cyklometrie (27), wenn man $m = 1$, $n = 2$ nimmt, ergiebt. Kehrt man den Bruch um, und multiplicirt auf beiden Seiten mit $\frac{2}{1}$, ſo wird

$$\frac{3.5.7.\ 9.11.13\ldots\ldots\text{ etc.}}{2.6.6.10.10.14\ldots\ldots\text{ etc.}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

wie in dem Art., Summirbare Reihe, 24, III. angegeben iſt.

117. Exempel. Die Glieder einer Reihe ſind 1; $\frac{2.2}{1.3}a$, $\frac{4.4}{3.5}b$, $\frac{6.6}{5.7}c$, $\frac{8.8}{7.9}d$, u. ſ. w., den allgemeinen Ausdruck für ein Glied dieſer Reihe zu finden.

Es bezeichne z die Stelle des Gliedes T, ſo iſt

$$T' = \frac{4zz}{(2z-1)(2z+1)}T$$

und wenn man $2z = x$ macht,

$$T' = \frac{xx}{xx-1}T$$

Demnach iſt in (115) $r = -1$, ferner $\omega = \Delta x = 2\Delta z = 2$, $x_1 = x + 2$, $x_2 = x + 4$, u. ſ. w., mithin

$$T = A\left(1 - \frac{1}{2x}\mathfrak{A} + \frac{3}{4(x+2)}\mathfrak{B} + \frac{15}{6(x+4)}\mathfrak{C} + \frac{35}{8(x+6)}\mathfrak{D} + \text{etc.}\right)$$

Zur Beſtimmung von A ſuche man das 10te Glied der Reihe. Es iſt $\frac{4^{16}}{5^2.\,11^2.\,13^2.\,17^2.\,19} =$

1,5300172735. Nach der Formel wird es, weil $x = 2z = 20$ iſt, $= A\left(1 - \frac{1}{2.20} - \frac{1.3}{2.4.20.22} - \frac{1.3.15}{2.4.6.20.22.24} - \text{etc.}\right) = A \times 0,9740392454.$

Hieraus folgt $A = 1,57079633 = \frac{1}{2}\pi$; ſo daß

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ \text{etc. in inf.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ \text{etc. in inf.}}$$

wie bekannt.

118. Es laſſen ſich noch mehrere Sätze, wie die in (110), (113), (115) ſind, finden, je nachdem man andere und andere Relationen zwiſchen den Gliedern der Reihe annimmt; es mag aber an den beygebrachten genug ſeyn. Es iſt noch übrig zu zeigen, wie die ſummatoriſchen Glieder ſolcher Reihen, als von (110) bis hierher betrachtet ſind, gefunden werden können.

119. Das ſummatoriſche Glied einer Reihe, für welche $T' = \frac{x+n}{x}T$, wo x, wie in (110), die Stelle von T oder T′ anzeigt, zu finden.

Es ſey die Summe der Reihe bis mit zu dem Gliede ′T, welches T zunächſt vorhergeht, s, ſo erhellt aus (13), daß

$$\Delta s = T$$

alſo $x + 1$ ſtatt x geſetzt

$$\underset{1}{\Delta s} = T' = \frac{x+n}{x}T$$

mithin

$$\underset{1}{\Delta s} - \Delta s = \frac{n}{x}T$$

d. i.

$$\Delta\Delta s = \frac{n}{x}\Delta s$$

oder

$$x\Delta\Delta s = n\Delta s$$

alſo

$$\Sigma(x\Delta\Delta s) = ns$$

iſt. Um das Integral $\Sigma(x\Delta\Delta s)$ zu finden, integrire man theilweiſe nach der Formel

$$\Sigma u\Delta t = ut - \Sigma t_1 \Delta u$$

welche man leicht aus (Differenzenrechnung, 6.) ableitet. Man ſetze nämlich $u = x$, $\Delta t = \Delta\Delta s$, ſo iſt $\Delta u = \Delta x = 1$, $t = \Delta s$, $t_1 = \Delta s_1$, und

$$\Sigma(x\Delta\Delta s) = x\Delta s - \Sigma\Delta s_1$$
$$= x\Delta s - s_1 + C.$$

Folglich iſt

$$ns = xT - (s + \Delta s) + C$$
$$= xT - s - T + C$$

und

$$(n+1)s = (x-1)T + C.$$

Die Beſtimmung der Conſtans hängt nun davon ab, ob x die Stelle von T oder T' iſt. Iſt das erſte, ſo iſt für $x = 1$, $T = a$, dem erſten Gliede, und s (die Summe der erſten $x - 1$ Glieder) $= 0$, daher $C = 0$, und

$$s = \frac{n-1}{n+1}T.$$

Bezeichnet x die Stelle von T', ſo iſt s die Summe von $x - 2$ Gliedern der Reihe, alſo für $x = 2$, $T = a$, $s = 0$, mithin $C = -a$, und

$$s = \frac{(x-1)T - a}{n+1}$$

120. Exempel. Die Summe einer Anzahl der erſten Glieder der Reihe $1 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b + \frac{5}{6}c + \text{etc.}$,

wo a, b, c, u. ſ. w. die nächſtvorhergehenden Glieder ſind, zu finden.

Für dieſe Reihe iſt, wenn x die Stelle von T iſt, $T' = \frac{x - \frac{1}{2}}{x} T$ (111). Alſo bezeichnet s in (119) die Summe der erſten x — 1 Glieder, und man erhält, wenn man ſtatt n ſeinen Werth $-\frac{1}{2}$, und ſtatt T den in (111) gefundenen Werth ſetzt

$$s = \frac{2x - 2}{\sqrt{\pi x}} \left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{25}{128 x^2} + \frac{105}{1024 x^3} + \text{etc.} \right)$$

Hiernach iſt die Summe der 100 erſten Glieder

$$= \frac{200}{\sqrt{101 \pi}} \left(1 + \frac{3}{8.101} + \frac{25}{128.101^2} + \frac{105}{1024.101^3} + \text{etc.} \right)$$

$= 11,12696955 \ldots\ldots$

Wenn x ſehr groß iſt, ſo iſt ſehr nahe s $= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$. Die Summe der ganzen ins Unendliche fortgeſetzten Reihe iſt unendlich groß.

120^{b}. Exempel. Von der Reihe $1 + \frac{1}{4}a + \frac{3}{6}b + \frac{5}{8}c + \frac{7}{10}d +$ etc. eine beliebige (aber etwas große) Anzahl Glieder vom Anfange der Reihe an zu ſummiren.

Für dieſe Reihe iſt, wenn x die Stelle des Gliedes T′, alſo x — 1 die von T anzeigt, aus (112)

$$T' = \frac{x - \frac{3}{2}}{x} T$$

Bezeichnet alſo s die Summe von x — 2 Gliedern, ſo hat man aus (120), $n = -\frac{3}{2}$, und $a = 1$ gemacht,

$$s = 2 - 2(x-1)T$$

und, wenn man ſtatt T ſeinen Werth aus (112) ſetzt,

$$s = 2 - \frac{2x-2}{\sqrt{\pi x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{15}{8x^2} + \frac{385}{128x^3} + \text{etc.}\right)$$

$$= 2 - \frac{2x-2}{x\sqrt{\pi x}}\left(1 + \frac{15}{8x} + \frac{385}{128x^2} + \text{etc.}\right)$$

Die Summe der erſten 1000 Glieder der Reihe, wo $x = 1002$ iſt, wird hiernach

$$= 2 - \frac{2002}{1002\sqrt{1002\pi}}\left(1 + \frac{15}{8.1002} + \frac{385}{128.1002^2} + \text{etc.}\right)$$

$$= 2 - 0{,}03567447.. = 1{,}96432552 \ldots .$$

Iſt x ſehr groß, ſo hat man ſehr nahe $s = 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi x}}$. Die Summe der ganzen ins Unendliche fortgeſetzten Reihe aber, für welche $x = \infty$ iſt, iſt $= 2$, wie ſchon in (92) gefunden worden.

120°. Die Reihe $1 + \frac{2.4}{3.3}a + \frac{4.6}{5.5}b + \frac{6.8}{7.7}c + \frac{8.10}{9.9}d +$ etc. allgemein zu ſummiren.

Es ſey s die Summe von z — 1 Gliedern der Reihe, T das Glied in der Stelle z, ſo iſt $\Delta s = T$. Dieſe Gleichung bleibt, wenn auch ſtatt z eine neue variable x geſetzt wird, welche eine Function jener iſt, nur muß dann freylich darauf Rückſicht genommen

werden, daß nun Δx nicht $= 1$ iſt, wie ſonſt, wo x die Stellenzahl ſelbſt bezeichnet.

In (114) wo $2z + 1 = x$ geſetzt ward, wodurch Δx oder $\omega = 2\Delta z = 2$ iſt, iſt gefunden

$$T = A\left(1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x x_1} + \frac{\gamma}{x x_1 x_2} + \frac{\delta}{x \ldots x_3} + \text{etc.}\right)$$

wo $A = \frac{1}{4}\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{5}{8}$; $\gamma = 1{,}9375$; $\delta = 9{,}7734$; $\varepsilon = 68{,}59$; $\zeta = 617{,}56$; u. ſ. w. iſt. Man hat alſo

$$\Delta s = A\left(1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x x_1} + \frac{\gamma}{x x_1 x_2} + \frac{\delta}{x \ldots x_3} + \text{etc.}\right)$$

mithin

$$s = \text{Const.} + A\left(\Sigma x^0 + \alpha\Sigma\frac{1}{x} + \beta\Sigma\frac{1}{x x_1} + \gamma\Sigma\frac{1}{x x_1 x_2} + \delta\Sigma\frac{1}{x \ldots x_3} + \text{etc.}\right)$$

Da (113)

$$\Delta\frac{1}{x x_1 \ldots\ldots x_n} = -\frac{(n+1)\omega}{x x_1 x_2 \ldots\ldots x_{n+1}}$$

ſo iſt umgekehrt

$$\Sigma\frac{1}{x x_1 \ldots\ldots x_{n+1}} = -\frac{1}{(n+1)\omega}\cdot\frac{1}{x x_1 \ldots\ldots x_n}$$

Hieraus ergeben ſich $\Sigma\frac{1}{x x_1}$, $\Sigma\frac{1}{x x_1 x_2}$, u. ſ. w. Was Σx^0 betrifft, ſo iſt, weil $\Delta x = \omega = \omega x^0$; $\omega\Sigma x^0 = \Sigma\Delta x = x$, alſo $\Sigma x^0 = \frac{x}{\omega}$. Noch iſt $\Sigma\frac{1}{x}$ übrig.

Dieſes hat man mittelſt der in (36^b.) angeführten allgemeineren Formel, nach welcher

$$\Sigma y = \frac{\int y \partial x}{\omega} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{12}\Delta y - \frac{1}{24}\Delta^2 y + \frac{19}{720}\Delta^3 y - \frac{3}{160}\Delta^4 y + \text{etc.}$$

zu ſuchen, indem man $y = \frac{1}{x}$ ſetzt. Dadurch wird

$$\Sigma \frac{1}{x} = \frac{\log x}{\omega} - \frac{1}{2x} - \frac{\omega}{12 x x_1} - \frac{\omega^2}{12 x x_1 x_2} - \frac{19\omega^3}{120 x \ldots\ldots x_3} - \frac{9\omega^4}{20 x \ldots\ldots x_4} - \text{etc.}$$

Auf dieſe Weiſe entſteht

$$s = \text{Const.} + A\Big(\frac{x}{\omega} + \frac{\alpha \log x}{\omega} - \Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{\omega}\Big)\frac{1}{x} - \Big(\frac{\alpha\omega}{12} + \frac{\gamma}{2\omega}\Big)\frac{1}{x x_1} - \Big(\frac{\alpha\omega^2}{12} + \frac{\delta}{3\omega}\Big)\frac{1}{x x_1 x_2} - \Big(\frac{19\alpha\omega^3}{120} + \frac{\varepsilon}{4\omega}\Big)\frac{1}{x \ldots\ldots x_3} - \text{etc.}\Big)$$

und, wenn man ſtatt A, α, β, γ, u. ſ. w. ihre Werthe, und für ω ſeinen Werth 2 ſubſtituirt,

$$s = \text{Const.} + \frac{1}{4}\pi\Big(\frac{x}{2} + \frac{\log x}{4} - \frac{9}{16x} - \frac{6{,}8125}{12 x x_1} - \frac{10{,}7734}{6 x x_1 x_2} - \frac{9{,}207}{x \ldots\ldots x_3} - \frac{65{,}36}{x \ldots\ldots x_4} - \text{etc.}\Big)$$

Die Conſtans zu beſtimmen, ſuche man die Summe der erſten 12 Glieder der Reihe durch wirkliche Berechnung; ſie iſt = 10,0649126. Da für dieſelbe

$z-1=12$, alſo $z=13$ iſt, ſo wird $x=27$, alſo $x_1=29$, $x_2=31$, u. ſ. w., und

$$10{,}0649126=\text{Const.}+\frac{1}{4}\pi\left(\frac{27}{2}+\frac{\log 27}{4}-\frac{9}{16.27}-\frac{6{,}8125}{12.27.29}-\frac{10{,}7734}{6.27.29.31}-\text{etc.}\right)$$

Die ausgeführte Rechnung giebt Const. $=1{,}1680971$, ſo daß

$$s=-1{,}1680971+\frac{1}{4}\pi\left(\frac{x}{2}+\frac{\log x}{4}-\frac{9}{16x}-\frac{6{,}8125}{12xx_1}-\frac{10{,}7734}{6xx_1x_2}-\text{etc.}\right)$$

iſt.

Für ein ſehr großes x hat man näherungsweiſe $s=-1{,}1680971+\frac{\pi(2x+\log x)}{16}$. Die Summe der ganzen ins Unendliche fortgeſetzten Reihe aber iſt unendlich groß. Zu vergleichen, Summirbare Reihe, 24. II.

121. Auf dieſelbe Art, wie die Reihe $1+\frac{2.4}{3.3}a+\frac{4.6}{5.5}b+\frac{6.8}{7.7}c+$ etc. jetzt ſummirt worden, laſſen ſich die Reihen $1+\frac{2.2}{1.3}a+\frac{6.6}{5.7}b+\frac{10.10}{9.11}c+$ etc.; $1+\frac{2.2}{1.3}a+\frac{4.4}{3.5}b+\frac{6.6}{5.7}c+$ etc.; $1+\frac{3.3}{2.4}a+\frac{5.5}{4.6}b+\frac{7.7}{6.8}c+$ etc. ſummiren. Das allgemeine Glied der erſten iſt in (116), dasjenige der anderen in (117) gefunden. Für die dritte Reihe wird das allgemeine

gemeine Glied ganz ſo ausgedrückt, wie bey der andern, wofern $z+1$ die Stelle des Gliedes T iſt, und $2z+3=x$ gemacht wird. Die Conſtante iſt $\frac{4}{\pi}$.

122. Die Reihe $\frac{2}{1}+\frac{4}{3}a+\frac{6}{5}b+\frac{8}{7}c+\frac{10}{9}d$ + etc. zu ſummiren.

Es ſey z die Stelle des Gliedes T, ſo hat man

$$T'=\frac{2z+2}{2z+1}T$$

alſo, wenn $2z+1=x$ geſetzt wird, wodurch Δx oder $\omega=2$ wird,

$$T'=\frac{x+1}{x}T.$$

Aus dieſer Gleichung folgt durch eine ganz ähnliche Rechnung wie in (119), nur mit dem Unterſchiede, daß Δx dort $=1$ war, hier aber $=2$ iſt,

$$3s=(x-2)T+C.$$

wo s die Summe von $z-1$ Gliedern der Reihe anzeigt. Da alſo für $z=1$, $s=0$ werden muß, x aber alsdann $=3$ und $T=a$ iſt, ſo wird $0=a+C=2+C$, folglich $C=-2$, und

$$s=\frac{(x-2)T-2}{3}$$

Weil T ſich durch x der Bemerkung in (110) zufolge nicht darſtellen läßt, ſo quadrire man die Gleichung

$$T'=\frac{x+1}{x}T$$

ſo wird

$$TT'=\frac{xx+2x+1}{xx}TT$$

und wenn man $TT = V$ ſetzt, wodurch $T'T' = V'$ wird, ſo entſteht

$$xxV' = (xx + 2x + 1)V$$

d. i. $\quad xx(V + \Delta V) = (xx + 2x + 1)V$

und hieraus $(2x + 1)V - xx\Delta V = 0$. Aus dieſer Gleichung folgt zu einer erſten Annäherung

$$(2x + 1)V = xx \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \Delta x = 2xx . \frac{\partial V}{\partial x}, \text{ alſo}$$

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial x}{2xx}, \text{ woraus } V = Axe^{-\frac{1}{2x}}$$

$$= Ax\left(1 - \frac{1}{2x} + \text{etc.}\right) = Ax - \frac{1}{2}A + \text{etc.}$$

hervorgeht.

Man ſetze daher

$$V = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x x_1} + \frac{E}{x x_1 x_2} + \text{etc.}$$

ſo wird

$$\Delta V = A\omega * - \frac{C\omega}{x x_1} - \frac{2D\omega}{x x_1 x_2} - \frac{3E\omega}{x \ldots x_3} - \text{etc,}$$

Ferner

$$2xV = 2Axx + 2Bx + 2C + \frac{2Dx}{x x_1} + \frac{2Ex}{x x_1 x_2} + \text{etc.}$$

und, wenn man hier ſtatt $\frac{x}{x_1}, \frac{x}{x_2}, \frac{x}{x_3}$. u. ſ. w. die ihnen gleichgeltenden Werthe $1 - \frac{\omega}{x_1}$, $1 - \frac{2\omega}{x_2}$, $1 - \frac{3\omega}{x_3}$, u. ſ. w. ſchreibt,

$$= 2Axx + 2Bx + 2C + \frac{2D}{x} - \frac{2D\omega}{xx_1} - \frac{4E\omega}{xxx_{1\,2}} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{2E}{xx_1} + \frac{2F}{xxx_{1\,2}} + \text{etc.}$$

Weiter iſt

$$xx\Delta V = A\omega xx\,* - \frac{C\omega xx}{xx_1} - \frac{2D\omega xx}{xxx_{1\,2}} - \frac{3E\omega xx}{x \ldots x_3} - \text{etc.}$$

und wenn man die in (113) gewieſenen Reductionen anbringt,

$$= A\omega xx\,* - C\omega + \frac{C\omega^2}{x} - \frac{C\omega^3}{xx_1} - \frac{8D\omega^3}{xxx_{1\,2}} - \text{etc.}$$
$$- \frac{2D\omega}{x} + \frac{6D\omega^2}{xx_1} + \frac{15E\omega^2}{xxx_{1\,2}} + \text{etc.}$$
$$- \frac{3E\omega}{xx_1} - \frac{4F\omega}{xxx_{1\,2}} - \text{etc.}$$

Setzt man die reducirten Werthe von $xx\Delta V$, $2xV$ in die Gleichung $2xV + V - xx\Delta V = 0$, und für ω oder Δx ſeinen Werth 2, ſo werden folgende Beſtimmungen der Coefficienten erhalten. $A = A$,

$B = -\frac{1}{2}A$, $C = \frac{1}{8}A$, $D = \frac{1}{16}A$, $E = \frac{11}{128}A$,

$F = \frac{45}{256}A$, $G = \frac{261}{1024}A$, u. ſ. w.

Demnach iſt V oder

$$TT = A\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{16xx_1} + \frac{11}{128xxx_{1\,2}} + \frac{45}{256x \ldots x_3} + \frac{261}{1024x \ldots x_4} + \text{etc.}\right)$$

Der Coefficient A iſt $\frac{\pi}{2}$, wie es theils die unmittelbare Berechnung aus dem Falle $z=10$, wo $x_1=21$, $x_2=23$, $x=25$, u. ſ. w. iſt, lehrt, theils ſich daraus ergiebt, daß für ein unendlich großes z nach dem Walliſiſchen Ausdrucke

$$\frac{2.4.6.\ldots.2z}{1.3.5.\ldots.2z-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(2z+1)} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}$$

iſt. Man hat alſo

$$s = -\frac{2}{3} + \frac{x-2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{16xx} + \text{etc.}\right)$$

Hiernach erhält man die Summe der 100 erſten Glieder der Reihe, wo $z-1=100$, alſo $z=101$, und $x=2z+1=203$ iſt, $=1194{,}2783$. Für ein ſehr großes z iſt die Summe näherungsweiſe $\frac{1}{3}x\sqrt{\frac{1}{2}\pi x} = \frac{2}{3}z\sqrt{\pi z}$. Die Summe der ganzen in's Unendliche fortlaufenden Reihe iſt unendlich groß.

123. Die Reihe $1 + \frac{1.1}{2.3}a + \frac{3.3}{4.5}b + \frac{5.5}{6.7}c + \frac{7.7}{8.9}d +$ etc., deren Totalwerth, wie ſich aus (101) oder aus (Cyklometrie, 1.) ergiebt, $\frac{1}{2}\pi$ iſt, allgemein zu ſummiren.

Es ſey z die Stelle des Gliedes T der Reihe, ſo iſt

$$T' = \frac{(2z-1)^2}{2z(2z+1)}T$$

oder, wenn man $2z = x$ ſetzt, wo dann ω oder $\Delta x = 2$ iſt,

$$T' = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} T$$

Bezeichnet s die Summe der $z-1$ erſten Glieder der Reihe, ſo iſt $\Delta s = T$, und, wenn z in $z+1$ übergeht, $\underset{1}{\Delta s} = T'$, mithin

$$\underset{1}{\Delta s} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} \Delta s$$

woraus, wenn ſtatt $\underset{1}{\Delta s}$ ſein Werth $\Delta s + \Delta\Delta s$ geſetzt wird, folgt

$$(3x-1)\Delta s + x(x+1)\Delta\Delta s = 0$$

Um dieſe Gleichung zu integriren, ſey $s = v\Delta s$, wo v eine Function von x iſt, ſo wird

$$\begin{aligned} \Delta s &= (v+\Delta v)(\Delta s + \Delta\Delta s) - v\Delta s \\ &= \Delta v \Delta s + (v + \Delta v)\Delta\Delta s \\ &= \Delta v \Delta s + \underset{1}{v}\,\Delta\Delta s \end{aligned}$$

alſo

$$\Delta s = \frac{\underset{1}{v}\,\Delta\Delta s}{1-\Delta v}$$

Wird dieſer Werth von Δs in die obige Gleichung gebracht, ſo entſteht

$$(3x-1)\underset{1}{v} + x(x+1)(1-\Delta v) = 0$$

oder

$$\left(3 - \frac{1}{x}\right)\underset{1}{v} + (x+1)(1-\Delta v) = 0.$$

Für ein großes x iſt näherungsweiſe

$$3\underset{1}{v} + x(1-\Delta v) = 0$$

oder, wenn man $\underset{1}{v} = v + \Delta v = v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x =$

$v + \frac{2\partial v}{\partial x}$, alſo $\Delta v = \frac{2\partial v}{\partial x}$ macht,

$$3v + 6\frac{\partial v}{\partial x} + x - 2x\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Läßt man hier noch $6\frac{\partial v}{\partial x}$, als unbeträchtlich gegen $2x\frac{\partial v}{\partial x}$ weg, ſo kommt

$$3v + x - 2x\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

oder

$$\partial v - \frac{3}{2x}v\partial x = \frac{1}{2}\partial x$$

der integrirende Factor für dieſe Gleichung iſt $x^{-\frac{3}{2}}$ und es wird

$$vx^{-\frac{3}{2}} = C - x^{-\frac{1}{2}}$$

alſo

$$v = -x + Cx^{\frac{3}{2}}$$

Man kann das Glied $Cx^{\frac{3}{2}}$ nicht zum Anfangsgliede der Reihe für v machen, weil ſonſt in den Ausdruck für s durch T zufolge der Gleichung $s = v\Delta s + \text{Const.} = vT + \text{Const.}$ zwey willkührliche Conſtanten kommen würden, welches nicht ſeyn darf, da wenn s durch T vermittelſt der Gleichung $\Delta s = T$ beſtimmt wird, nur eine ſolche hineinkommt. Daß man $v = -x +$ etc. ſetzen müſſe, ergiebt ſich ganz offenbar aus Zuziehung des Werthes von T. Es iſt nämlich

$$T = 1 \times \frac{1.1.3.3.5.5\ldots.(2z-3)(2z-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots.(2z-2)(2z-1)}$$

$$= \frac{1.3.5.7\ldots.\,2z-3}{2.4.6.8\ldots.\,2z-2}\cdot\frac{1}{2z-1}$$

In (111) ſetze man $n = z - 1$, ſo wird

$$\frac{1.3.5.\ldots.2z-3}{2.4.6.\ldots.2z-2} = \frac{1}{\sqrt{\pi z}}\Big(1 + \frac{3}{4.2z} + \frac{25}{32.(2z)^2}$$
$$+ \frac{105}{128.(2z)^3} + \frac{1659}{2048(2z)^4} + \text{etc.}\Big)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}\Big(1 + \frac{3}{4x} + \frac{25}{32x^2}$$
$$+ \frac{105}{128x^3} + \frac{1659}{2048x^4} + \text{etc.}\Big)$$

weil $2z = x$. Mithin wird

$$T = \frac{1}{(x-1)\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}\Big(1 + \frac{3}{4x} + \frac{25}{32x^2} + \frac{105}{128x^3} + \text{etc.}\Big)$$

alſo für ein ſehr großes x nahe $T = \frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$ $= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} . x^{-\frac{3}{2}}$. Aus der Gleichung $\Delta s = T$ hat man zu einer erſten Annäherung $\frac{\partial s}{\partial x} . \Delta x = T$ d. i. $2\partial s = T\partial x$, alſo $\partial s = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} . x^{-\frac{3}{2}}\partial x$ und $s = \text{Const.} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} . x^{-\frac{1}{2}} = \text{Const.} - xT$, welches zeigt, daß $-x$ das erſte Glied in v iſt.

Es ſey alſo

$$v = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x x_1} + \frac{E}{x x_1 x_2} + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\Delta v = A\omega - \frac{C\omega}{x x_1} - \frac{2D\omega}{x x_1 x_2} - \frac{3E\omega}{x \ldots x_3} - \text{etc.}$$

und

$$v_1 = Ax_1 + B + \frac{C}{x_1} + \frac{D}{x_1 x_2} + \frac{E}{x_1 x_2 x_3} + \text{etc.}$$

$$= Ax + A\omega + B + \frac{C}{x} + \frac{D - C\omega}{x x_1} + \frac{E - 2D\omega}{x x_1 x_2}$$

$$+ \frac{F - 3E\omega}{x \ldots x_3} + \text{etc.}$$

und $\left(3 - \frac{1}{x}\right) v_1 = 3Ax + 3(A\omega + B) + \frac{3C}{x}$

$$+ \frac{3(D - C\omega)}{x x_1} + \text{etc.}$$

$$- A - \frac{A\omega + B}{x} - \frac{C}{x x_1} - \text{etc.}$$

$$= 3Ax + (3\omega - 1)A + 3B + \frac{3C - A\omega - B}{x}$$

$$+ \frac{3D - (3\omega + 1)C}{x x_1} + \frac{3E - (6\omega + 1)D}{x x_1 x_2}$$

$$+ \frac{3F - (9\omega + 1)E}{x x \ldots x_3} + \text{etc.}$$

Ferner

$$x(1 - \Delta v) = (1 - A\omega)x + \frac{C\omega x}{x x_1} + \frac{2D\omega x}{x x_1 x_2} + \frac{3E\omega x}{x \ldots x_3} + \text{etc.}$$

$$= (1 - A\omega)x + \frac{C\omega}{x} + \frac{(2D - C\omega)\omega}{x x_1} + \frac{(3E - 4D\omega)\omega}{x x_1 x_2}$$

$$+ \frac{(4F - 9E\omega)\omega}{x \ldots x_3} + \text{etc.}$$

und

$$(x+1)(1-\Delta v) = (1-A\omega)x + 1 - A\omega + \frac{C\omega}{x} + \frac{(2D-C\omega+C)\omega}{x x_1} + \frac{(3E-4D\omega+2D)\omega}{x x_1 x_2} + \frac{(4F-9E\omega+3E)\omega}{x \ldots\ldots x_3} + \text{etc.}$$

Werden die reducirten Werthe von $\left(3-\frac{1}{x}\right)v_1$ und $(x+1)(1-\Delta v)$ in die Gleichung $\left(3-\frac{1}{x}\right)v_1 + (x+1)(1-\Delta v) = 0$ gebracht, und ſtatt ω ſein Werth 2 geſetzt, ſo erhält man $A=-1$, $B=\frac{2}{3}$, $C=-\frac{4}{15}$, $D=\frac{9}{7}C=-\frac{12}{35}$, $E=\frac{25}{9}D=-\frac{20}{21}$, $F=\frac{49}{11}E=-\frac{140}{33}$, $G=\frac{81}{13}F=-\frac{3780}{143}$, u. ſ. w. Demnach iſt

$$v = -x + \frac{2}{3} - \frac{4}{15x} - \frac{12}{35 x x_1} - \frac{20}{21 x x_1 x_2} - \frac{140}{33 x \ldots x_3} - \text{etc.}$$

und $s = C + v\Delta s = C + vT$

$$= C - T\left(x - \frac{2}{3} + \frac{4}{15x} + \frac{12}{35 x x_1} + \frac{20}{21 x x_1 x_2} + \text{etc.}\right)$$

Will man den Totalwerth der Reihe, welcher $\frac{1}{2}\pi$ iſt, nicht als bekannt annehmen, ſo ſuche man zur

Beſtimmung der Conſtans auf dem gewöhnlichen Wege der Addition die Summe der erſten 10 Glieder der Reihe. Sie iſt 1,39169464, und das 11te Glied = 0,008390336. Dieſe Werthe ſetze man für s und T, und für z − 1 ſeinen entſprechenden Werth 10, alſo z = 11, und x = 2z = 22, ſo wird

$$1{,}39169464 = C - 0{,}008390336\left(22 - \frac{2}{3} + \frac{4}{15.22} + \frac{12}{35.22.24} + \text{etc.}\right)$$

$$= C - 0{,}008390336 \times 21{,}34618781$$

$$= C - 0{,}17910168$$

und

$$C = 1{,}39169464 + 0{,}17910168 = 1{,}57079632$$

Dieſes iſt ſehr genau der Werth von $\frac{1}{2}\pi$, ſo daß demnach

$$s = \frac{1}{2}\pi - T\left(x - \frac{2}{3} + \frac{4}{15x} + \frac{12}{35xx} + \text{etc.}\right)$$

iſt, wo man zur Berechnung von T entweder die vorhin gegebene Reihe braucht, oder auch den logT vermittelſt der Formel

$$\text{log. vulg. } T = -\text{log. vulg.}(x-1) - \frac{1}{2}\text{log. vulg} \frac{1}{2}\pi x + k\left(\frac{3}{4x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{1}{4x^4} + \text{etc.}\right)$$

ſucht, in welcher k = 0,4342944819... iſt.

Die Summe der erſten 1000 Glieder der Reihe, wo z − 1 = 1000, x = 2002, und log. vulg. T = 8,2513707 iſt, findet ſich hiernach = 1,5529543. Man ſieht hieraus, wie langſam die Reihe an den Totalwerth convergirt, und daß man eine ſehr große Anzahl Glieder zuſammenrechnen müßte, um $\frac{1}{2}\pi$ mittels

der Reihe in 7 Decimalſtellen genau zu erhalten. Man kann dieſes ſo überſchlagen. Da für ein großes x ſehr nahe $s = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$, ſo findet ſich, daß wenn $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} < 0{,}00000005$ ſeyn ſoll, $x > 254647908947032\frac{1}{2}$ ſeyn muß, welches über 127 Billionen Glieder giebt. Auf ähnliche Art läßt ſich in andern Fällen den Überſchlag machen, wovon hier noch ein Beyſpiel ſtehen mag, um eine Behauptung in dem Artikel, Reihe, 30., rückſichtlich der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ zu rechtfertigen. Es ſeyen nämlich von derſelben 2x Glieder zuſammengenommen, ſo beträgt die Ergänzung zu dem Totalwerthe $\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2x+3} - \text{etc.}$ oder $\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \text{etc.}$ Nach (52) iſt dieſes $= \frac{1}{4x+1} - \frac{1}{(4x+1)^3} + \frac{5}{(4x+1)^5} - \text{etc.}$, alſo für ein großes x ſehr beynahe $\frac{1}{4x+1}$. Soll dieſes kleiner ſeyn als 0,0000000005, ſo wird erfordert, daß $4x+1 > 2.10^9$ und $2x > 999999999\frac{1}{2}$ alſo wenigſtens $= 1000.10^6$ ſey.

124. Läßt ſich eine Reihe durch die bekannten Methoden entweder gar nicht, oder nur auf eine ſehr verwickelte Art ſummiren, ſo kann man zuweilen eine Annäherung zu der Summe dadurch erhalten, daß

man ſie als eine geometriſche oder arithmetiſche betrachtet, wovon hier noch ein Beyſpiel beygefügt werden ſoll.

Die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel von p Seiten in q Würfen n beſtimmte Seiten zu werfen iſt

$$\frac{p^q - \left[\frac{n}{1}\right](p-1)^q + \left[\frac{n}{2}\right](p-2)^q - \left[\frac{n}{3}\right](p-3)^q + \text{etc.}}{p^q}$$

wo die Reihe im Zähler, bey welcher der Kürze wegen die Euleriſche Bezeichnungsart der Binomialcoefficienten gebraucht iſt, ſo lange fortgeſetzt wird, bis ſie irgendwo abbricht.

Wird nun die Zahl der Würfe geſucht, in denen Jemand mit gleicher Ausſicht auf Gewinn oder Verluſt es unternehmen kann, n Seiten zu werfen, d. i., wo die Wahrſcheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird, ſo iſt der vorige Ausdruck $= \frac{1}{2}$ zu ſetzen, und q aus der ſo erhaltenen Gleichung zu beſtimmen. Da dieſes direct nicht geſchehen kann, das Probiren aber höchſt langweilig iſt, ſo muß man die Summe der Reihe im Zähler des Ausdrucks auf eine annähernde Weiſe zu beſtimmen ſuchen, zumal da die Frage die höchſte Genauigkeit nicht verlangt. Man erhält dieſes am kürzeſten dadurch, daß man mit Moivre (Doctrine of Chances, p. 111. sec. ed.) die Reihe p, p − 1, p − 2, ... als eine abnehmende geometriſche Reihe mit dem Exponenten $\frac{p-1}{p}$ anſieht. Dadurch verwandelt ſich der obige Ausdruck in dieſen $1 - \left[\frac{n}{1}\right]\left(\frac{p-1}{p}\right)^q$

$$+ \left[\frac{n}{2}\right]\left(\frac{p-1}{p}\right)^{2q} + \left[\frac{n}{3}\right]\left(\frac{p-1}{p}\right)^{3q} + \text{etc.}$$

$= \left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^q\right)^n$, welcher $= \frac{1}{2}$ geſetzt,

$$q = \frac{\log \frac{1}{1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}}}{\log p - \log(p-1)}$$

giebt. Zu einem Zahlenbeyſpiele ſey $p = 6$, $n = 6$ oder es werde gefragt, in wie viel Würfen Jemand, 1 gegen 1 ſetzend, es unternehmen kann, mit einem gemeinen Spielwürfel alle ſechs Seiten zu werfen. Man erhält $q = \frac{0{,}9621700}{0{,}0791813} = 12\frac{1}{7}$ circa; alſo zwiſchen 12 und 13 Würfen. In der That iſt auch die Wahrſcheinlichkeit das Verlangte in 12 Würfen zu leiſten $= \frac{953029440}{2176782336} < \frac{1}{2}$, und in 13 Würfen daſſelbe zu thun $= \frac{6709904640}{13060694016} > \frac{1}{2}$.

Bey einer ähnlichen Frage in Betreff des Zahlenlotto läßt ſich daſſelbe Mittel zur Erhaltung einer genäherten Summe anwenden. Laplace Théorie des probabilités, Liv. II. nro. 4., wo man aber auch die vollkommnere Methode findet.

Einige hieher zu ziehende Beyſpiele ſind noch folgende.

Moivre nahm, um die Berechnung der Leibrenten, ſowohl der einfachen als der zuſammengeſetzten, zu erleichtern, an, daß das Abſterben gleichmäßig erfolge, d. h., er betrachtete die Zahlen der Sterblichkeitstafeln, welche angeben, wie viel von einer Anzahl zugleich Lebender eines gewiſſen Alters nach ein, zwey, drey u. ſ. w. Jahren noch übrig ſind, als die Glieder einer abnehmenden einfachen arithmetiſchen Reihe, wodurch freylich die Berechnung leicht genug wird, das

Ergebniß derſelben ſich aber doch zu ſehr von der Wahrheit entfernt. Thom. Simpſon verbeſſerte Moivre's Hypotheſe auf eine ſcharfſinnige Art, wodurch der Fehler vermindert wird. S. Tetens Einleit. zu der Berechn. der Leibrenten, Th. I. S. 103 u. folgg. Kramp hat die Zahlen der Sterblichkeitstafeln als Glieder einer rücklaufenden Reihe der erſten Ordnung betrachtet in dem Leipziger Magazine für reine und angewandte Mathematik von 1787., S. 130. u. folgg.

Bey der genäherten Beſtimmung des Verhältniſſes der Summe der Glieder des entwickelten Binomiums $(m+n)^{rm+rn}$, wo rm und rn ſehr große Zahlen ſind, von dem Gliede an, das in der Stelle $nr \mp q + 1$ ſteht, bis mit zu dem größten der Entwickelung, deſſen Stelle $rn+1$ iſt, zu der Summe aller Glieder hat Nikol. Bernoulli ſich auf eine ähnliche Art, wie von Moivre eben jetzt angeführt iſt, verhalten. Er ſah nämlich die Factoren

$$\frac{rm+q}{rn-q+1},\ \frac{rm+q-1}{rn-q+2},\ \ldots\ldots \frac{rm+1}{rn}$$

des Products $\frac{(rm+q)(rm+q-1)(rm+q-2)..(rm+1)}{(rn+q+1)(rn-q+2)(rn-q+3)..\,rn}$, wodurch das Verhältniß des größten Gliedes zu dem in der Stelle $rn-q+1$ ausgedrückt wird, als die Glieder einer abnehmenden geometriſchen Reihe an, deren Logarithmen alſo in arithmetiſcher Progreſſion ſind, wodurch dann allerdings ein genäherter Werth jenes Products ſehr leicht erhalten werden kann. Moivre beſtimmte den Werth dieſes Products weit genauer, Doctrine of Chances, p. 242. sec. ed. Laplace hat Moivre's Beſtimmung vervollkommnet, Théorie des probabilités, Liv. II. ch. III. nro. 16.

125. Hutton hat in ſeinen Tracts on mathematical and philosophical subjects Vol. I. p. 176. eine Summirungsart beſtimmter Reihen mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder angegeben, welche

darin beſteht, daß man zuerſt eine größere oder geringere Anzahl Glieder, je nachdem der Grad der Convergenz der Reihe es mit ſich bringt, vom Anfange der Reihe an wirklich zuſammenzieht, und dadurch eine Reihe von Werthen bildet, welche abwechſelnd größer und kleiner ſind, als die wahre Summe. Man nimmt alsdann zwiſchen je zwey dieſer Gränzen, wovon die eine größer, die andere kleiner iſt, als die geſuchte Summe, das arithmetiſche Mittel, und bildet ſo eine neue Reihe von Werthen, zwiſchen welchen die Summe enthalten iſt, die aber nicht ſo weit aus einander liegen als die vorigen Gränzen. Auf dieſe ſo erhaltenen neuen Gränzen wendet man wieder das vorige Verfahren an, und ſetzt dieſes ſo lange fort, als die Gränzen noch ungleich ſind, oder bis nur noch ein einziges Paar übrig iſt. In jenem Falle giebt jedes der zuletzt erhaltenen gleichen arithmetiſchen Mittel die verlangte Summe genau, in dieſem erhält man in dem arithmetiſchen Mittel des übriggebliebenen Paars Gränzen einen genäherten Werth der Summe, welcher um ſo genauer ſeyn wird, je näher die zuletzt zugezogenen Gränzen einander kommen. Hutton bringt dieſes Verfahren auf allgemeine Formeln, indem er darnach die ſucceſſiven genäherten Werthe der Summe der Reihe $a - b + c - d + e - f +$ etc. ſucht, welche ſind $\frac{1}{2}a$; $\frac{3a-b}{4}$; $\frac{7a-4b+c}{8}$; u. ſ. w., von welchen Formeln er auch das allgemeine Geſetz angiebt. Dieſe Formeln ergeben ſich leicht daraus, daß, wenn $a - b + c - d + e -$ etc. $= s$ geſetzt wird, man auch, wie in dem Artikel, Umwandlung der Reihen, gezeigt werden wird, hat

$$s = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta a + \frac{1}{8}\Delta^2 a - \frac{1}{16}\Delta^3 a + \text{etc.}$$

wo Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, ... die Anfangsglieder der aus der Grundreihe a, b, c, d.... abgeleiteten Differenzreihen ſind.

Hutton bringt bey ſeiner Methode noch einige Modificationen an, um ſie auch auf ſtark divergirende Reihen anwendbar zu machen. Da man aber nach dieſer Methode nichts findet, was man nicht auch durch die in dieſem Art. vorgetragenen Summirungsmethoden, und zwar weit vollkommner erhalten kann, ſo gebe ich kein Beyſpiel zur Erläuterung derſelben, ſondern überlaſſe es jedem, ſich nach dem hier gegebenen Abriß ſelbſt eins zu machen. Montucla hat übrigens ein ſolches, Histoire des mathém. T. III. p. 242. sec. ed.

126. In den Phil. Transact. von 1784 iſt ein Aufſatz von Waring befindlich, worin mehrere Summirungsarten kurz durchgegangen werden. Sie ſind ſämmtlich unter den von mir erklärten begriffen bis auf eine, welche hier noch eine Erwähnung verdient, und auf folgendes hinauskommt. Es ſey S die Summe einer Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ etc., und es ſeyen α, β, γ u. ſ. w. die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$. Wenn nun A, B, C, u. ſ. w. die Werthe ſind, worin ſich S verwandelt, wenn darin αx, βx, γx, u. ſ. w. ſtatt x geſchrieben werden, ſo iſt $\frac{A + B + C + \text{etc.}}{n}$ die Summe einer Reihe, deren Glieder das erſte, $(n+1)$te, $(2n+1)$te, u. ſ. w. der zum Grunde gelegten Reihe ſind. Wegen des Beweiſes dieſes Satzes, welcher auf den Eigenſchaften der Wurzeln der zweygliedrigen Gleichung $x^n - 1 = 0$ beruht, muß ich die Liebhaber auf einen über eben dieſen Gegenſtand ſehr klar abgefaßten Aufſatz von Thom. Simpſon in den Phil. Transact. von 1757 verweiſen. Die Reihen, welche durch dieſe Methode ſummirbar ſind, können zwar auch durch die Leibnitz-Bernoulliſche Methode ſummirt werden, allein man erhält ſie nach jener Art doch leichter. Ja man wird hierdurch oft das Integral einer Differentialgleichung finden können, welches auf dem gewöhnlichen Wege nur ſehr

mühſam zu erhalten ſteht. Z. B. die Summirung der Reihe $1 + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}x^6$ + etc., deren Summe $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{(1+x)}}\right)$ iſt, hängt von der Integration der Gleichung $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} - \frac{3x}{1-xx}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{3}{4(1-xx)}y = 0$, wo ∂x conſtant iſt, ab. Die Gleichungen $y = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, und $y = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ ſind particuläre Integrale jener Gleichung; das vollſtändige Integral iſt $y = C(1-x)^{-\frac{1}{2}} + C'(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, wo C und C′ ein Paar willkührliche Conſtanten ſind.

Supplement, eigentlich ſo viel als Complement, Ergänzung. Es iſt aber jetzt faſt durchgängig eingeführt, unter Supplement dasjenige zu verſtehen, was einem Bogen oder Winkel an 180° fehlt, und Complement allein auf das einzuſchränken, was mit einem Bogen oder Winkel zuſammen 90° ausmacht.

Schon Albert Girard hat in ſeinen, 1629 zu Haag erſchienenen, trigonometriſchen Tafeln an eine verſchiedene Benennung der beiden Ergänzungen gedacht. Supplementum als Ergänzung zu 180° kommt in Caswells Trigonometrie, welche ſich am Ende des zweyten Bandes von Wallis's Werken befindet, vor.

Supplementardreyeck heißt in der Sphärik und ſphäriſchen Trigonometrie ein Kugeldreyeck in Beziehung auf ein anderes, deſſen Winkelpuncte die Pole der größten Kreiſe ſind, welche durch ihren Durchſchnitt jenes bilden. Da aber auf dieſe Weiſe acht Dreyecke auf der Kugelfläche entſtehen, indem jene Kreiſe einander in ſechs Punkten, welche wiederum die Pole der

Seiten des Grunddreyecks ſind, ſchneiden, ſo bedarf die obige Erklärung noch einer näheren Beſtimmung. Zuerſt alſo iſt zu bemerken, daß, da jene acht Dreyecke paarweiſe in den Seiten und Winkeln übereinkommen, nur die vier dem urſprünglichen Dreyecke nächſten, und die halbe Kugelfläche einnehmenden, Dreyecke in Betracht zu kommen brauchen. Unter dieſen Dreyecken iſt das Supplementardreyeck zwiſchen denjenigen Polen der Seiten des Grunddreyecks enthalten, welche in Anſehung der zugehörigen Kreisbogen mit den Winkeln des Grunddreyecks, welche denſelben gegenüber liegen, an einerley Seite fallen.

Das Supplementardreyeck, welches auch aus einem leicht abzunehmenden Grunde Polardreyeck genannt wird, ſteht mit dem Grunddreyecke in einer ſolchen Wechſelbeziehung, daß die Seiten des einen die Supplemente der Winkel des andern (verſteht ſich bloß in Rückſicht der Gradanzahl) ſind. Durch Zuziehung des Supplementardreyecks laſſen ſich manche Sätze der Sphärik und ſphäriſchen Trigonometrie leichter erweiſen, als es ſonſt wohl geſchehen könnte. Phil. Lansberg ſcheint ſich des Supplementardreyecks oder vielmehr des zwiſchen den einander nächſten Polen der Seiten des Grunddreyecks enthaltenen in dieſer Abſicht zuerſt bedient zu haben. Aber abgeſehen hiervon, iſt die Beziehung ſchon an und für ſich merkwürdig.

Surdeſolidum, eine in der ältern Algebra gebräuchliche, jetzt abgekommene Benennung der fünften Potenz einer Zahl. Davon ſurdeſolidaliſch, die fünfte Potenz angehend. Man findet auch Surſolidum in derſelben Bedeutung.

Surdus numerus, ſurdiſche Zahl, eine veraltete Benennung der Irrationalzahlen, die aber noch

in England gebräuchlich iſt. Die Rechnung mit der-gleichen Zahlen in dem Artikel, Wurzelgröße.

Surſolidum s. hyperſolidum problema iſt ein ſolches, zu deſſen Auflöſung Linien von einer höheren Ordnung als der zweyten erfordert werden. Solida problemata hießen nämlich bey den älteren Geometern, wie Pappus in der Vorrede zum ſiebenten Buche ſeiner mathem. Samml. bey der Inhaltsanzeige von des Apollonius Büchern de inclinationibus anführt, Aufgaben, zu deren Auflöſung die Kegelſchnitte zuzuziehen ſind. Huygens und die ihm gleichzeitigen Geometer, wie Jak. Bernoulli, bedienen ſich der angegebenen Benennungen noch. Jetzt werden ſie nicht mehr gebraucht.

Was aber die Sache ſelbſt betrifft, ſo merke ich noch an, daß Huygens bey der Auflöſung von Aufgaben, welche auf cubiſche Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln führen, der Theilung des Winkels in drey gleiche Theile den Vorzug vor den Kegelſchnitten gab. Et haec conſtruendi ratio (per triſectionem anguli ſcil.), ſagt er in dem Anfange zu der Schrift de circuli magnitudine inventa, quodammodo ſimpliciſſima videtur atque ad uſum maxime accommodata.

Von Jak. Bernoulli iſt in den Act. erudit. 1689 eine ſinnreiche Conſtruction der cubiſchen Gleichungen durch Kreis und gerade Linie enthalten, wobey das geſuchte durch einen nach demſelben Geſetz zu wiederholenden Cyclus einfacher Conſtructionen gefunden wird, und zwar nach Vollendung eines Cyclus immer genauer, und durch eine ohne Ende fortgeſetzte Reihe von Conſtructionen völlig genau. Die Gründe des Verfahrens, welche Bernoulli a. a. O. nicht angezeigt hatte, machte er nachher im zweyten Theile der Poſitionum de ſeriebus infinitis bekannt. Man ſehe die

Sammlung ſeiner Werke T. I. Nro. XXXVII. und LIV., auch die sections coniques von L'Hopital, S. 351 — 358. Hier mag als Beyſpiel dieſer Annäherungsmethode die durch fortgeſetztes Ausziehen der Quadratwurzel zu Stande gebrachte Erfindung zweyer Mittelproportionalen x und y zwiſchen zwey gegebenen Größen a und b Platz finden.

Es ſey nämlich $\sqrt{b} = p$, $\sqrt{ap} = p'$, $\sqrt{bp'} = p''$, $\sqrt{ap''} = p'''$, $\sqrt{bp'''} = p'^{v}$, u. ſ. w., ſo iſt x das letzte Glied der ohne Ende fortgeſetzten Reihe p', p''', p^{v}, u. ſ. w., y aber dasjenige der Reihe p'', p'^{v}, p^{vi} etc. in inf.

Denn es ſeyen $p^{(2z-1)}$ und $p^{(2z+1)}$ zwey nächſte Glieder der Reihe p', p''', p^{v}, u. ſ. w., ſo iſt nach dem Bildungsgeſetz dieſer Reihe $p^{(2z+1)} = \sqrt{(a(\sqrt{bp^{(2z-1)}}))}$. Näheren ſich nun die Glieder p^{I}, p^{III}, p^{V}, u. ſ. w. ohne Aufhören einer gewiſſen Gränze x, ſo iſt für ein unendlich großes z, $p^{(2z-1)} = p^{(2z+1)} = x$, d. i. $x = \sqrt{(a(\sqrt{bx}))}$, alſo $xx = a\sqrt{bx}$, und $x^4 = aabx$, folglich $x^3 = aab$; demnach x die erſte zweyer Mittelproportionalen zwiſchen a und b. Eben ſo erhellt, daß $y^3 = abb$, alſo y die andere der beiden Mittelproportionalen iſt.

Der Beweis läßt ſich auch ſo führen. Es iſt $p' = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}$; $p''' = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$; $p^{v} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}} b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}$; überhaupt $p(2z+1) = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2.4^{z}}} b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{4^{z+1}}}$ $= a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3.2^{2z+1}}} b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3.2^{2z+2}}}$, alſo für ein unendlich großes z, $= a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} = x$, daher $x^3 = a^2 b$. Eben ſo wird $y = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$.

Nähme man anfangs $\sqrt{a} = q$, und dann $\sqrt{bq} = q'$, $\sqrt{aq'} = q''$, $\sqrt{bq''} = q'''$, u. ſ. w., ſo würde x das letzte Glied der Reihe q'', q'^{v}, $q^{v'}$, u. ſ. w.

y aber das der Reihe q', q''', q^{v}, etc. in inf. werden.

Zu einem Beyſpiele in Zahlen ſey $a = 8$, $b = 27$. Vermittelſt der Logarithmen wird gefunden $\log p^{xxiii} = \log p^{xxv} = \log x = 1{,}0791813 = \log 12$, und $\log p^{xxiv} = \log p^{xxvi} = 1{,}2552725 = \log y = \log 18$. Dieſes dient, einen Begriff von dem bey dieſer Methode Statt habenden Grade der Convergenz zu geben. Man kann aber die Rechnung in dieſem Falle, ſo wie in ähnlichen Fällen, durch folgenden Satz von **Stirling** (Meth. differ. Prop. XXX) beträchtlich abkürzen. Es ſeyen A, B, C, D, u. ſ. w., in umgekehrter Ordnung genommene Glieder einer Reihe, deren Differenzen nahe in geometriſcher Progreſſion, nämlich wie 1, r, r^2, r^3 u. ſ. w. ſind, ſo iſt das letzte Glied der Reihe $= A + \frac{A-B}{r-1}$

$$+ \frac{rA-(r+1)B+C}{(r-1)(r^2-1)} + \frac{r^3A-r(r^2+r+1)B+(r^2+r+1)C-D}{r-1.\ r^2-1.\ r^3-1.}$$

etc. — In dem obigen Beyſpiele iſt $\log p' = 0{,}8093859346 = D$; $\log p''' = 1{,}0177324182 = C$; $\log p^{v} = 1{,}0623190392 = B$; $\log p^{v''} = 1{,}0749656943 = A$; und in Zehntauſendmilliontheilchen $A - B = 126466551$, $B - C = 505866210$, $C - D = 2023464836$, welche Unterſchiede ſich ſehr nahe wie 1, 4, 16 verhalten. Daher wird das letzte Glied der Reihe, d. i.

$$\log x = A + \frac{A-B}{3} + \frac{4A-5B+C}{3.15} + \text{etc.}$$

$$= 1{,}0749656943 + \frac{0{,}0126466551}{3}$$

$$+ \frac{0{,}0000000006}{3.15} + \text{etc.}$$

$$= 1{,}0791812460 = \log 12.$$

Stirlings Formel folgt übrigens aus einer ſehr allgemeinen Formel von Laplace zur Interpolation der Reihen, in denen die letzte Relation der Glieder die einer rücklaufenden Reihe von irgend einer Ordnung iſt. Théorie des probabilités, Livr. I. Nro. 6.

Es verdient noch angemerkt zu werden, daß Buteo, der auch ſonſt als ein ſcharfſinniger Kopf bekannt iſt, die Verdoppelung eines Würfels durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie das obige, geſucht hat. Käſtners Geſch. der Math. Bd. I. S. 470.

Symmetrie, Eben- oder Gleichmaß, iſt die gehörige Übereinſtimmung der Theile eines Ganzen unter einander. Davon ſymmetriſch, jene Übereinſtimmung beobachtend oder darin gegründet. Symmetrie kann ſowohl bey arithmetiſchen als geometriſchen Zuſammenſetzungen Statt finden. Die Symmetrie arithmetiſcher Zuſammenſetzungen beſteht in der übereinſtimmigen Bildung der ſämmtlichen oder gruppweiſe genommenen Theile eines Aggregats aus gewiſſen formloſen oder eintheiligen Größen, und ſie iſt vollſtändig, wenn die Auswahl der in die Zuſammenſetzung der einzelnen Theile eingehenden einfachen Größen aus der ganzen in dem Aggregate enthaltenen Reihe derſelben keiner fremdartigen Bedingung unterliegt, unvollſtändig hingegen, wenn dieſes der Fall iſt. Jene findet bey den ſymmetriſchen Functionen, wovon ein eigener Artikel handelt, dieſe bey den ſymmetriſchen Formeln Statt. Ein Beyſpiel einer ſolchen Formel iſt folgendes.

Es ſeyen a, c, f, d die vier Seiten eines ebenen geradlinigen Vierecks, b und e die beiden Diagonalen deſſelben, und zwar b diejenige, welche die Puncte verbindet, in denen die Seiten a und c, ſo wie d und f zuſammentreffen, ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} a^2f^2(-a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-f^2) \\ +b^2e^2(\ \ a^2-b^2+c^2+d^2-e^2+f^2) \\ +c^2d^2(\ \ a^2+b^2-c^2-d^2+e^2+f^2) \\ -a^2b^2c^2-a^2d^2e^2-b^2d^2f^2-c^2e^2f^2 \end{array}\right\} = 0$$

Der erſte Theil dieſer Gleichung iſt eine ſymmetriſche Formel. Die erſte Gruppe der Glieder, welche die drey erſten Zeilen einnimmt, iſt die Summe der Producte, welche entſtehen, wenn das Product aus den Quadraten je zweyer nicht (mit den Endpuncten) zuſammenſtoßenden Linien des Vierecks in den Überſchuß der Quadrate der vier übrigen über jene beiden multiplicirt wird, die zweyte in der letzten Zeile ſtehende Gruppe enthält die ſubtractiven Quadrate der Producte aus je dreyen zu einem Dreyeck ſich vereinigenden Linien. Die Formel entſteht übrigens, wenn man die in dem Art., Pyramide, 17., für den Inhalt einer dreyſeitigen Pyramide aus den ſechs Seitenlinien derſelben gegebene = 0 ſetzt, wovon man den Grund leicht auffinden wird. Durch die in ihr herrſchende Symmetrie wird eine Formel leichter zu überſehen und aufzufaſſen. In Carnot's Mém. sur la relation, qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, kommt §. 58. eine ſymmetriſche Formel vor, welche 130 Glieder hat, die ſich aber in fünf Gruppen bringen laſſen, in deren jeder einerley Bildungsgeſetz herrſcht.

Die Symmetrie geometriſcher Zuſammenſetzungen beſteht, wie die in der Baukunſt geforderte, in der übereinſtimmigen Lage ähnlicher und gleicher Theile zu beiden Seiten eines ungleichen Mittels, welches hier eine gerade Linie oder eine Ebene iſt. Wenn z. B. in den beiden die Grundlinie AD gemein habenden Vierecken ABCD und AEFD (Fig. 64.) AB=AE, CD=DF, BAD=DAE, CDA=ADF, ſo iſt auch ABC=AEF, BC=EF, und

BCD=EFD. Ferner ſind BE, CF ſenkrecht auf AD, und werden von ihr in G und H halbirt, ſo daß B und E, ſo wie C und F gegen die beiden Seiten der AD ähnliche Lage haben. Die Figur ABCDFEA iſt alſo ein ſymmetriſches Ganze, und ABCDA und AEFDA können ihre ſymmetriſchen Hälften heißen. Der ganze Unterſchied der beiden Figuren ABCDA und AEFDA kommt darauf hinaus, daß bey denſelben rechts und links verwechſelt werden, wie wenn AD der Durchſchnitt einer auf der Ebene des Papiers ſenkrechten ebenen Spiegelfläche mit dieſer Ebene wäre, wo dann AEFDA das Bild von ABCDA ſeyn würde. Die Folge hiervon iſt, daß, wenn man ſich innerhalb der genannten Figuren geſtellt, und das Auge nach und nach gegen alle Seiten der Figur gewandt denkt, die gleichen Umfangsſtücke von A ab gezählt in der Figur ABCDA von der rechten zur linken, in der Figur AEFDA aber von der linken zur rechten auf einander folgen, ſo daß man von A ausgehend den Umfang beider nach entgegengeſetzten Richtungen durchgehen muß, um die gleichen Seiten in derſelben Ordnung zu durchſchreiten, und beym Übergange aus einer derſelben in die nächſte gleichviel, aber nach entgegengeſetzten Seiten, abzuweichen. Stellt man ſich die Figur AEFDA um A nach der Seite, wo E und F liegen, gedreht vor, bis AD einen Winkel von 180° beſchrieben hat, ſo hat man ein Paar gleiche und ähnliche, aber nicht ähnlich liegende Figuren. Dennoch können beide leicht zum Decken oder zwiſchen dieſelben Gränzen gebracht, und eben dadurch ihre Gleichheit erwieſen werden, daher es nicht nöthig iſt, auf den angegebenen Unterſchied zu achten. Bey körperlichen Figuren aber verhält ſich die Sache anders, wie das folgende zeigen wird.

Es ſey ABCD (Fig. 65.) eine dreyſeitige Pyramide, ABC ihre Grundfläche, D ihre Spitze, von welcher auf die Ebene der Grundfläche der Perpendikel

DE gefällt und an der andern Seite derſelben nach D′ verlängert ſey, bis DE′ = ED iſt. Werden nun D′A, D′B, D′C verbunden, ſo iſt DACBD′ ein ſymmetriſches Hexaeder (Körper von ſechs Seitenflächen eingeſchloſſen), indem in demſelben auf der einen Seite der Ebene ABC alles iſt, wie auf der andern. Es iſt nämlich $\Delta ABD \cong \Delta ABD'$, $\Delta ACD \cong \Delta ACD$, $\Delta BCD \cong \Delta BCD'$; auch ſind die Flächenwinkel an AB, BC, CA, ſo wie an AD und AD′, BD und BD′, CD und CD′ gleich, ferner die Neigungswinkel der Linien DA und D′A, DB und D′B, DC und D′C gegen die Ebene ABC gleich. Dennoch aber können im Allgemeinen die beiden Pyramiden ABCD und ABCD′ nicht zwiſchen dieſelben Gränzen oder zum Decken gebracht werden, wie folgendergeſtalt erhellt.

Man verlängere CA, BA, DA, EA über A hinaus nach C′, B′, D″, E′, bis AC′ = AC, AB′ = AB, AD″ = AD, AE′ = AE geworden iſt, und verbinde C′B′, C′D″, B′D″, D″E′, ſo iſt AC′B′D″ die Pyramide ABCD′ nur in einer anderen Lage, welche aus der urſprünglichen entſteht, wenn die Grundfläche ABC in in ihrer Ebene um A aus der Lage ABC in die AB′C′ gedreht wird, wodurch D′E in D″E′ zu liegen kommt u. ſ. w. Läßt man nun die Pyramide AC′B′D″ ſich nach einer Richtung fort ſo um A drehen, daß das $\Delta AD''E'$ immer in der Ebene ADE bleibt, ſo werden zwar, wenn die Ebene AB′C′ wieder mit der ABC zuſammenfällt, AD″ und AD, aber im Allgemeinen nicht die Dreyecke AB′C′ und ABC einander decken, außer wenn AB = AC, und dadurch auch AB′ = AC′ iſt, und AE, AE′ die Winkel BAC und B′AC′ halbiren. Die Pyramiden ABCD und AB′C′D″ congruiren alſo im allgemeinen nicht, folglich auch nicht ABCD′ und ABCD.

Dieſes Umſtandes ohngeachtet ſind beide Pyramiden einander gleich, wie aus Elem. XII., 5. folgt.

Hier alſo wird eine Unterſcheidung zwiſchen Körpern, die gleich und ähnlich aus oder mit Congruenz, und ſolchen, die gleich und ähnlich ohne Congruenz ſind, nöthig. Will man bloß letztere ſymmetriſch nennen, ſo ändert man die urſprüngliche Bedeutung des Worts ab. Denn wenn AB=AC, und BAE=CAE iſt, ſo hören die Pyramiden ABCD und ABCD′ nicht auf, in dem eigentlichen Wortverſtande, ſymmetriſch zu ſeyn, ſie congruiren aber auch. Daß ſie allgemein nicht congruiren, hängt von dem Umſtande ab, daß bey den dreyſeitigen Ecken an A die gleichen ebenen Winkel, welche DA und D′A mit AB und AC einſchließen, ihre Lage gegen den dritten BAC verwechſelt haben. Man könnte alſo die Pyramiden BACD und BACD′ verkehrt ähnlich nennen, um dieſe Ähnlichkeit von der, wo die gleichen ebenen Winkel der Ecken an A in derſelben Ordnung liegen, zu unterſcheiden. Euklides hat dieſen Unterſchied nicht beachtet. Er erklärt ähnliche (eckige) Körper überhaupt als ſolche, welche von gleich vielen ähnlichen Ebenen begränzt werden. Vielleicht iſt er zu der Vernachläſſigung jenes Unterſchiedes dadurch bewogen worden, daß ſolcher bey den Parallelepipeden wegfällt. Dieſe ſind, wenn ſie bey einerley Beſtimmungsſtücken verkehrt ähnlich (ſymmetriſch in der eingeſchränkten Bedeutung des Worts) ſind, allemal congruent. Indeß hängt dieſe Nichtbeachtung eines an ſich nicht ſehr bedeutenden Unterſchiedes mit etwas anderem, welches wichtiger iſt, zuſammen. Euklides macht von der Congruenz gar keinen Gebrauch, um die Gleichheit zweyer Körper, die zu einerley Claſſe der von ihm betrachteten eckigen Körper gehören, als zweyer Parallelepipeden, zweyer Prismen oder zweyer Pyramiden unter gewiſſen vorausgeſetzten Bedingungen zu erweiſen, ſondern er leitet ihre Gleichheit aus einem ſehr allgemeinen, in der 10. Def. des eilften Buchs enthaltenen Satze ab. Und doch konnte — ſo ſcheint es — ihm nicht entgehen, daß die körperlichen Winkel,

welche er XI, 26. gleich nennt, congruent ſind. Wie kommt es alſo, daß Euklides die Congruenz in den Beweiſen der Sätze über die Gleichheit der Körper ganz zurückgeſetzt hat, da Archimedes in einem an ſich ziemlich offenbaren Falle, Prop. XX de Sphaeroidibus et Conoidibus, ſie anwendet? Man kann nicht anders vermuthen, als daß Euklides, da er einſah, daß die Stereometrie keine dem Gange, den die Planimetrie nimmt, ganz adäquate Behandlungsweiſe zuläßt, eine weitläufige, für Elemente, ſeiner Meinung nach, zu umſtändliche Behandlung der Lehren von der Gleichheit der eckigen Köper vermeiden wollte. Auch iſt es in der That nur ein einziger Satz, welcher Anſtoß erregt hat, der 28ſte des eilften Buchs, die Gleichheit der beiden Prismen betreffend, worein ein Parallelepipedon durch die Diagonalfläche zerlegt wird; alles Übrige iſt leicht zu ergänzen.

Daß übrigens die älteren Geometer den Unterſchied zwiſchen Gleichheit aus Congruenz und ohne Congruenz bey denſelben Beſtimmungsſtücken gar wohl gekannt haben, beweiſet ihre Behandlungsart der Sphärik, wo bey den ſphäriſchen Dreyecken jener Unterſchied wieder hervortritt. Man darf nur die erſten Sätze im dritten Buche des Theodoſius, und einige der erſten im erſten Buche des Menelaus anſehen, um ſich davon zu überzeugen. Wolf muß dieſe beiden Schriftſteller gar nicht zu Rathe gezogen haben, weil er im zweyten Kapitel ſeiner Sphärik (in den lateiniſchen Elementen) ihr Verfahren ſo wenig nachgeahmt hat. Segner ſcheint zuerſt unter uns darauf aufmerkſam gemacht zu haben, daß ein Paar dreyſeitige Ecken bey denſelben Beſtimmungsſtücken gleich ſeyn können, ohne congruent zu ſeyn. Er zeigt dieſes auf eine ſehr einleuchtende Weiſe in der 1741 herausgegebenen Defensio adversus censuram Berolinensem S. 32. Man ſehe auch ſeine Vorleſungen über die Rechenkunſt und Geometrie, S. 591 und 592 der

2ten Ausg. Dadurch wurde Karſten veranlaßt, in ſeiner Mathesis theoretica, Rostoch., 1760. im Zuſatze zu §. 296. der Geom. S. 146 jenes Unterſchiedes gleichfalls zu erwähnen, und den angefochtenen Satz in Euklids Elementen (XI, 28.) auf eine andere Weiſe, durch die Exhauſtionsmethode nämlich, zu begründen. In den ſpäter herausgegebenen Anfangsgründen hat er dieſes noch bündiger geleiſtet. Käſtner hat den oft erwähnten Unterſchied entweder gar nicht gekannt, oder nicht für beachtungswerth gehalten. Man ſehe ſeine Anfangsgründe der Geom., 59 Lehrſ. und die geometr. Abhandl. II, 31, No. 23. Käſtners Beyſpiel hat die Verfaſſer mehrerer deutſcher Lehrbücher, welche nach dem Käſtnerſchen erſchienen ſind, verleitet, jenen Unterſchied gleichfalls zu vernachläſſigen.

Symmetriſche Function irgend welcher unbeſtimmten Größen a, b, c etc. iſt eine ſolche, worin dieſe Größen alle auf dieſelbe Art vorkommen, die alſo ungeändert bleibt, man mag jene Größen unter einander vertauſchen, wie man will. Z. E. $a + b + c$; abc; $ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ac^2 + a^2c$, ſind rationale ganze ſymmetriſche Functionen der Größen a, b, c; hingegen iſt $\frac{abc}{ab + bc + ac}$ eine rationale gebrochene ſymmetriſche Function derſelben Größen. Die Area eines Dreyecks $\frac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$ iſt eine irrationale ſymmetriſche Function der drey Seiten a, b, c deſſelben. Aber $(a - b)(b - c)(c - a)$ iſt keine ſymmetriſche Function der Größen a, b, c, weil, wenn man a und b gegenſeitig vertauſcht, ſie in $(b - a)(c - b)(a - c)$ übergeht, welches das Entgegengeſetzte des vorigen Werths iſt.

Unter den rationalen ſymmetriſchen Functionen verdienen vor allen diejenigen zuerſt unterſucht zu werden, deren Glieder die Form $Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots\ldots$ haben,

wo M ein von den Grundgrößen a, b, c.... unabhängiger Coefficient iſt, und α, β, γ.... ganze poſitive oder negative Zahlen bedeuten. Denn aus ſolchen Functionen ſind nicht allein alle ganze ſymmetriſche Functionen der Größen a, b, c...., wenn man ihre Glieder gruppweiſe zuſammennimmt, ſondern auch eine große Menge gebrochener ſymmetriſcher Functionen zuſammengeſetzt. Eine ſymmetriſche Function der angegebenen Art, für welche $M a^\alpha b^\beta c^\gamma$.... die Stelle des allgemeinen Gliedes vertritt, indem daraus durch gehörige Vertauſchung der Größen a, b, c... gegen einander alle übrigen abgeleitet werden können, kann nun, wie es bisher in dieſem Wörterbuche geſchehen iſt, füglich durch $\int M a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, oder weil M von a, b, c.... nicht abhängt, durch $M \int a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$. bezeichnet werden. Sie begreift, wenn der gemeinſchaftliche Factor M bey Seite geſetzt wird, wie man ſieht, alle Combinationsformen einer gewiſſen Gattung, nämlich die, worin von den Elementen a, b, c.... ein Element α mal, ein anderes β mal, ein drittes γ mal u. ſ. w. vorkommt, und kann in ſo fern **einförmig** heißen. Nach der Zahl der in dem allgemeinen Gliede $a^\alpha b^\beta c^\gamma$..... enthaltenen Elemente a, b, c... aber, oder der Zahl der Wiederholungsexponenten α, β, γ.... kann ſie **unariſch**, **binariſch**, **ternariſch** u. ſ. w. genannt werden. So iſt $\int a^\alpha b^\beta = a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha + b^\alpha c^\beta + b^\beta c^\alpha + a^\alpha c^\beta + a^\beta c^\alpha$ eine einförmige binariſche Function der Größen a, b, c; **abcd** hingegen eine quaternariſche der Größen a, b, c, d.

1. Die einförmigen ſymmetriſchen Functionen, für welche alle Wiederholungsexponenten = 1, ſind nichts anders, als die Summen von Combinationen der Grundgrößen ohne Wiederholungen. In den Artikeln, Combination, 43, und Combinationslehre, 53, ſind ſie durch die Symbole A, B, C, D u. ſ. w. bezeichnet worden. Eben daſelbſt iſt gezeigt, wie die ſym-

metriſchen Functionen von der Form $\int a^m$ oder die Potenzenſummen der Grundgrößen a, b, c..... im Falle eines ganzen poſitiven Exponenten m durch A, B, C, D u. ſ. w. ſowohl abhängig als unabhängig ausgedruckt werden. Vermittelſt eben dieſer Formeln laſſen ſich aber auch die Summen der reciproken Potenzen der Grundgrößen, d. i., die ſymmetriſchen Functionen von der Form $\int a^m$ in dem Falle eines ganzen negativen m, durch A, B, C u. ſ. w. ausdrucken, wenn die Zahl der Grundgrößen bekannt iſt. Sind derſelben z. E. fünf, a, b, c, d, e, ſo hat man

$$\int\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{e}=\frac{abcd+abce+\ldots+bcde}{abcde}$$

$$=\frac{D}{E}$$

$$\int\frac{1}{ab}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\ldots+\frac{1}{de}=\frac{abc+abd+\ldots+cde}{abcde}$$

$$=\frac{C}{E}$$

$$\int\frac{1}{abc}=\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\ldots+\frac{1}{cde}=\frac{ab+ac+\ldots+de}{abcde}$$

$$=\frac{B}{E}$$

$$\int\frac{1}{abcd}=\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abce}+\ldots+\frac{1}{bcde}=\frac{a+b+\ldots+e}{abcde}$$

$$=\frac{A}{E}$$

$$\int\frac{1}{abcde}=\frac{1}{abcde}=\frac{1}{E}.$$

Wenn alſo in den Formeln

$$\int a = a + b + \ldots\ldots + e = A$$
$$\int ab = ab + ac + \ldots \quad + de = B$$
$$\int abc = abc + abd + \ldots \quad + cde = C$$

u. ſ. w., ſtatt a, b, c, d, e ihre reciproken $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ geſetzt werden, ſo verwandelt ſich A in $\frac{D}{E}$, B in $\frac{C}{E}$, C in $\frac{B}{C}$ u. ſ. w. Dieſe Subſtitutionen ſind alſo auch in den Formeln für $\int a^m$, welche gelten, die Größen a, b, c, ... mögen ſeyn, was man nur will, zu machen, um die für $\int a^{-m}$ zu erhalten. Dadurch entſtehen alſo zuerſt folgende abhängige Formeln

$$\int a^{-1} = \frac{D}{E}$$

$$\int a^{-2} = 1\frac{D}{E}\int a^{-1} - 2\frac{C}{E}$$

$$\int a^{-3} = \frac{D}{E}\int a^{-2} - \frac{C}{E}\int a^{-1} + 3\frac{B}{E}$$

$$\int a^{-4} = \frac{D}{E}\int a^{-3} - \frac{C}{E}\int a^{-2} + \frac{B}{E}\int a^{-1} - 4\frac{A}{E}$$

etc.

ferner dieſe unabhängigen

$$+\int a^{-1} = \frac{D}{E}$$

$$-\int a^{-2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{C}{E} - \frac{2}{2}\cdot\frac{D^2}{E^2} = \frac{\frac{2}{1}\cdot CE - \frac{2}{2}\cdot D^2}{E^2}$$

$$+\text{ſ}a^{-3} = \frac{3}{1}\cdot\frac{B}{E} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2CD}{EE} + \frac{3}{3}\cdot\frac{D^3}{E^3}$$

$$= \frac{\frac{3}{1}.BE^2 - \frac{3}{2}.2CDE + \frac{3}{3}D^3}{E^3}$$

$$-\text{ſ}a^{-4} = \frac{4}{1}\cdot\frac{A}{E} - \frac{4}{2}\cdot\frac{2BD+CC}{EE} + \frac{4}{3}\cdot\frac{3CD^2}{E^3} - \frac{4}{4}\cdot\frac{D^4}{E^4}$$

$$= \frac{\frac{4}{1}AE^3 - \frac{4}{2}(2BDE^2 + C^2E^2) + \frac{4}{3}.3CD^2E - \frac{4}{4}D^4}{E^4}$$

u. ſ. w.

Die unabhängigen Formeln für ſa^{-m} ergeben ſich bey fünf Grundgrößen auch aus den gleichartigen Formeln für ſa^m, wenn man in dieſen ſtatt A, B, C, D, E die Größen D, CE, BE^2, AE^3, E^4 ſchreibt, F, G u. ſ. w. aber $= 0$ ſetzt, und das ſo erhaltene Reſultat mit E^m dividirt. Daß F, G, H u. ſ. w. auch aus den abhängigen Formeln für dieſelbe Anzahl Grundgrößen wegfallen, braucht wohl kaum erinnert zu werden.

2. Umgekehrt laſſen ſich A, B, C, D u. ſ. w. durch ſa, ſa^2, ſa^3 u. ſ. w., oder wenn man die Bezeichnung von 53. des Art., Combinatoriſche Analyſis, beybehält, durch P, Q, R, S u. ſ. w. ausdrucken. Da nämlich nach dem, was dort gezeigt iſt,

$$\log(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}) = Pz - \tfrac{1}{2}Qz^2 + \tfrac{1}{3}Rz^3 - \tfrac{1}{4}Sz^4 + \text{etc.}$$

alſo

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.} = e^{Pz - \frac{1}{2}Qz^2 + \frac{1}{3}Rz^3 - \text{etc.}}$$

ſo

ſo wird aus 49. deſſelben Art., wenn man daſelbſt $u = 0$ ſetzt, wodurch $\alpha = e^u = 1$ wird, a aber $= P$, $b = -\frac{1}{2}Q$, $c = +\frac{1}{3}R$ u. ſ. w. macht,

$$A = P$$

$$2B = P^2 - 2.\frac{Q}{2}$$

$$6C = P^3 - 3.\frac{2PQ}{1.2} + 6.\frac{R}{3}$$

$$24D = P^4 - 4.\frac{3P^2Q}{1^2.2} + 12\left(\frac{2PR}{1.3} + \frac{Q^2}{2^2}\right) - 24.\frac{S}{4}$$

$$120E = P^5 - 5.\frac{4P^3Q}{1^3.2} + 20\left(\frac{3P^2R}{1^2.3} + \frac{3PQ^2}{1.2^2}\right)$$
$$- 60\left(\frac{2PS}{1.4} + \frac{2QR}{2.3}\right) - 120.\frac{T}{5}$$

u. ſ. w.

Das Bildungsgeſetz dieſer Ausdrücke iſt folgendes: Die Summe der ntionen multiplicirt in $n(n-1)(n-2)\ldots.1.$ enthält alle Combinationen der Größen P, Q, R, S u. ſ. w., deren Localſumme für den Zeiger $\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4\ldots.\\ P, & Q, & R, & S\ldots.\end{pmatrix} = n$. Jede Combination wird mit der Verſetzungszahl ihrer Elemente multiplicirt, und durch die ihr entſprechende Zahlencomplexion, als Product der Elemente betrachtet, dividirt. Außerdem bekommt noch jede Claſſe der Combinationen einen numeriſchen Factor, welcher für die höchſte Claſſe $= 1$, für jede andere mte Claſſe aber $= n(n-1)\ldots.\ m+1$ iſt. Die Vorzeichen wechſeln mit den Claſſen von der höchſten bis zur niedrigſten ab.

Die abhängigen Formeln, welche A, B, C, D u. ſ. w. durch P, Q, R, S u. ſ. w. geben, werden aus (50) des

angeführten Artikels, oder noch leichter aus dem Art., Combination, 43., erhalten. Sie ſind

$$A = P$$
$$2B = AP - Q$$
$$3C = BP - AQ + R$$
$$4D = CP - BQ + AR - S$$
$$5E = DP - CQ + BR - AS + T$$

u. ſ. w.

3. Einen Hauptgegenſtand in der Lehre von den ſymmetriſchen Functionen macht die Zurückführung der einförmigen ſymmetriſchen Functionen mit mehreren Exponenten auf bloße Potenzenſummen oder einförmige unariſche Functionen aus. Dieſe Reduction iſt immer möglich, wie das folgende überſehen laſſen wird.

4. Es iſt $\int a^\alpha . \int a^\beta = \int a^{\alpha+\beta} + \int a^\alpha b^\beta$

Denn zu den Partialproducten, welche das Product der beiden Reihen

$$\int a^\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + d^\alpha + \text{etc.}$$
$$\int a^\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + d^\beta + \text{etc.}$$

enthält, liefert jede Reihe einen Factor. Beide Factoren werden nun entweder in derſelben Stelle oder an verſchiedenen Stellen genommen. In jenem Falle iſt das Partialproduct von der Form $a^{\alpha+\beta}$, in dieſem von der Form $a^\alpha b^\beta$, welches den Satz giebt.

5. Es iſt $\int a^\alpha . \int a^\beta . \int a^\gamma = \int a^{\alpha+\beta+\gamma} + \int a^{\alpha+\beta} b^\gamma$
$+ \int a^{\alpha+\gamma} b^\beta + \int a^{\beta+\gamma} b^\alpha$
$+ \int a^\alpha b^\beta c^\gamma.$

Denn zu den Partialproducten, woraus das Product der drey Reihen

ſ$a^{\alpha} = a^{\alpha} + b^{\alpha} + c^{\alpha} + d^{\alpha} +$ etc.
ſ$a^{\beta} = a^{\beta} + b^{\beta} + c^{\beta} + d^{\beta} +$ etc.
ſ$a^{\gamma} = a^{\gamma} + b^{\gamma} + c^{\gamma} + d^{\gamma} +$ etc.

beſteht, wird aus jeder Reihe ein Factor genommen. Dieſe drey Factoren befinden ſich nun entweder alle in einerley Stelle, oder zwey von ihnen ſind gleichſtellig und der dritte mit dieſen ungleichſtellig, oder alle drey ſind ungleichſtellig. Im erſten Falle iſt das Product von der Form $a^{\alpha+\beta+\gamma}$, im andern iſt es, je nachdem die beiden gleichſtelligen Factoren entweder aus der erſten und zweyten, oder aus der erſten und dritten, oder aus der zweyten und dritten Reihe genommen werden, entweder von der Form $a^{\alpha+\beta} b^{\gamma}$, oder $a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}$, oder $a^{\beta+\gamma} b^{\alpha}$; im dritten und letzten Falle endlich hat das Product die Form $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, welches der Satz iſt.

6. Auf ähnliche Art kann man die Zuſammenſetzung der Producte von vier und mehr Potenzenſummen entwickeln. Man wird aber hierbey bald gewahr werden, daß man nur die Exponenten der verſchiedenartigen Theile zu kennen braucht, um ſogleich den ganzen Complexus derſelben hinſchreiben zu können. Dieſe Exponenten aber lehrt die folgende involutoriſche Anordnung kennen.

$$\alpha \mid \beta \mid \gamma \mid \delta$$
$$\alpha + \beta \mid \gamma \mid \delta$$
$$\alpha + \gamma,\ \beta \mid \delta$$
$$\beta + \gamma,\ \alpha \mid \delta$$
$$\alpha + \beta + \gamma \mid \delta$$
$$\alpha + \delta,\ \beta,\ \gamma$$
$$\beta + \delta,\ \alpha,\ \gamma$$
$$\gamma + \delta,\ \alpha,\ \beta \quad \text{etc.}$$
$$\alpha + \beta + \delta,\ \gamma$$
$$\alpha + \beta,\ \gamma + \delta$$
$$\alpha + \gamma + \delta,\ \beta$$
$$\alpha + \gamma,\ \beta + \delta$$
$$\beta + \gamma + \delta,\ \alpha$$
$$\beta + \gamma,\ \alpha + \delta$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta$$

etc.

Dieſe Involution zeigt, ſo weit ſie hier fortgeſetzt iſt, die verſchiedenen Arten, auf welche die Summe $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ aus den Größen α, β, γ, δ und ihren Verbindungen zu zwey, drey, vier, ohne eine derſelben zu wiederholen, gebildet werden kann. Die in dieſer Art möglichen Zuſammenſetzungsweiſen einer Summe werden aus denen für die nächſtniedrige Summe, welche der Winkelhaken abſondert, erhalten, wenn man allen Complexionen zu der vorhergehenden Summe rechter Hand das nächſthöhere Element beyfügt, und den ſo entſtandenen Complexionen noch diejenigen zuſetzt, welche aus der Verbindung dieſes nächſthöheren Elements mit jedem der in den Complexionen der niedern Summe ſchon vorhandenen zu einem hervorgehen, die übrigen Elemente aber ungeändert hinſchreibt.

Hiernach iſt nun

$$\begin{aligned}\int a^\alpha . \int a^\beta . \int a^\gamma . \int a^\delta = & \int a^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} + \int a^{\alpha+\beta+\gamma} b^\delta \\ & + \int a^{\alpha+\beta+\delta} b^\gamma + \int a^{\alpha+\gamma+\delta} b^\beta \\ & + \int a^{\beta+\gamma+\delta} b^\alpha + \int a^{\alpha+\beta} b^{\gamma+\delta} \\ & + \int a^{\alpha+\gamma} b^{\beta+\delta} + \int a^{\alpha+\delta} b^{\beta+\gamma} \\ & + \int a^{\alpha+\beta} b^\gamma c^\delta + \int a^{\alpha+\gamma} b^\beta c^\delta \\ & + \int a^{\alpha+\delta} b^\beta c^\gamma + \int a^{\beta+\gamma} b^\alpha c^\delta \\ & + \int a^{\beta+\delta} b^\alpha c^\gamma + \int a^{\gamma+\delta} b^\alpha c^\beta \\ & + \int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta .\end{aligned}$$

7. Es iſt

$$\int a^\alpha b^\beta = \int a^\alpha . \int a^\beta - \int a^{\alpha+\beta}$$

Ergiebt ſich ſogleich durch Transpoſition aus (4).

8. Es iſt

$$\begin{aligned}\int a^\alpha b^\beta c^\gamma = & \int a^\alpha . \int a^\beta . \int a^\gamma - \int a^{\alpha+\beta} . \int a^\gamma - \int a^{\alpha+\gamma} \int a^\beta \\ & - \int a^{\beta+\gamma} . \int a^\alpha + 2 \int a^{\alpha+\beta+\gamma} .\end{aligned}$$

Denn aus (5) iſt

$$\begin{aligned}\int a^\alpha b^\beta c^\gamma = & \int a^\alpha . \int a^\beta . \int a^\gamma - \int a^{\alpha+\beta} b^\gamma - \int a^{\alpha+\gamma} b^\beta \\ & - \int a^{\beta+\gamma} b^\alpha - \int a^{\alpha+\beta+\gamma} .\end{aligned}$$

Drückt man die hier vorkommenden binariſchen Functionen nach (7) aus, indem man

$$\int a^{\alpha+\beta} b^\gamma = \int a^{\alpha+\beta} . \int a^\gamma - \int a^{\alpha+\beta+\gamma}$$

u. ſ. w. macht, ſo entſteht nach gehöriger Reduction der angegebene Ausdruck.

9. Es iſt auf ähnliche Art

$$\begin{aligned}\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta = & \int a^\alpha . \int a^\beta . \int a^\gamma . \int a^\delta - \int a^{\alpha+\beta} \int a^\gamma . \int a^\delta \\ & - \int a^{\alpha+\gamma} . \int a^\beta . \int a^\delta - \int a^{\alpha+\delta} . \int a^\beta . \int a^\gamma \\ & - \int a^{\beta+\gamma} . \int a^\alpha . \int a^\delta - \int a^{\beta+\delta} . \int a^\alpha . \int a^\gamma \\ & - \int a^{\gamma+\delta} . \int a^\alpha . \int a^\beta + 2 \int a^{\alpha+\beta+\gamma} . \int a^\delta \\ & + 2 \int a^{\alpha+\beta+\delta} . \int a^\gamma + 2 \int a^{\alpha+\gamma+\delta} \int a^\beta\end{aligned}$$

$$+ 2\int a^{\beta+\gamma+\delta} \cdot \int a^{\alpha} + \int a^{\alpha+\beta} \cdot \int a^{\gamma+\delta}$$
$$+ \int a^{\alpha+\gamma} \cdot \int a^{\beta+\delta} + \int a^{\alpha+\delta} \cdot \int a^{\beta+\gamma}$$
$$- 6\int a^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

10. Die Ausdrücke in (7), (8) und (9) zeigen allgemein die Zuſammenſetzung der einförmigen binariſchen, ternariſchen und quaternariſchen ſymmetriſchen Functionen aus unariſchen oder bloßen Potenzenſummen. Das allgemeine Geſetz dieſer Zuſammenſetzungen betreffend, ſo ſind die Exponenten dieſelben, wie in (4), (5) und (6), alſo durch die Involution in (6) gegeben, es bleiben alſo nur noch die Vorzeichen und die Coefficienten zu beſtimmen übrig. Das Geſetz für dieſe hat Waring in ſeinen Miſcellan. analyt. und Meditat. algebraic. ganz allgemein, aber ohne Beweis, angegeben, welchen Paoli in dem Supplemento agli elementi di Algebra (Piſa, 1804), Op. II. §. 28. erſetzt und durch die umgekehrte Methode der Differenzen geführt hat. Meier Hirſch hat in ſeiner Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraiſchen Gleichungen, Berlin, 1809. §. 25. einen mehr elementariſchen Beweis durch den Schluß von m auf m + 1 gegeben, der aber, wie der Käſtnerſche Beweis des binomiſchen Lehrſatzes, im Grunde gleichfalls auf der Differenzenmethode beruhet.

11. Die vorigen Sätze erleiden einige Modificationen, wenn in dem allgemeinen Ausdrucke einer einförmigen ſymmetriſchen Function $\int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$ zwey oder mehrere der Exponenten α, β, γ, $\delta \ldots$ gleich werden, und zwar aus einem zwiefachen Grunde. Erſtens nämlich werden dadurch mehrere Glieder des Summenausdrucks $\int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$ ſelbſt gleich und in eins zuſammengezogen. Wenn z. E. in $\int a^{\alpha} b^{\beta} = a^{\alpha} b^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} + a^{\alpha} c^{\beta} + a^{\beta} c^{\alpha} + \ldots + b^{\alpha} c^{\beta} + b^{\beta} c^{\alpha} +$ etc. $\alpha = \beta$ wird, ſo verwandelt ſich $\int a^{\alpha} b^{\beta}$ in $a^{\alpha} b^{\alpha} + a^{\alpha} b^{\alpha} + a^{\alpha} c^{\alpha} + a^{\alpha} c^{\alpha} + \ldots + b^{\alpha} c^{\alpha} + b^{\alpha} c^{\alpha} +$ etc. $= 2a^{\alpha} b^{\alpha}$

$+ 2a^\alpha c^\alpha + \ldots + 2b^\alpha c^\alpha +$ etc., d. i., in $2\int a^\alpha b^\alpha$. Eben ſo geht $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma$, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ wird, in $6\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha$ über. $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon$ hingegen verwandelt ſich in $12\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\delta e^\delta$, wenn $\alpha = \beta = \gamma$, und $\delta = \varepsilon$ wird, wie daraus ſich ergiebt, daß jede Combinationsform wie a b c d e, wenn alle Exponenten ungleich ſind, zu $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon$ durch Verſetzung der Exponenten $1.2.3.4.5$ Glieder, wenn aber $\alpha = \beta = \gamma$ und $\delta = \varepsilon$, zu $\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\delta e^\delta$ nur $\frac{1.2.3.4.5.}{1.2.3.1.2}$ Glieder liefert. Zweytens werden aber auch in der Zuſammenſetzung von $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots$ aus Potenzenſummen und Producten von Potenzenſummen durch Gleichſetzung zweyer oder mehrerer Exponenten mehrere Glieder gleich, und in eins zuſammengezogen. So werden z. B. in $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ wird, die drey Glieder $-\int a^{\alpha+\beta}.\int a^\gamma.\int a^\delta$; $-\int a^{\alpha+\gamma}.\int a^\beta.\int a^\delta$; $-\int a^{\beta+\gamma}.\int a^\alpha.\int a^\delta$ gleich, und jedes $= -\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\delta$; ſie vereinigen ſich alſo zu dem einzigen Gliede $-3\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\delta$, ſo daß aus beiden Gründen die Gleichung in (9), wenn $\alpha = \beta = \gamma$ wird, und man überall ſtatt δ wieder β ſchreibt, in folgende übergeht.

$$\begin{aligned} 6\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\beta = (\int a^\alpha)^3 &- 3\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\beta \\ &- 3\int a^{\alpha+\beta}.(\int a^\alpha)^2 + 2\int a^{3\alpha}\int a^\beta \\ &+ 6\int a^{2\alpha+\beta}.\int a^\alpha + 3\int a^{2\alpha}.\int a^{\alpha+\beta} \\ &- 6\int a^{3\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

woraus nun

$$\begin{aligned} \int a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\beta = \tfrac{1}{6}(\int a^\alpha)^3 &- \tfrac{1}{2}\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\beta - \tfrac{1}{2}\int a^{\alpha+\beta}.(\int a^\alpha)^2 \\ &+ \tfrac{1}{3}\int a^{3\alpha}.\int a^\beta + \int a^{2\alpha+\beta}.\int a^\alpha + \tfrac{1}{2}\int a^{2\alpha}.\int a^{\alpha+\beta} \\ &- \int a^{3\alpha+\beta} \end{aligned}$$

hervorgeht.

Das allgemeine Geſetz, nach welchem ſolche einförmige ſymmetriſche Functionen mit wiederholten Exponenten aus Potenzenſummen zuſammengeſetzt werden,

hat Meier Hirſch in der vorhin (10) angezogenen Schrift, §. 26—31., ſehr gut entwickelt. Früher hat Vandermonde daſſelbe in einem den Mém. de Paris für 1771 einverleibten Aufſatze, der auch ſonſt viel merkwürdiges zur Theorie und Auflöſung der algebraiſchen Gleichungen enthält, in einer einfachen und ſchicklichen Bezeichnung, welche Meier Hirſch angenommen hat, aber ohne Beweis, vorgetragen, nur daß er die Involution nicht gebraucht, ſondern ſtatt ihrer die Auflöſung unbeſtimmter Gleichungen ſetzt. Begreiflich enthält die allgemeine Auflöſung, wobey die Exponenten α, β, γ, δ.... beziehungsweiſe a, b, c, d.... mal wiederholt angenommen werden, auch den Fall unter ſich, wo jeder Exponent nur einmal vorkommt, alſo alle verſchieden ſind. Vandermonde's Auflöſung giebt daher auch die Formeln in (7)-(9), und die ihnen ähnlichen höheren. Übrigens hat Vandermonde den Ausdruck für $\int a^m$ durch A, B, C, D, etc. in dem Falle eines ganzen poſitiven m gleichfalls von der Auflöſung einer unbeſtimmten Gleichung, einer ſogenannten Bedingungsgleichung, abhängig gemacht.

12. Das von (4) bis hierher beygebrachte wird hinreichen, die Behauptung in (3), daß jede einförmige ſymmetriſche Function $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$.... ſich für irgend welche Beſchaffenheit der Exponenten α, β, γ, δ.... durch bloße Potenzenſummen ausdrucken laſſe, zu rechtfertigen.

Sind α, β, γ, δ..... ganze poſitive oder negative Zahlen und in letzterem Falle die Anzahl der Grundgrößen a, b, c, d.... bekannt, ſo laſſen ſich, wie aus dem obigen erhellet, die Potenzenſummen, mithin auch $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$....., durch A, B, C, D, u. ſ. w. rational ausdrucken. Insbeſondere wird $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$.... eine rationale ganze Function der Größen A, B, C, D, u. ſ. w., wenn die Exponenten α, β, γ, δ.... lauter poſitive ganze Zahlen ſind. Und da jede ganze ſym-

metriſche Function der Größen a, b, c, d .... entweder ſelbſt eine einförmige ſymmetriſche Function, oder aus ſolchen einförmigen Functionen zuſammengeſetzt iſt, ſo folgt, daß alle ganze ſymmetriſche Functionen der Größen a, b, c, d ..... durch rationale ganze Functionen der Größen A, B, C, D, u. ſ. w. dargeſtellt werden können.

13. Der Satz, daß jede (ganze) unveränderliche oder ſymmetriſche Function der Größen a, b, c, d .... ſich durch A, B, C, D, u. ſ. w. rational darſtellen laſſe, findet ſich zuerſt in einer Abhandlung Eulers in den Berliner Memoiren für 1748, Démonstration sur le nombre des points d'intersection de deux lignes courbes, allgemein aufgeſtellt, und an einigen beſonderen Fällen dargethan. Nachher hat Cramer am Ende ſeiner Introduction die Darſtellung einförmiger ſymmetriſcher Functionen durch Formeln mit den Größen A, B, C, D, u. ſ. w. umſtändlicher ausgeführt und insbeſondere für die Entwickelung der Producte zweyer ſolcher Functionen, die er Facteurs-seconds nennt, Vorſchriften gegeben. Einen durch ſeine Kürze und Bündigkeit ausgezeichneten Beweis des letzten Satzes in (12) trifft man in der Abhandlung von Gauß, Demonstratio altera noua theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram vnius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolui posse, §. 4. an.

14. Zur Erläuterung des eben erwähnten Satzes dienen die Formeln in dem Artikel, Combination, 48., welche aus den Sätzen in (7) und folgg. ſich ergeben.

Es iſt, wenn man in (7) $\alpha = \beta = 2$ macht, und (11) in Anwendung bringt

$$\int a^2 b^2 = \frac{(\int a^2)^2 - \int a^4}{2}$$

und, wenn man für $\int a^2$, $\int a^4$ ihre Werthe durch A, B, C, D aus (Combinatoriſche Analyſis, 53.) ſetzt

$$= \frac{(AA - 2B)^2 - A^4 + 4A^2B - 4AC - 2BB + 4D}{2}$$

$$= BB - 2AC + 2D$$

Eben ſo wird mit Zuziehung von (11) aus (8)

$$\int a^2 b^2 c^2 = \frac{(\int a^2)^3 - 3\int a^4 . \int a^2 + 2\int a^6}{6}$$

und nach Subſtitution der Werthe von $\int a^2$, $\int a^4$, $\int a^6$

$$= CC - 2BD + 2AE - 2F.$$

u. ſ. w. Dieſelben Formeln werden auch erhalten, wenn man in (2) die formloſen Größen a, b, c, d, u. ſ. w. mit ihren Quadraten a^2, b^2, c^2, d^2, u. ſ. w. vertauſcht, wodurch $A = \int a^2$, $B = \int a^2 b^2$, $C = \int a^2 b^2 c^2$, u. ſ. w., P aber $= \int a^2$, $Q = \int a^4$, $R = \int a^6$, u. ſ. w. wird.

15. Die ſymmetriſchen Functionen ſpielen eine Hauptrolle in der Theorie der algebraiſchen Gleichungen, bey der Verwandlung und Auflöſung derſelben, bey dem Elimnationsproceß, und der Wegſchaffung der Wurzelgrößen aus denſelben. Darüber ertheilt die mehrmals angeführte Schrift von Meier Hirſch ſehr guten Unterricht. Aber auch ſonſt, wo Größen vorkommen, welche aus anderen ſo beſtimmt werden, daß keine derſelben dabey vor den übrigen etwas voraus hat, bietet die Lehre von den ſymmetriſchen Functionen Abkürzungen und Reductionen dar. Ein Beyſpiel dieſer Art giebt eine Abhandlung von Euler Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum in den Nov. Commentar. Petrop. T. XI, worin er die Entfernungen je zweyer der vier merkwürdigen Puncte eines Dreyecks, des Schwerpuncts, der beiden Mittel-

puncte des eingeſchriebenen und umſchriebenen Kreiſes, und des Durchſchnittspuncts der drey Perpendikel von den Winkelſpitzen auf die gegenüber liegenden Seiten durch p, q, r, wo p der Umfang des Dreyecks, q die Summe der Producte aus je zwey Seiten, und r das Product aller drey Seiten iſt, ausdrückt, und die dadurch entſtehenden Ausdrücke mittelſt des Ausdrucks für die Area des Dreyecks durch p, q, r, noch weiter vereinfacht.

In Kramps Elémens d'Arithmétique universelle enthält das 30ſte Kap. das wichtigſte der Lehre von den ſymmetriſchen Functionen in einem kurzen, aber doch lichtvollen Vortrage. Zur Ergänzung einiger mehr angedeuteten als ausführlich entwickelten Sätze, ſo wie zur Kenntniß der Anwendungen dient das Werk von Meier Hirſch, deſſen Studium alſo mit dem des Krampiſchen nützlich verbunden wird.

Poſſelts Abhandlung De functionibus quibusdam symmetricis, Goettingae, 1818, betrifft einige von Euler zuerſt im 2ten Bande der Integralrechnung §. 1168. aufgeſtellten Sätze über gewiſſe rationale gebrochene ſymmetriſche Functionen, welche der Verfaſſer hier auf eine elementariſche Weiſe darthut, erweitert, und ihnen noch andere neue Sätze derſelben Art beyfügt. Mit den Euleriſchen Sätzen hat ſich auch Fuß, Act. Acad. Petropol. T. I. beſchäfftigt.

Syntaktik iſt einerley mit Combinationslehre. Lorenz hat dieſe Benennung derſelben eingeführt und gebraucht.

Syntheſis (compositio, Zuſammenſetzung) iſt das Verfahren, wobey man in der Erforſchung und Mittheilung von Erkenntniſſen von den Gründen zu den Folgen fortſchreitet, ſo wie man umgekehrt bey der Analyſis von den Folgen zu den Gründen zurückgeht. Nach der Syntheſis wird alſo ein Satz directe (a priori) mittelſt einer Combination von Sätzen bewieſen, die als

richtig anerkannt werden, und eine Aufgabe ſo aufgelöſet, daß man bloß aus den gegebenen Größen und den mittelbar durch ſie gegebenen die unbekannte findet, und dieſe aus jenen zuſammenſetzt. Nach der Analyſis hingegen (a posteriori) beweiſet man einen Satz dadurch, daß man zeigt, daß man von demſelben auf einen als wahr ausgemachten Satz kommt, und löſet eine Aufgabe ſo auf, daß man von dem geſuchten auf etwas gegebenes geführt wird. Beide Verfahrungsarten ſind in dem Vortrage mathematiſcher Erkenntniſſe anwendbar und üblich.

Zur Erläuterung des angegebenen Unterſchiedes in der Beweisführung mag der Satz dienen, daß, wenn man an je zwey von drey ungleichen Kreiſen ein Paar gemeinſchaftlicher Berührungslinien ſo zieht, daß jede derſelben die Kreiſe an einerley Seite der die Mittelpuncte verbindenden geraden berührt, und ſolche bis zu ihrem Durchſchnitt verlängert, die drey Durchſchnittspuncte in gerader Linie liegen.

Synthetiſch wird dieſer Satz ſo bewieſen:

Es ſeyen (Fig. 66.) C, C′, C″ die Mittelpuncte der drey Kreiſe, deren Halbmeſſer beziehungsweiſe r, r′, r″ ſind, und M, M′, M″ die Durchſchnittspuncte der drey Paare berührender HM, IM; H′M′, I′M′; H″M″, I″M″, ſo ſoll bewieſen werden, daß M, M′, M″ in gerader Linie ſind.

Zu dem Ende werde CK, welche der C′M″ in K begegnet, der MM″ parallel gezogen, ſo iſt nach einem bekannten Satze (Elem. VI, 2.)

$$C'M : CM = C'M'' : KM''$$

Nun iſt, wenn man ſich von C und C′ Halbmeſſer an die Berührungspuncte der Kreiſe um C und C′ mit MH gezogen vorſtellt,

$$C'M : CM = r' : r$$

Daher $r' : r = C'M'' : KM''$

und $r' : C'M'' = r : KM''$

Denkt man ſich von C und C'' gleichfalls Halbmeſſer an die Berührungspuncte auf H'M' gezogen, ſo ergiebt ſich

$$r' : C'M'' = r'' : C''M''$$

folglich iſt

$$r'' : C''M'' = r : KM''$$

oder $r'' : r = C''M'' : KM''$

d. i. $C''M' : CM' = C''M'' : KM''$

Daher iſt M''M' der CK parallel, und folglich MM''M' eine einzige gerade Linie, weil nämlich hiernach $MM''C'' + C''M''M' = M''KC + C''KC =$ zwey rechten Winkeln.

Dieſer Beweis iſt ſynthetiſch, indem bloß bekannte Sätze, welche ſich theils durch Anwendung allgemeiner geometriſcher Lehrſätze auf die vorliegende Größenverbindung ergeben, theils aus der allgemeinen Proportionslehre entlehnt ſind, darin ſo verbunden werden, daß der zu beweiſende Satz das Ergebniß des letzten Schlußſatzes iſt.

Ein analytiſcher Beweis deſſelben Satzes nimmt an, daß M, M'', M' in gerader Linie ſind, und folgert daraus, daß, wenn nun von den Puncten M'', M' die Perpendikel M''m'', M'm' auf MC gefällt werden,

$$Mm' : Mm'' = M'm' : M''m''$$

ſey, welches auch in der That ſo befunden wird, wie man in Meier Hirſch's Sammlung geometriſcher Aufgaben, Th. 2. §. 271., erſehen kann, wo der Beweis auf dieſe Art geführt iſt. Freylich iſt er dadurch nicht zum kürzeſten ausgefallen.

Die Syntheſis bleibt weſentlich daſſelbe Verfahren, man mag ſich algebraiſcher Zeichen bedienen oder die in einem geometriſchen Schema vorkommenden Größen unmittelbar andeuten.

Indeß muß man doch zwey Arten derſelben unterſcheiden, diejenige, deren ſich die Alten bedienten, und die algebraiſche, welche bey den Neueren die üblichſte iſt.

Die Syntheſis der Alten gebraucht gleichſam als Bindemittel bey der Zuſammenſetzung der ſchon gefundenen Sätze und Auflöſungen nichts als die Addition, Subtraction und die geometriſchen Proportionen. Multiplication und Diviſion kommen nur vor, wo Vielfache einer Größe zu nehmen ſind, oder eine Größe in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen iſt. Ausziehung einer Quadratwurzel iſt Erfindung einer mittleren geometriſchen Proportionalgröße zwiſchen zwey gegebenen; und die Ausziehung einer Cubikwurzel iſt die Erfindung einer von zwey mittleren Proportionalgrößen zwiſchen zwey gegebenen. Was nach der neueren Rechnungsart ein Product aus zwey Linien heißt, iſt in der alten Geometrie Rechteck; ein Product aus drey Linien oder aus einer Linie in eine Fläche — rechtwinkliges Parallelepipedon. Ein Product von vier Linien, einer Linie in einen Körper, oder von zwey Flächen, von Flächen in Körper, und dergleichen Producte von mehr als drey Dimenſionen konnten gar nicht vorkommen. Bey dieſen wenigen und einfachen Hülfsmitteln zur Verknüpfung der Größen war es viel ſchwerer die Relationen derſelben zu entdecken, als nach dem Verfahren der Neueren. Die Algebra und Analyſis bieten uns einen reichen Vorrath von allgemeinen Sätzen und Auflöſungen dar, aus denen man nur die paſſenden auszuheben, und mit den beſonderen Beſtimmungen jedes Falles einer Relation zu verbinden braucht. Daher hat der Gang der neueren mathematiſchen Methode viel gleichförmiges, welches in manchen Fällen leicht nachgeahmt werden kann. Die Alten mußten

faſt für jeden Satz einen eigenen Weg auffinden. Deſto mehr muß man ſich wundern, wie ſie bey ſo wenigen und ſo einfachen Hülfsmitteln ſo vieles haben leiſten können.

Ein Umſtand, der mit dem Verfahren der alten Geometer, es mochte daſſelbe Syntheſis oder Analyſis in der vorhin angegebenen Bedeutung dieſer Ausdrücke ſeyn, nothwendig verbunden war, iſt die ununterbrochene Betrachtung der Figur, und die Aufmerkſamkeit auf dieſelbe vom Anfange der Schlußkette bis zu Ende. Das algebraiſche Verfahren der Neueren erfordert dieſe Aufmerkſamkeit nur bis zu einem gewiſſen Puncte, bis dahin nämlich, wo die in der Vorausſetzung der aufgeſtellten Frage, es mag dadurch der Erweis eines Lehrſatzes oder die Auflöſung einer Aufgabe geſucht werden, enthaltenen Bedingungen analytiſch oder durch Gleichungen ausgedruckt ſind. Von dieſem Puncte an nämlich beginnt das eigentliche Geſchäft der Algebra, wobey man der Betrachtung der Figur ſich ganz überheben kann, und nicht eher zu derſelben zurückzukehren braucht, als um das Reſultat der algebraiſchen Operationen auf dieſelbe zu beziehen und geometriſch zu deuten. In den neueſten Zeiten hat man die algebraiſche Behandlung geometriſcher Gegenſtände dadurch von der Betrachtung der Figur noch unabhängiger zu machen geſucht, daß man die Lage aller Puncte im Raume, und damit auch den Zug gerader ſowohl als krummer Linien, und die Verbreitung ebener und gekrümmter Flächen in demſelben durch Coordinaten, wozu man in der Regel rechtwinklige wählt, beſtimmt, übrigens aber dieſelbe Maxime, welche die alten Geometer rückſichtlich der Einmiſchung der Arithmetik in die Geometrie beobachteten, in Hinſicht der Zuziehung der Geometrie befolgt, d. h., nur die zur Aufſtellung der Fundamentalgleichungen unumgänglich nöthigen allgemeineren Sätze der Geometrie, welche unmittelbaren Bezug auf die Coordinatenmethode haben, in Anwendung bringt,

ohne erſt vorläufige Conſtructionen zu machen, und dadurch die Anwendung ſpeciellerer Sätze vorzubereiten. Dieſes Verfahren iſt es, welches man jetzt gewöhnlich unter der Benennung des analytiſchen verſteht, und ſolches dem geometriſchen ganz auf Betrachtung der Figur gegründeten Verfahren der alten Geometer, das den Namen des ſynthetiſchen bekommt, entgegengeſetzt. Es iſt durch ſeine Einfachheit und Gleichförmigkeit, ſo wie durch die Eleganz, die es in der Behandlung zuläßt, gleich bewundernswerth, durch ſeine große Ausdehnung und Stärke aber verdient es den Vorzug vor dem ſynthetiſchen Verfahren der Alten. Dieſen Vorzug verdankt es unter andern mit dem Gebrauch der entgegengeſetzten Größen.

Die Einfachheit der Conſtructionen nämlich, wodurch nach der alten Syntheſis die Beſtandtheile eines Beweiſes verbunden werden oder das Geſuchte herausgebracht wird, macht es nothwendig, jeden Fall einer Größenverbindung, worin die Lage der Linien eine andere iſt, beſonders vorzunehmen. Die neuere Mathematik begreift durch den Gebrauch des Entgegengeſetzten alle verwandten Fälle unter einer einzigen Unterſuchung, die an einem der verwandten Fälle angeſtellt, und mit der gehörigen Veränderung der Vorzeichen + und — auf alle übrigen angewandt wird. Dieſes Verfahren kürzt die Unterſuchungen ſehr ab, wogegen die Betrachtung der einzelnen Fälle augenſcheinlicher iſt, weil ſie jeden ſinnlich darſtellt. Überhaupt, weil die Syntheſis der Alten keine Rechnungsformeln gebraucht, ſondern jeden Schritt zur Anſchauung bringt, iſt ſie befriedigender als die Methode der Neueren, die aber dennoch eben die Gewißheit gewährt, wenn man ſie gehörig gefaßt hat, und einſieht, wie das Beſondere im Allgemeinen enthalten iſt, und daher wieder aus der Betrachtung eines beſonderen Falls jeden anderen ſich darſtellen kann.

Dadurch, daß bey der Behandlungsart in der Mathematik der Alten der Beweis jedes Satzes und die Auflöſung jeder Aufgabe eine eigene Verknüpfung von Sätzen und Conſtructionen hat, iſt es oft ſchwer, den Weg, auf welchem ein Beweis oder eine Auflöſung gefunden ſind, aufzuſpüren. Daher heißt Syntheſis auch überhaupt das Verfahren, wobey die Kette von Schlüſſen, die zu einem Satze oder einer Auflöſung geführt haben, nicht bemerkbar iſt, ſo wie Analyſis im Gegenſatze die Darlegung der ganzen Folge von Sätzen und Conſtructionen, in welcher das Vorgetragene gefunden iſt.

In dieſer Rückſicht iſt Analyſis mit der heuriſtiſchen Methode einerley. Newtons Principien ſind ein ſynthetiſch abgefaßtes Werk, indem ihr Verfaſſer ganz und gar keine Spur des Weges gelaſſen hat, auf welchem er zu ſeinen großen und wichtigen Entdeckungen gelangt iſt, ſondern bloß die Sätze und Auflöſungen mit ihren auf die Betrachtung der Figur gegründeten Beweiſen aufſtellt, die aber Wolfs Urtheile nach doch nicht die ächte Form der ſynthetiſchen Beweiſe der alten Geometer haben. In einem noch höheren Grade gilt dieſes Urtheil von Hermanns Phoronomie. Euler klagt daher in der Vorrede zum erſten Theile ſeiner älteren Mechanik, daß er durch das Studium dieſer Werke nicht in den Stand geſetzt worden ſey, Aufgaben, welche nur in etwas von den in ihnen aufgelöſ'ten verſchieden geweſen wären, für ſich aufzulöſen, ohngeachtet er die gegebenen Auflöſungen ſehr wohl gefaßt zu haben geglaubt hätte. Mit dem, was hier über Newtons Principien erinnert iſt, ſtimmt Laplace's Urtheil in der Exposition du systême du monde, Liv. V., chap. 5., wo dieſer große Mathematiker zugleich die Syntheſis mit der Analyſis vergleicht, überein. Man darf jedoch hierdurch ſich nicht etwa auf die Meinung bringen laſſen, als ob Newton das analytiſche Verfah-

ren nicht in ſeiner Gewalt gehabt hätte. Die Auflöſungen, welche er in der Arithm. univers. Probl. LXI. von einigen die Beſchreibung der Kegelſchnitte betreffenden Aufgaben giebt, zeigen das Gegentheil. Sie ſind rein analytiſch und haben eine große Eleganz. Indeß ſind Newtons Vorliebe für das ſynthetiſche Verfahren der Alten; ſeine Empfehlung deſſelben und eigenes Beyſpiel Veranlaſſung geworden, daß die Engländer lange Zeit faſt ausſchließlich jenes Verfahren auch außerhalb der Geometrie angewandt, und die Rechnung immer gern mit der Zeichnung verbunden haben. So iſt Smiths Optik ein durchaus ſynthetiſches Werk, welches Käſtner in den algebraiſchen Vortrag gebracht hat.

Um das, was vorhin über das Weſen der analytiſchen Geometrie bemerkt worden, durch ein Beyſpiel zu erläutern, ſoll der in dem Artikel, Kreis, 49. enthaltene Satz, daß die Summe der Quadrate von den Segmenten zweyer ſich rechtwinklig ſchneidenden Sehnen des Kreiſes ſo groß iſt als das Quadrat des Durchmeſſers, dienen, indem hier ein analytiſcher Beweis deſſelben folgt.

Man lege alſo die Abſciſſenlinie durch den Mittelpunct des Kreiſes, und nehme den Mittelpunct ſelbſt zum Anfange der rechtwinkligen Coordinaten x, y, ſo iſt die Gleichung für den Kreis, wenn r den Halbmeſſer bezeichnet

$$\text{I. } xx + yy = rr$$

Die Gleichung für eine gerade, deren Abſtand vom Anfangspuncte der Coordinaten d iſt, und bey welcher d mit der Abſciſſenlinie den Winkel α einſchließt, iſt

$$\text{II. } x\cos\alpha + y\sin\alpha = d$$

Eben ſo iſt die Gleichung für eine andere gerade, für welche d′, α' das ſind, was für die erſte d, α waren,

$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' = d'$$

Da die zweyte Linie die erſte rechtwinklig ſchneiden ſoll, ſo iſt $\alpha' = 90^\circ + \alpha$, alſo die Gleichung für die zweyte Linie

$$\text{III.}\quad -x\sin\alpha + y\cos\alpha = d'$$

Aus II. und III. ergeben ſich die Coordinaten a, b des Durchſchnitts der beiden geraden

$$a = d\cos a - d'\sin\alpha$$
$$b = d\sin\alpha + d'\cos\alpha$$

Aus I. und II. aber erhält man für die Coordinaten X, Y des Durchſchnitts der erſten geraden mit dem Kreiſe

$$X = d\cos\alpha \pm (rr - dd)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha$$
$$Y = d\sin\alpha \mp (rr - dd)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha$$

welches zeigt, daß zur Möglichkeit zweyer Durchſchnittspuncte, dergleichen bei einer Sehne Statt haben, $d < r$ ſeyn muß. Die Quadrate von den Stücken der erſten geraden, welche zwiſchen den Durchſchnittspuncten derſelben mit dem Kreiſe und dem gemeinſamen Durchſchnitt beider geraden enthalten ſind, ſind $(X' - a)^2 + (Y' - b)^2$ und $(X'' - a)^2 + (Y'' - b)^2$, wo X', Y' ſich auf den einen, X'', Y'' auf den andern Durchſchnittspunct beziehen.

Es iſt nach Subſtitution der obigen Werthe

$$(X'' - a)^2 + (Y' - b)^2 = (d' + \sqrt{(rr - dd)})^2$$
und $$(X'' - a)^2 + (Y'' - b)^2 = (d' - \sqrt{(rr - dd)})^2$$

Daher

$$(X' - a)^2 + (Y' - b)^2 + (X'' - a)^2 + (Y'' - b)^2$$
$$= 2d'd' + 2rr - 2dd.$$

Um die Summe der Quadrate von den Stücken der zweyten geraden, welche zwiſchen den Durchſchnitts-

puncten derſelben mit dem Kreiſe und dem Puncte des Durchſchnitts beider geraden enthalten ſind, zu haben, darf man in dem eben gefundenen Ausdruck nur d und d' mit einander vertauſchen, und es wird dieſe Summe $= 2dd + 2rr - 2d'd'$. Daher iſt die Summe von den Quadraten aller vier zwiſchen dem Durchſchnitte der beiden geraden und ihren Durchſchnittspuncten mit dem Kreiſe enthaltenen Segmente $= 4rr = (2r)^2$, welches zu beweiſen war.

Dieſer Beweis gründet ſich bloß auf die bekannte Grundeigenſchaft des Kreiſes und auf die Lehre von der Ähnlichkeit der Dreyecke, vermittelſt welcher der zugezogene Pythagoriſche Lehrſatz bekanntlich dargethan werden kann *). Zugleich erhellt, daß, da rückſichtlich der Coordinaten a, b weiter keine Bedingung Statt hat, als $a^2 + b^2 = d^2 + d'^2$, d. i. $< 2r^2$, der Durchſchnittspunct der beiden geraden auch außerhalb des Kreiſes fallen kann, wofern nur ſein Abſtand vom Mittelpuncte nicht größer als die Seite des eingeſchriebenen Quadrats iſt.

Vergleicht man mit dieſem Beweiſe den geometriſchen in dem angezogenen Art., ſo erſcheint der letztere viel kürzer. Allein es ſind auch bey demſelben mehr Hülfsſätze gebraucht, und die durch den Pythagoriſchen Lehrſatz ſchon reducirte Summe von $AE^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$ (Th. III., Fig. 20.) noch weiter reducirt worden. Fällt man übrigens vom Mittelpuncte des Kreiſes auf die Chorden oder Secanten Perpendikel, ſo läßt ſich dem obigen algebraiſchen Beweiſe vermittelſt des 9ten und 10ten Satzes im zweyten Buche des Euklides eine mehr geometriſche Form geben.

---

*) Nicht umgekehrt, wie man wohl glauben könnte. Die Incommenſurabilität ſteht dieſer Herleitung im Wege.

Als ein Beyſpiel einer wahrhaft analytiſchen Auflöſung einer geometriſchen Aufgabe weiß ich kein beſſeres anzuführen, als die Auflöſung, welche Gauß in der Monatl. Correſp. B. XXII. S. 112 u. folgg. von der Aufgabe, in ein gegebenes Viereck die größte Ellipſe, welche die vier Seiten des Vierecks berührt, zu beſchreiben, gegeben hat. Es iſt dabey von den Eigenſchaften der Ellipſe weiter keine in Betracht gezogen, als die, welche der von Euler in der Introduction, B. II. §. 144. zuletzt erwieſene Satz ausſagt. Die von mir ebendaſelbſt S. 227 mitgetheilte Auflöſung braucht mehr vorbereitende Conſtructionen und Hülfsſätze von der Ellipſe, und darunter einen entfernteren; ſie kann daher nicht als rein analytiſch angeſehen werden.

Wenn die zur Erfindung der geſuchten Größe einer Frage nöthigen Beſtimmungen von dieſer Größe ſelbſt wieder abhängen, dann iſt die Aufgabe eigentlich analytiſch, und kann nur durch die algebraiſche Methode auf dem kürzeſten Wege aufgelöſet werden. Um z. B. die Kraft zu beſtimmen, welche der Grundlinie einer ſchiefen Ebene parallel wirkend einer gegebenen Laſt auf derſelben und zugleich der Statt habenden Reibung das Gleichgewicht hält, muß man zur Beſtimmung der Reibung den Normaldruck auf die ſchiefe Ebene kennen. Dieſer Druck hängt aber mit von der geſuchten Kraft ab. Will man hierbey ſo verfahren, daß man ſucht, um wie viel die zum Gleichgewicht ohne Reibung erforderliche Kraft vermehrt werden muß, um zugleich die Reibung zu überwältigen, ſo verfällt man auf eine unendliche Reihe, weil das, was man der Kraft zulegt, um die von ihr und der Laſt herrührende Reibung zu überwinden, wieder neuen Druck und damit auch neue Reibung hervorbringt. Die Beſtimmung der Zeit des Auf- und Untergangs des Mondes gehört gleichfalls hierher. Um ſie zu machen, muß die Abwei-

chung des Mondes zur Zeit des Auf- und Unterganges, welche aber noch geſucht wird, bekannt ſeyn. Man ſehe hierüber eine Bemerkung Jak. Bernoulli's zu Huygens Schrift, De ratiociniis in ludo aleae, Prop. XIV. in der Ars conjectandi S. 47 u. 48. Lambert rechnet in dem Aſtron. Jahrb. für 1780, S. 47, II., die Frage nach der Zeit, wo ein Paar Planeten einander bedecken oder nahe bey einander vorbeygehen, zu den umgekehrten oder eigentlich analytiſchen Aufgaben der Sternkunde.

Syſtem, wiſſenſchaftliches, iſt eine geordnete Sammlung in einander gegründeter Wahrheiten von einerley Art und Beſchaffenheit. So begreift ein Syſtem der Aſtronomie alle bekannten Hauptſätze über die Bewegung der Himmelskörper in ihrem natürlichen Zuſammenhange, d. i. von den einfachſten und allgemeinſten Erſcheinungen der täglichen Bewegung an bis zu der zuſammengeſetzteren des durch gegenſeitige Anziehung mannichfaltig geſtörten und modificirten Planetenlaufs.

Der Hauptzweck eines wiſſenſchaftlichen Syſtems geht auf die Verknüpfung der Wahrheiten unter einander und zu einem Ganzen. Hieraus ergeben ſich die Haupteigenſchaften deſſelben, welche ſind: Gründlichkeit, Ordnung und Deutlichkeit. Die erſte iſt durch die Benennung, wiſſenſchaftliches Syſtem, ſelbſt bedingt, und kann ohne Ordnung oder Methode, wodurch das Begründende dem dadurch Begründeten, das Einfachere dem Zuſammengeſetzteren, das Allgemeinere dem Beſonderen vorangeht und zur Grundlage dient, nicht beſtehen. Eben ſo wenig aber auch ohne Deutlichkeit. Denn ohne deutliche Grundbegriffe und ohne klare Einſicht in den Zuſammenhang der Wahrheiten findet keine Gewißheit Statt; ungewiſſe Erkenntniſſe ſind aber ganz unbrauchbar.

In einem wiſſenſchaftlichen Syſtem muß ſo wenig als möglich unbewieſen bleiben. Dieſes erfordert der Begriff der Wiſſenſchaft. Daher darf die Anzahl der Axiome nicht ohne Noth vermehrt, ſondern ſie muß vielmehr auf die möglich kleinſte gebracht werden. Dieſe ſind aber beym Vortrage des Syſtems insgeſammt deutlich und beſtimmt anzugeben, damit jeder in den Stand geſetzt werde, die Tüchtigkeit des Grundes, worauf das Gebäude ruht, ſelbſt zu unterſuchen. Archimedes hat dieſes unter andern in den Büchern vom Gleichgewichte ſorgfältig beobachtet, und die Principien, worauf er die Lehren des Gleichgewichts am Hebel und vom Schwerpuncte gründet, genau und vollſtändig angegeben. Die neueren Lehrbücher der Statik verfahren hierin nicht immer ſo gewiſſenhaft.

Zur leichteren Einſicht in den Zuſammenhang der Wahrheiten eines wiſſenſchaftlichen Syſtems dient es gar ſehr, daß jeder Satz abgeſondert für ſich und ſo viel als möglich rein, d. h., ohne Bezug auf einen individuellen Fall, vorgetragen werde, weil dadurch die Verbindung zwiſchen der Hypotheſis und Theſis oder zwiſchen den Datis und dem Geſuchten bemerklicher, und ſo die Anwendung des Satzes erleichtert wird. Die Art des Vortrages, welche die alten Geometer erwählt haben, iſt keine Pedanterey, wie manche vornehmthuende mathematiſche Schriftſteller vorgeben, ſondern befördert in der That das richtige Auffaſſen der Wahrheiten. Euler hat dieſelbe in ſeinen wiſſenſchaftlichen Syſtemen überall, wo es anging, faſt unverändert beybehalten.

Die Anordnung der verſchiedenen Theile eines Syſtems wird am beſten durch die Eintheilung des Hauptobjects beſtimmt. Je natürlicher und einfacher der Eintheilungsgrund iſt, deſto faßlicher und beſſer zu überſehen wird das Ganze, und deſto leichter fügen

ſich die einzelnen Theile an einander. Eulers älteres Werk über die Mechanik, worin bloß die Bewegung der Puncte abgehandelt iſt, giebt ein Muſter einer einfachen und natürlichen Anordnung. Daß die einfacheren Theile vor den zuſammengeſetzteren abgehandelt werden, kann nur in ſo fern zur Regel gemacht werden, als ſich jene ohne dieſe gründlich abhandeln laſſen.

Beym Vortrage der einzelnen Sätze des Syſtems muß oft der ſpeciellere Satz dem allgemeineren vorausgehen, und ihm zur Grundlage dienen, wenn das allgemeinere zuſammengeſetzter iſt als das beſondere. Euklides beweiſet den allgemeineren Satz, daß Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und von einerley Höhe einander gleich ſind, vermittelſt des ſpecielleren, daß Parallelogramme auf derſelben Grundlinie und von einerley Höhe einander gleich ſind. Der ſpeciellere Satz iſt durchaus nöthig, um den allgemeineren darzuthun, wenn man nicht etwa den allgemeineren Satz auf die von Segner angewandte, minder ſtrenge Art darthun will. Alphonſ. Borelli hat in ſeinem Euclides restitutus den ſpecielleren Satz nicht beſonders aufgeſtellt, kann ihn aber doch nicht entbehren, ſondern iſt genöthigt, den Beweis deſſelben in den Beweis des allgemeineren Satzes zu verflechten, und überdies noch einen Satz, die Congruenz der Parallelogramme betreffend, vorauszuſchicken, wodurch ſein Verfahren in der That weitläufiger und minder nett als das Euklidiſche geworden iſt. Übrigens wird man immer ſuchen müſſen, bald die allgemeineren Sätze zu gewinnen und aufzuſtellen, aus denen die beſonderen als eben ſo vielen Corollarien und Anwendungen fließen. Z. B. In der Statik ſind die allgemeinen Geſetze des Gleichgewichts unter einer beliebigen Anzahl von Kräften, welche nach irgend welchen Richtungen an den verſchiedenen Puncten eines Syſtems wirken, vor allen Dingen feſtzuſetzen, und mit ihnen alsdann die beſon-

deren Beſtimmungen jedes Falls, wo Gleichgewicht Statt findet, zu verbinden. Die neueſten franzöſiſchen Lehrbücher und Syſteme der Statik ſind Muſter dieſer ächt wiſſenſchaftlichen Behandlungsart, welche in ihnen mit großer Conſequenz durchgeführt wird, ohne durch eine zu umſtändliche Auseinanderſetzung in ermüdende Weitläufigkeiten auszuarten.

Druckfehler und Verbeſſerungen.

Seite 23 Zeile 2 iſt die 3 zu durchſtreichen.
— 28 — 3 iſt ſtatt 20 in dem mittelſten Fache des zweyten Hülfsquadrats 6 zu ſetzen 10.
— 136 — 13 lies $\int y \partial x$ für $\int y \partial y$.
— 141 — 8 v. u. l. $\int y \partial x$ f. $s y \partial x$.
— 148 — 4 l. $\left(\frac{y^{(o)} + y^{(n)}}{2}\right) R$ f. $\left(\frac{y^{(o)} + y^{(n)}}{2}\right) R^2$
— 198 — 5 u. S. 201 Z. 3 l. (Fig. 22.) f. (Fig. 23.).
— 300 — 5 l. BAB f. RAB.
— 325 ſind in No. 3. die Ordnungszahlen der arithmetiſchen Reihen durchaus um 1 zu groß angegeben.
— 329 Zeile 6 l. $M = \mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m$ f. $M + \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q^m$.
— — — 1 v. u. fehlt die Klammer hinter $\frac{1}{q}$
— 335 — 6 v. u. ſchalte man nach: dieſer, das Wort: Weg, ein.
— 400 — 5 v. u. l. $+ \frac{1}{2a^2}\int \frac{\partial u}{a^2 - e^2 u^2}$ f. $+ \frac{1}{2a^2}\int \frac{\partial u}{a^2 - e^2}$.
— 455 — 2 l. Stéreótomie f. Stéreónomie.
— 467 — 17 v. u. l. Entwerfungslinien f. Entwerfungslinie.
— 475 — 3 v. u. l. KM f. LM.
— 490 — 4 v. u. l. PY f. Pγ.
— 503 — 6 v. u. ſchalte nach: und, das Wort: hier, ein.
— 513 — 15 fehlt die Hinweiſung auf (Fig. 55.).
— 549 — 18 l. (Fig. 63.) f. (Fig. 62.)
— — — 27 l. anſehen f. anſetzen.
— 566 — 10 ſchalte man nach: Gliede, das Wort: an, ein.
— 567 — 7 u. 8 v. u. / — 13 v. u. } l. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \text{etc.}$ f. $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \text{etc.}$
— 568 — 8 l. $a = 1$ f. $x = 1$.
— 569 — 11 l. $\frac{c}{b}$ f. $\frac{c}{a}$.
— 576 — 12 l. $(n+1)^2 x^n$ f. $(n+1)^2 x$.
— 631 — 7 v. u. l. Summen f. Summe.
— 633 — 9 l. $\frac{1}{3}(x-1)x(x+1)$ f. $\frac{1}{3}(x-1)(x+1)$
— 653 — 7 l. $-\frac{19}{720}.\frac{1}{4}$ f. $+\frac{19}{720}.\frac{1}{4}$.
— 656 — 4 fehlt das Minus-Zeichen zwiſchen $e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}$ und $e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}$ im Nenner des Bruchs.
— 662 — 4 l. h f. k.
— 719 — 8 l. $+ 1.2.x^{-3}$ f. $+ 1.2.x^3$
— 728 — 8 l. $\frac{1}{\omega}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^\omega)}{1-x^r}$ f. $\frac{1}{\omega}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x)}{1-x^r}$
— 777 — 7 v. u. l. $\nu + \vartheta$ f. $\eta + \vartheta$.
— 780 — 8 v. u. l. $\frac{\eta}{\mu}$ f. $\frac{\mu}{\eta}$.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK

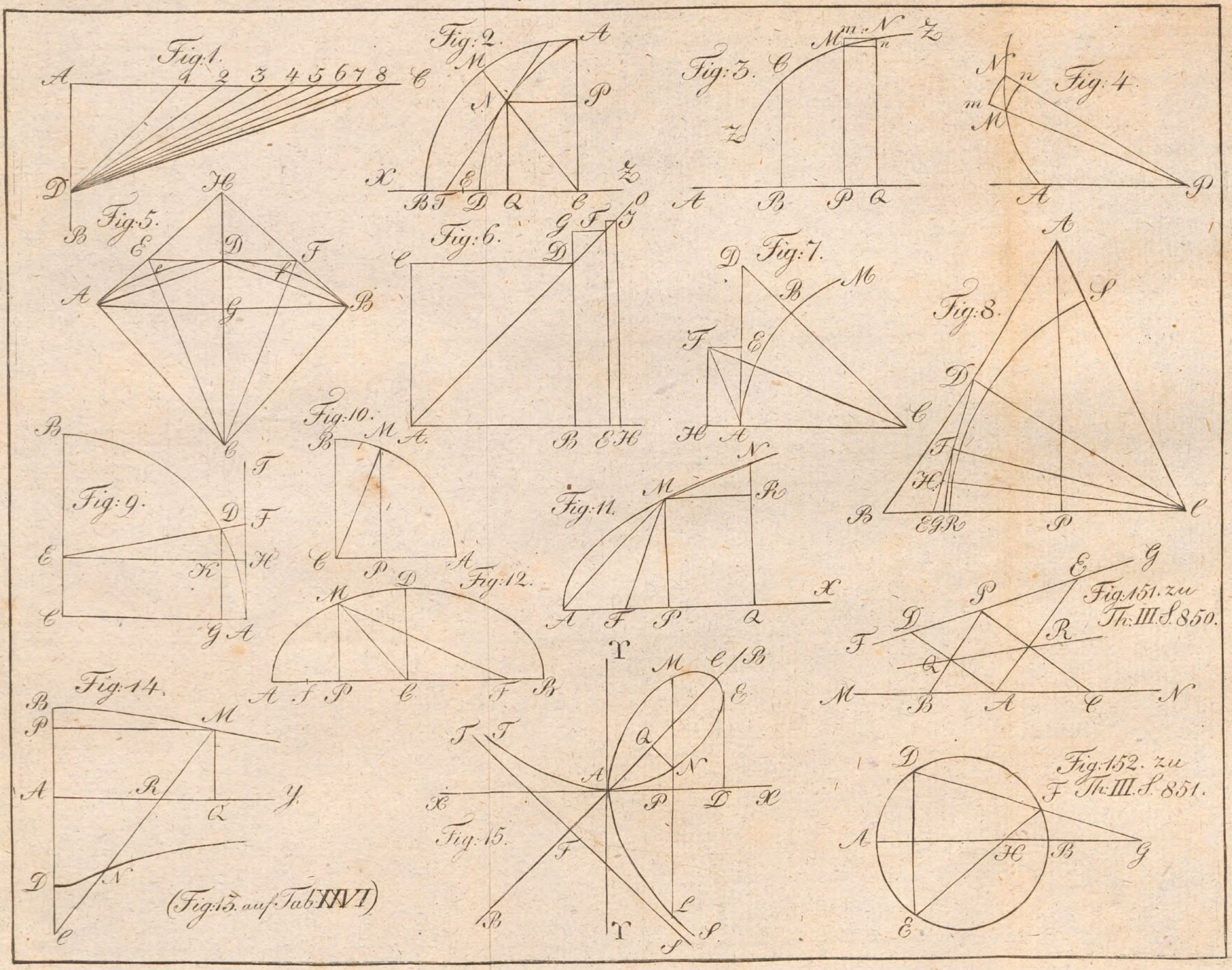


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Fig: 14.
Fig: 15.
Fig: 151. zu Th: III. S. 850.
Fig: 152. zu Th: III. S. 851.
(Fig: 13. auf Tab: XXVI)

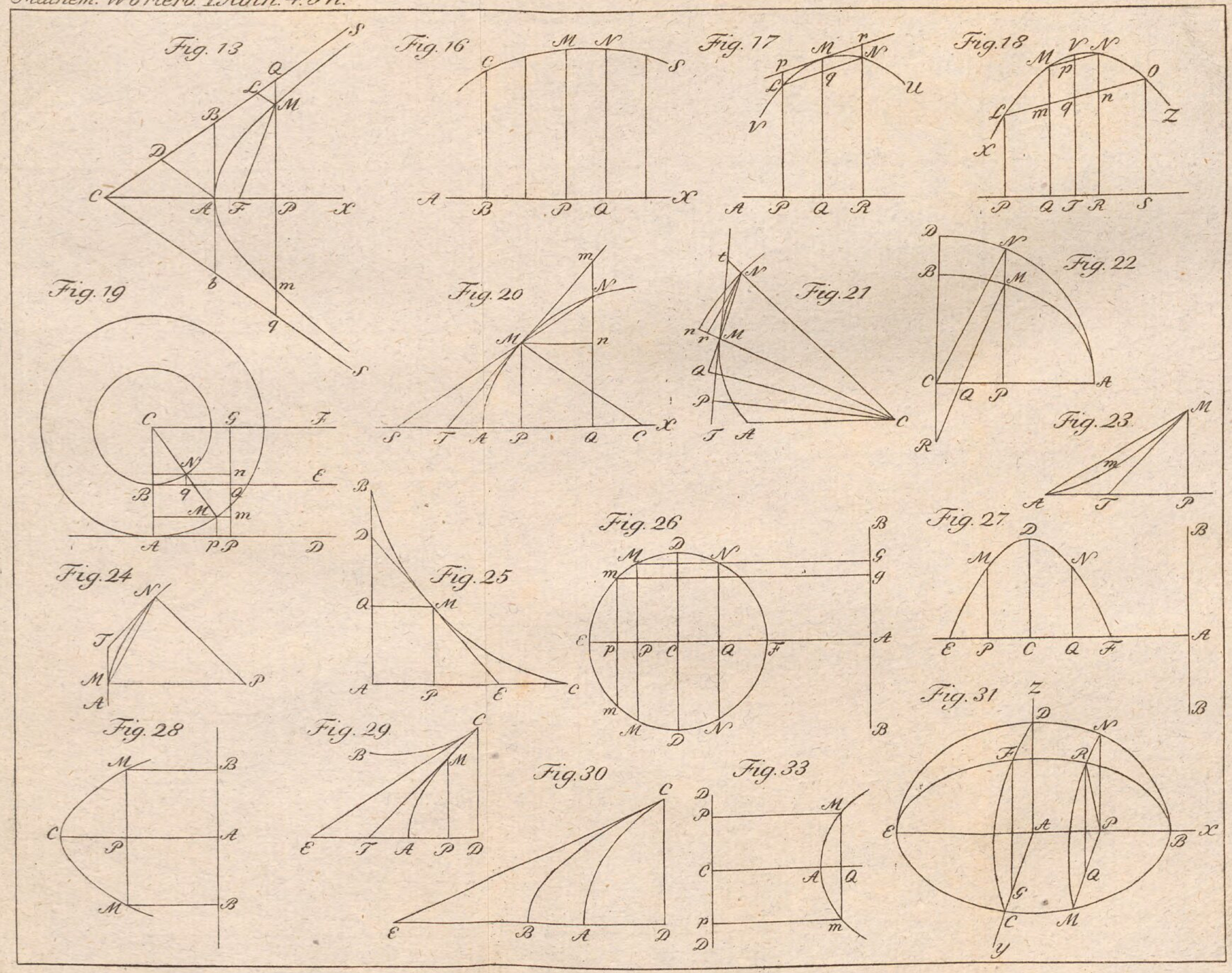


Fig. 13
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 33

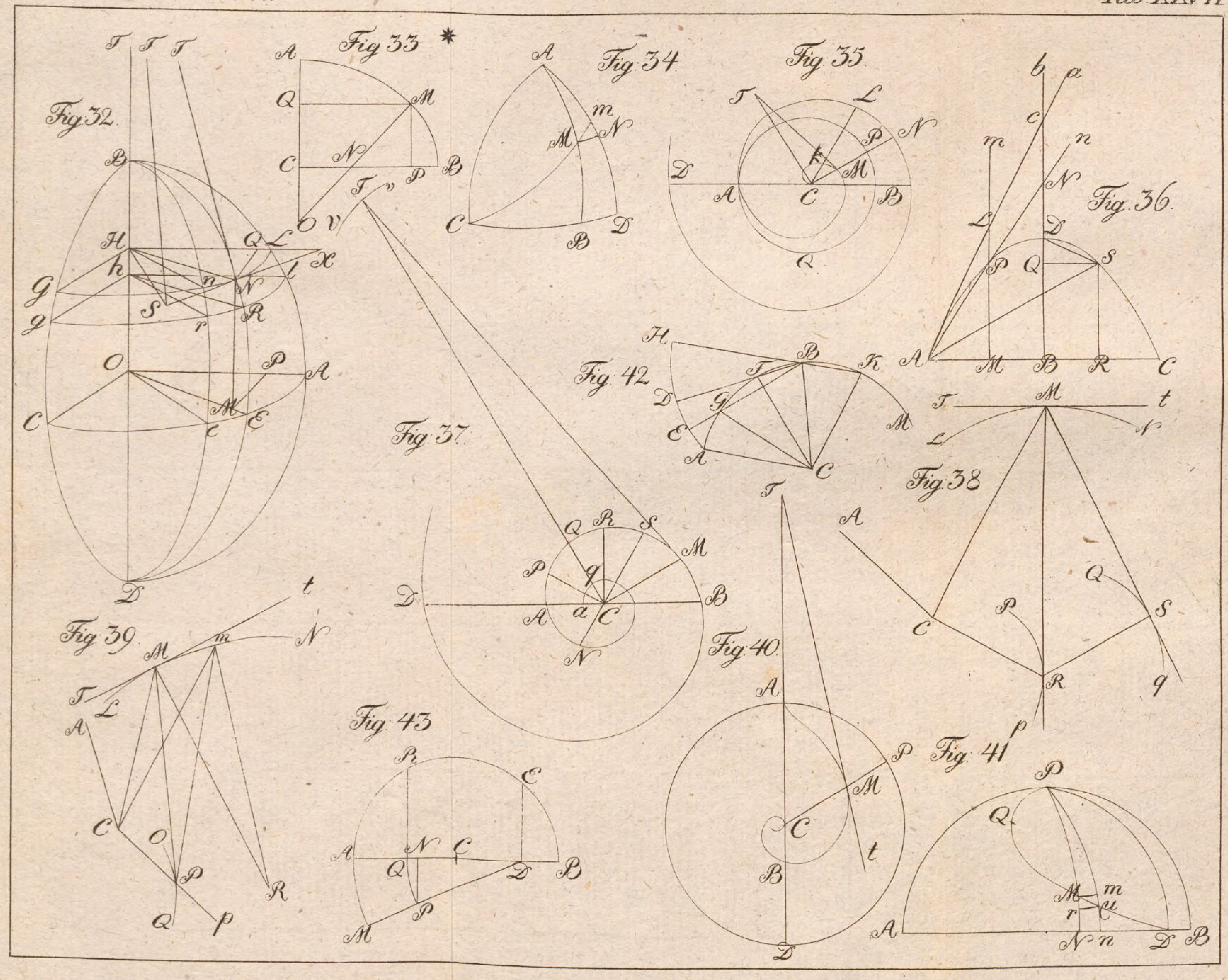


Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.

Fig. 44.

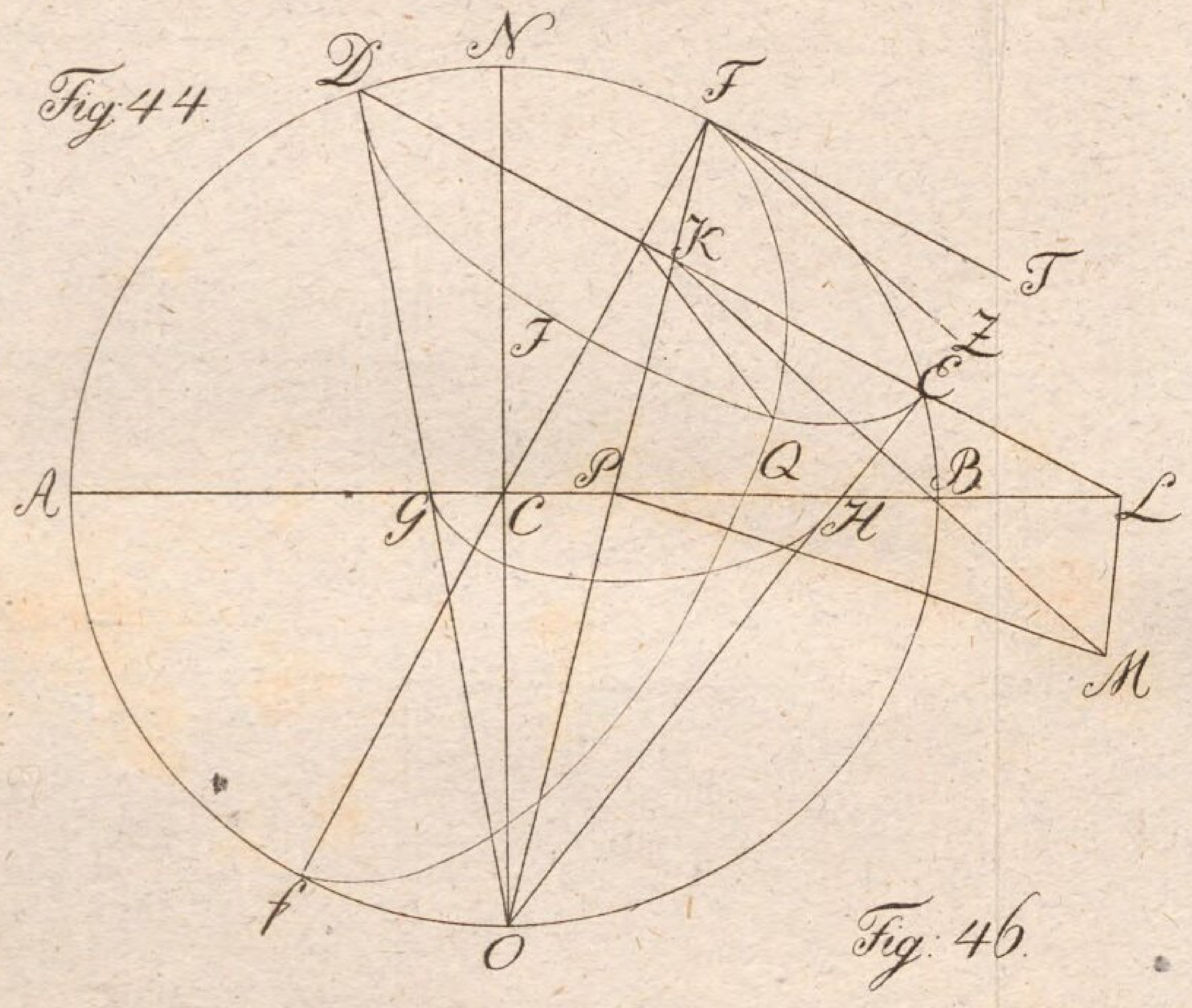


Fig. 45.

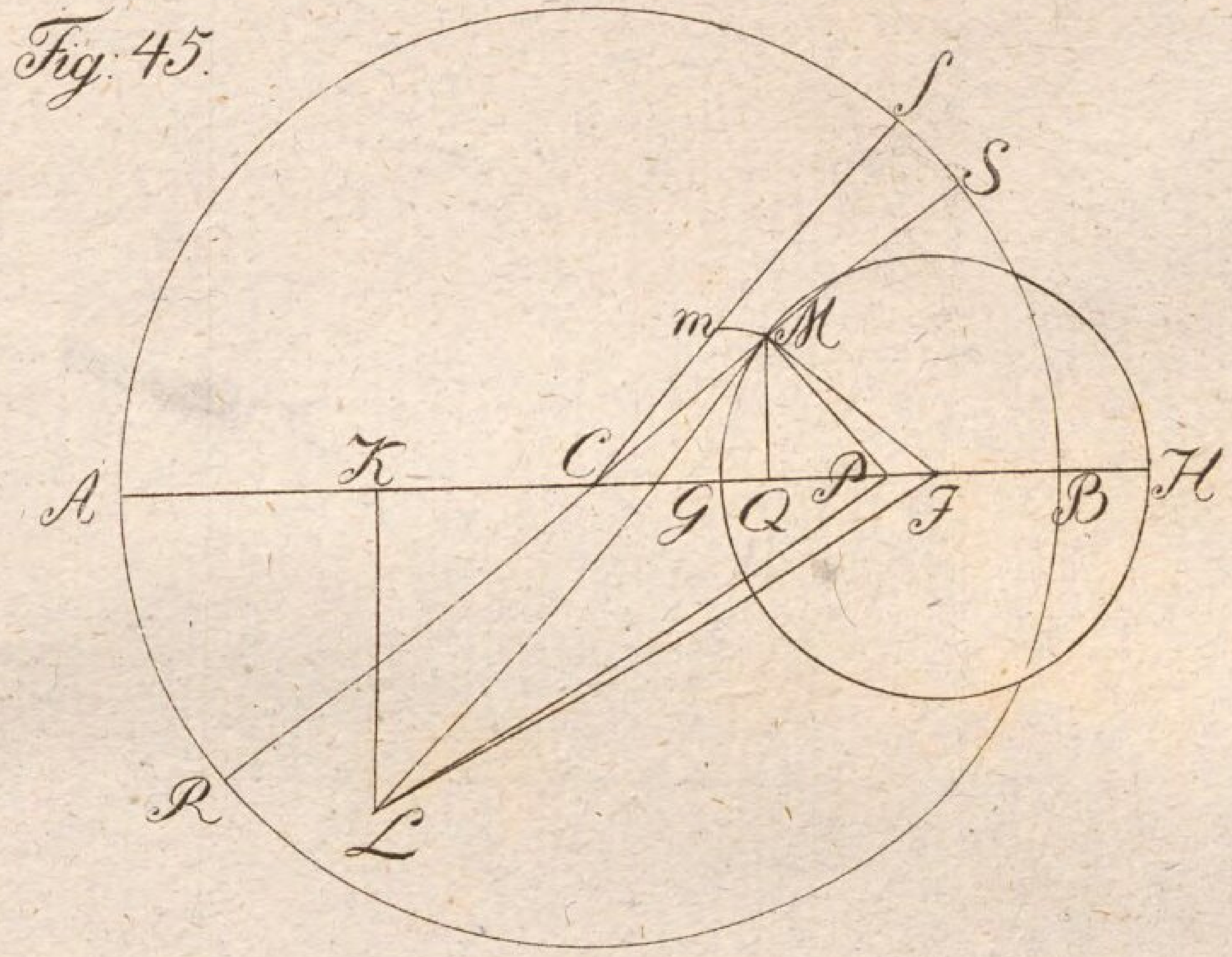


Fig. 46.

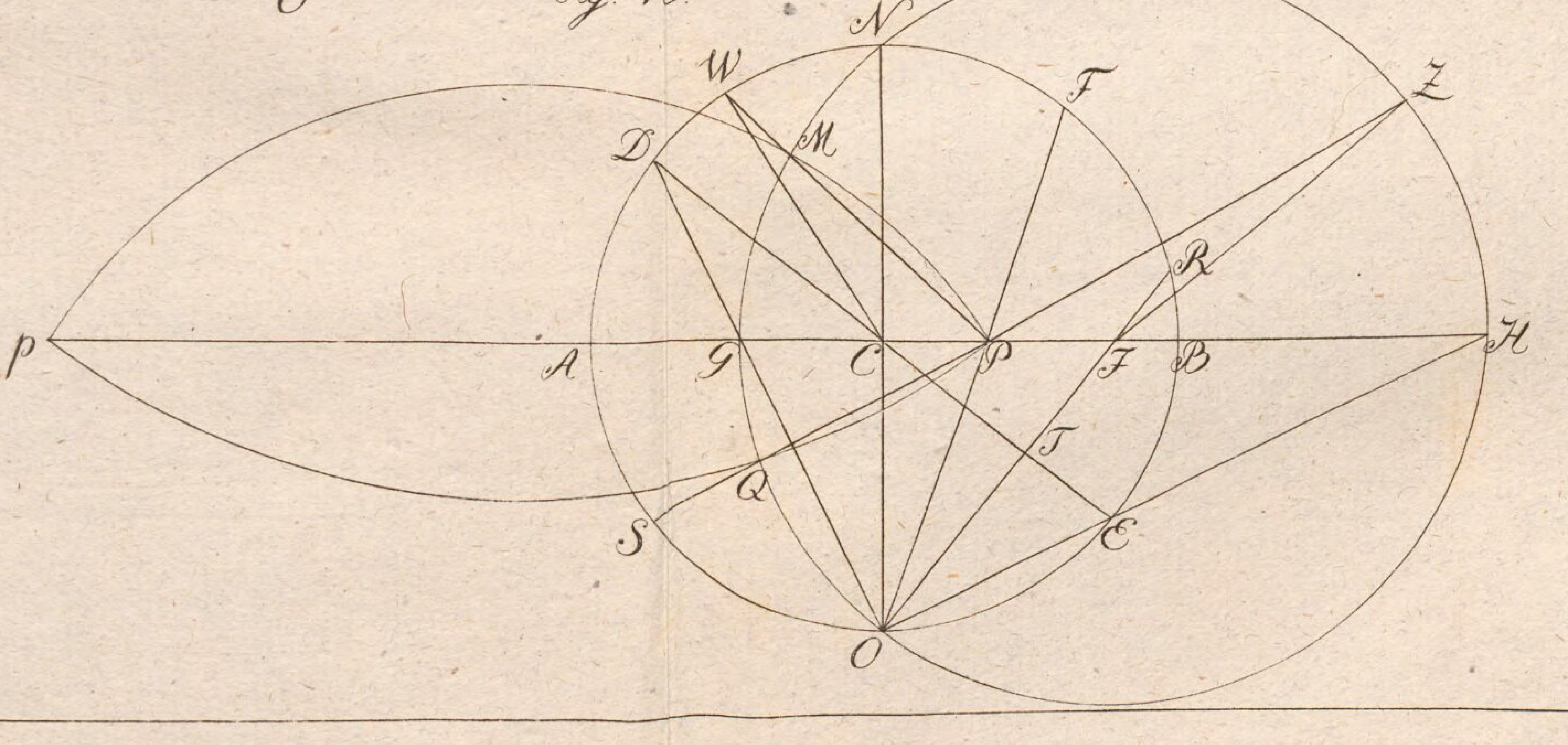


Fig: 47.

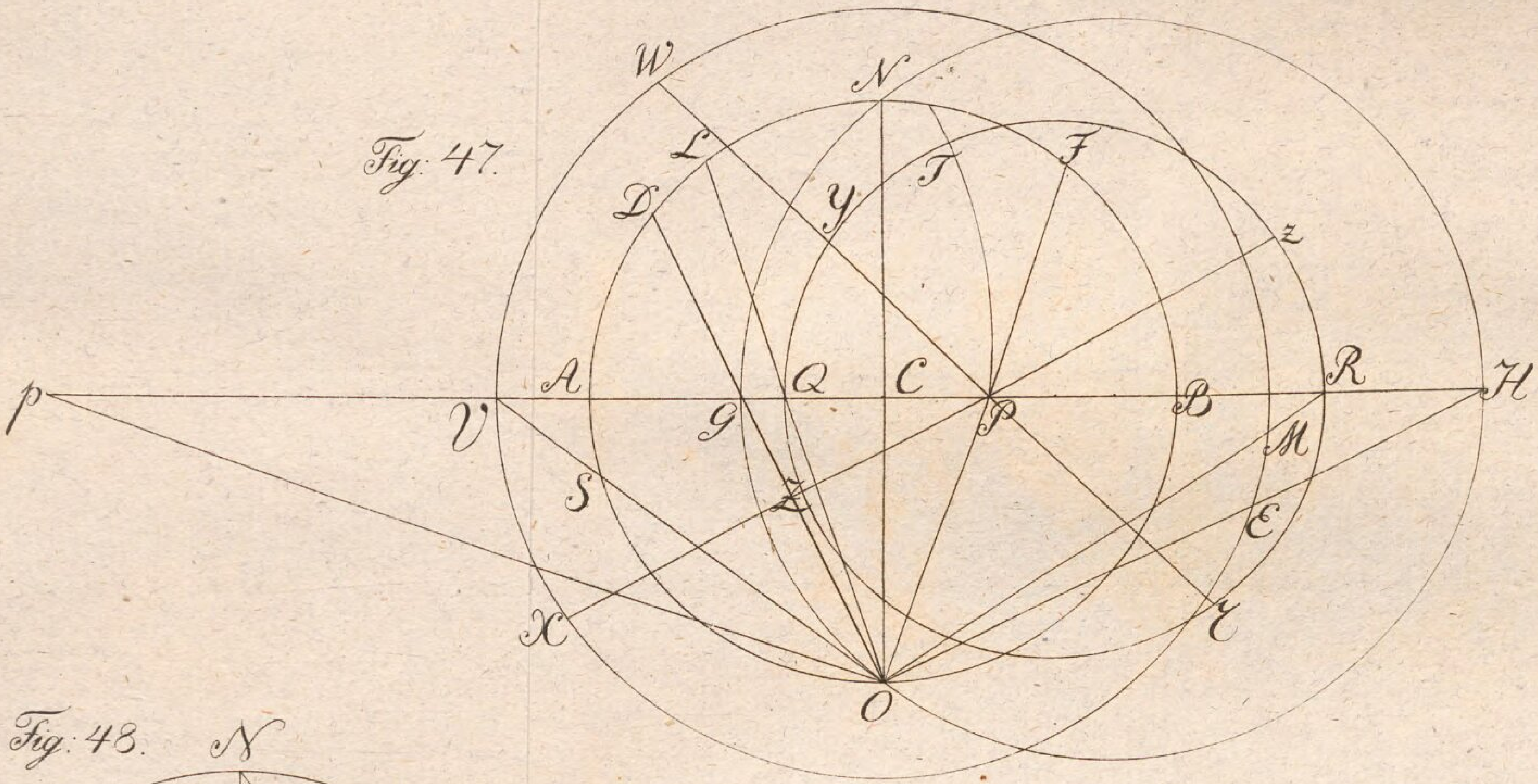


Fig: 48.

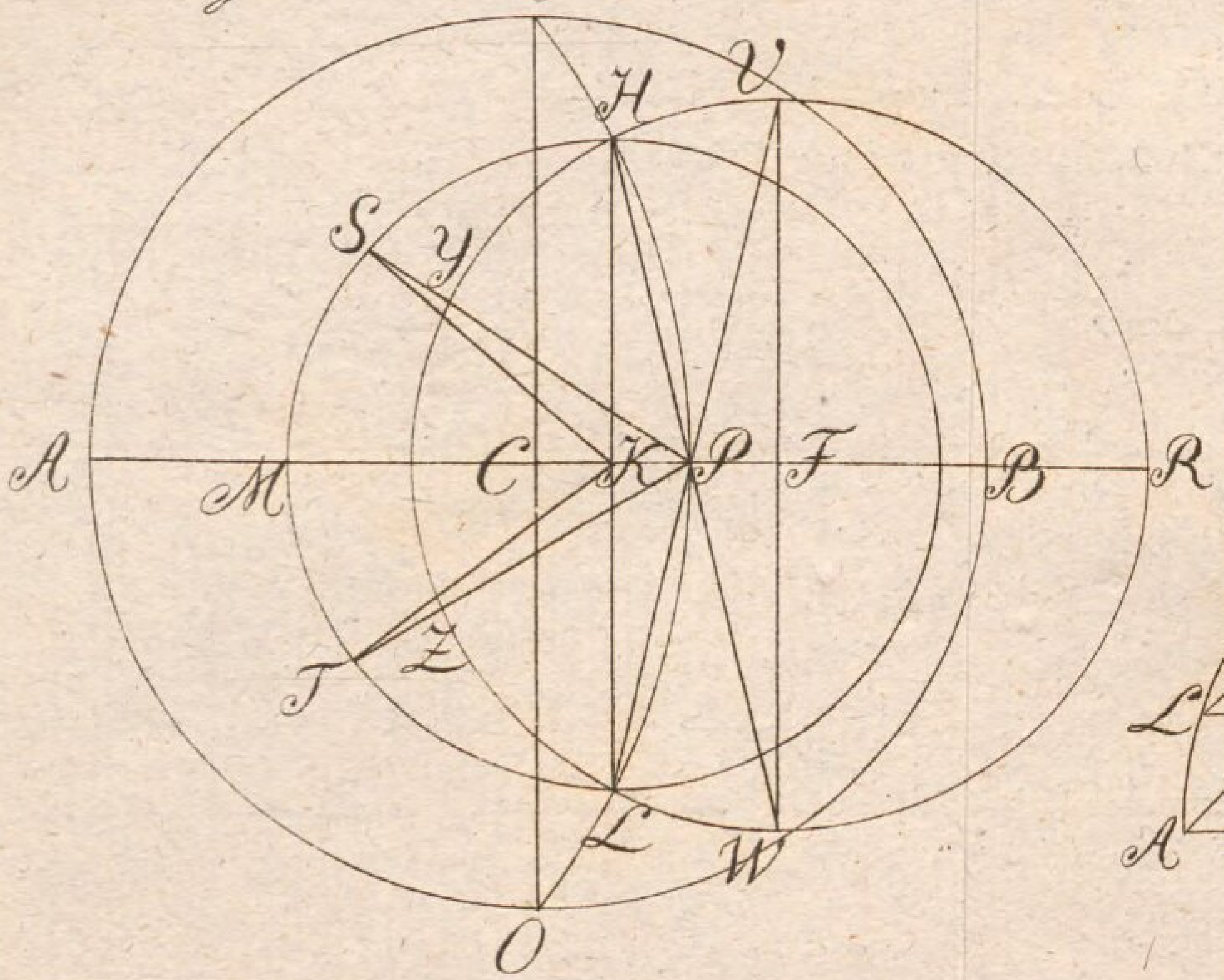


Fig. 49.

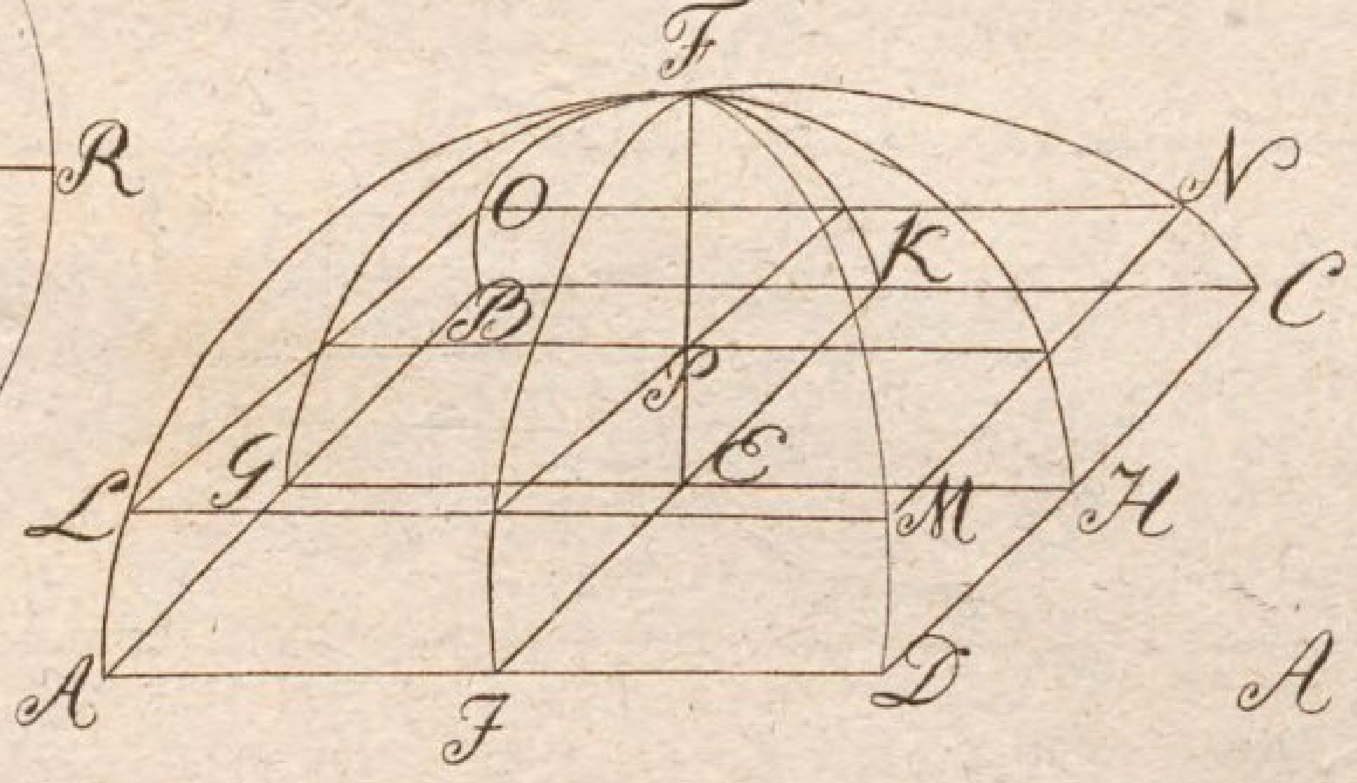
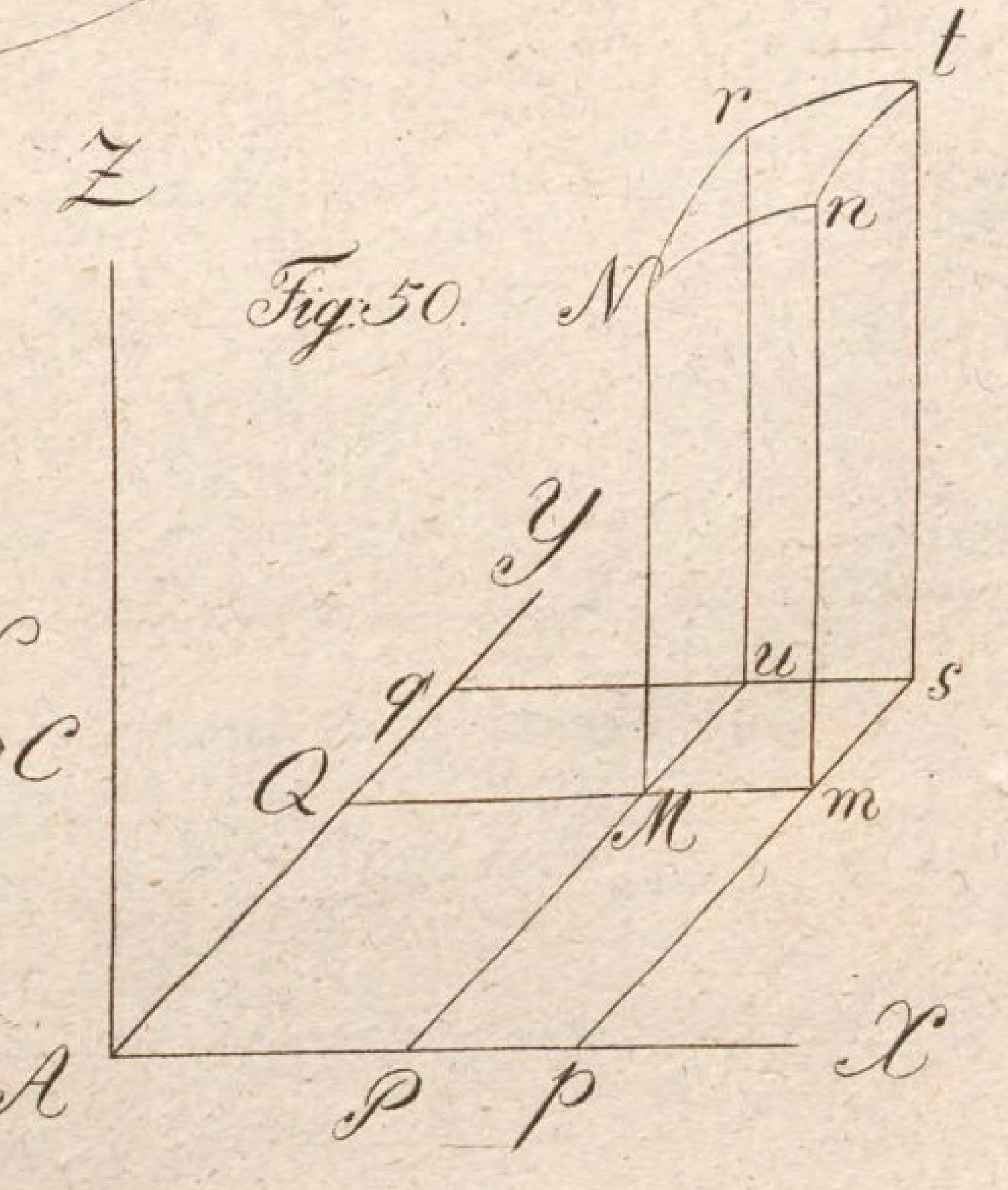


Fig: 50.



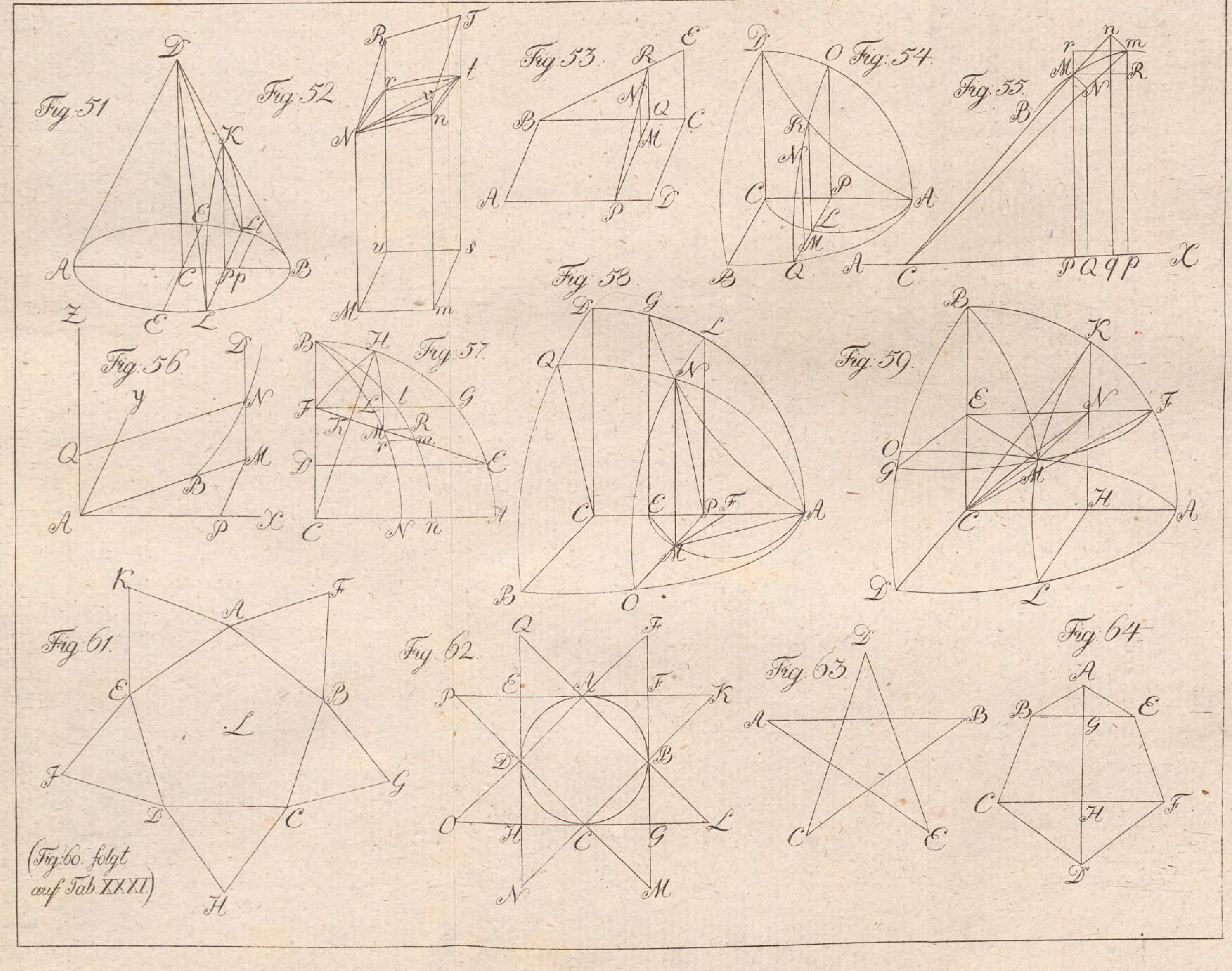


Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
(Fig. 60. folgt auf Tab. XXXI)

Fig: 60.

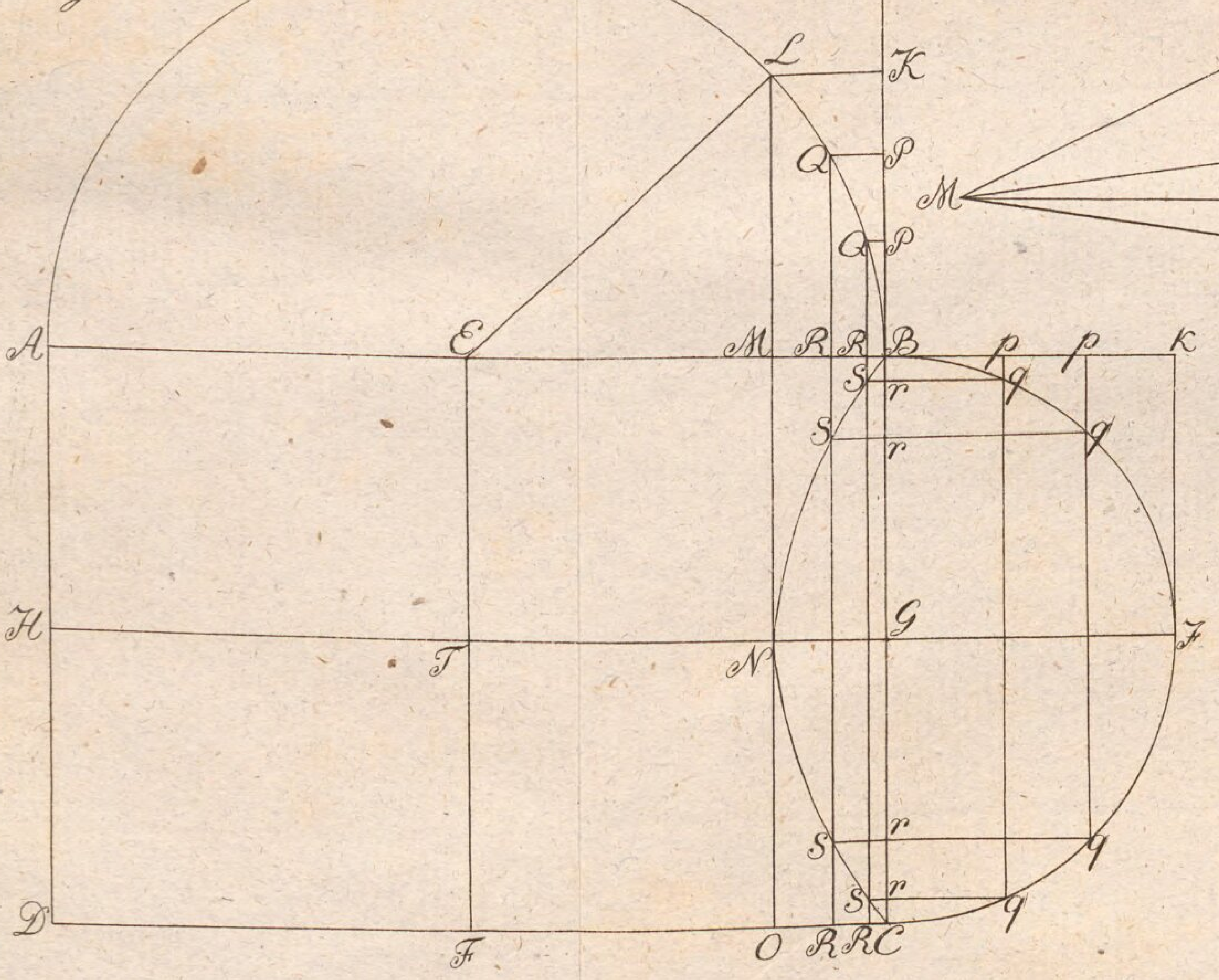


Fig. 66.

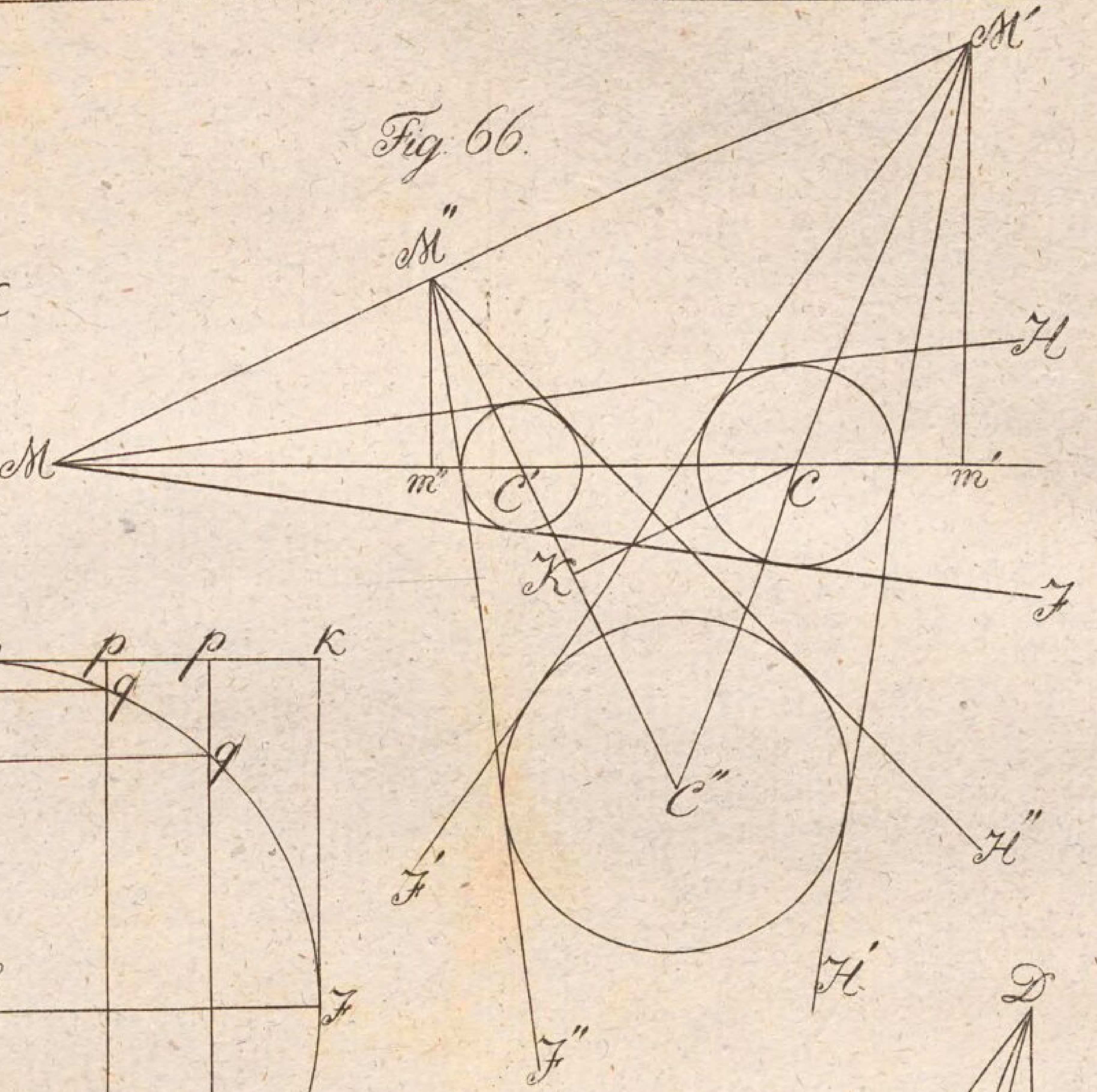
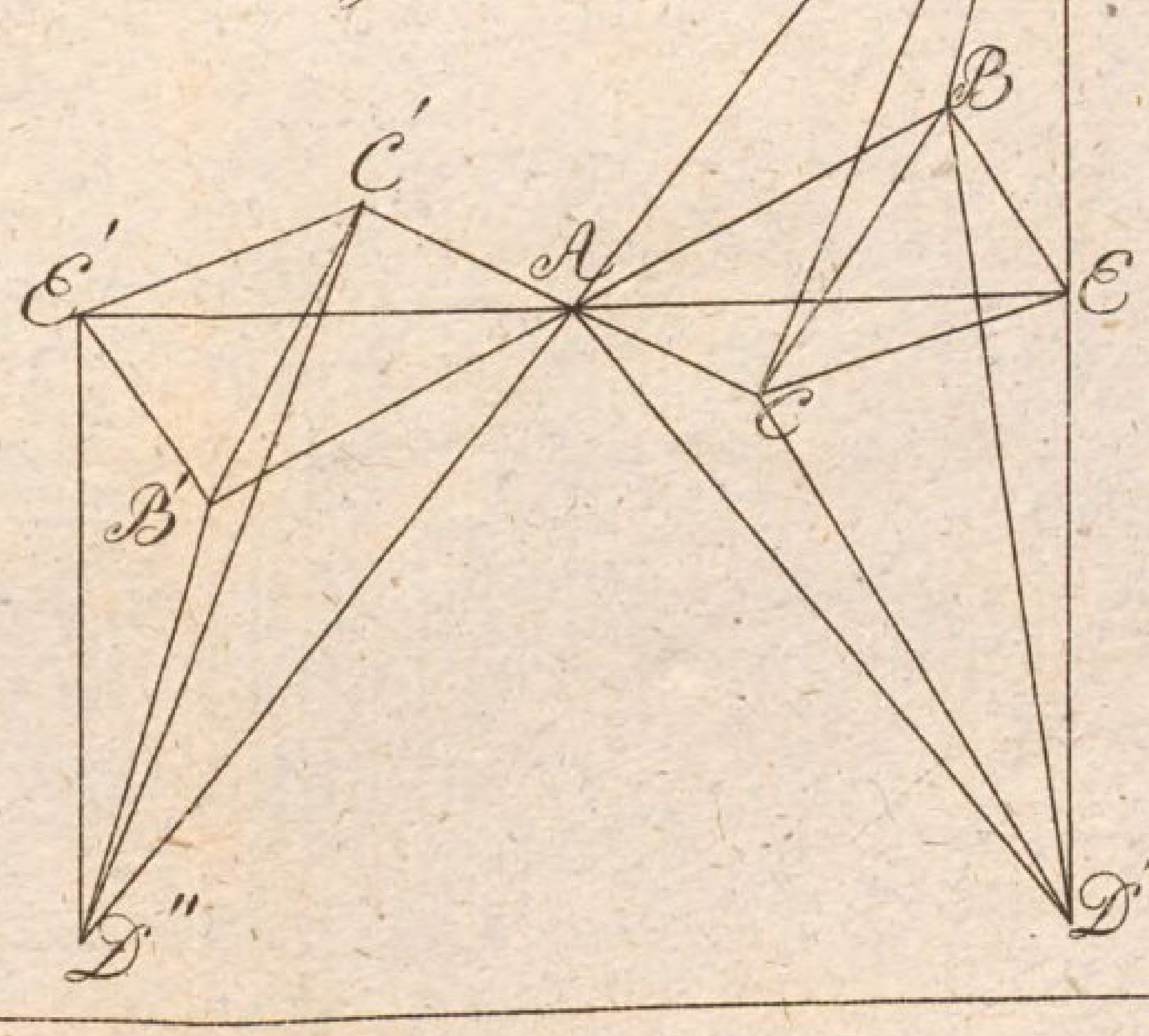


Fig. 65.



Bayeriſche
Staats
Bibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klügel, Georg Simon, / Mollweide, Karl Brandan, / Grunert, Johann August,

Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet ; in alphabetischer Ordnung
Bd.: Vierter Theil

Leipzig 1823
Math.u. 90 m-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594028-9